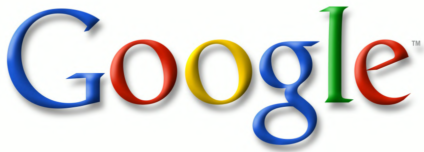


951

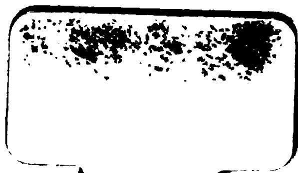


Robert Barclay.
Bury Hill.



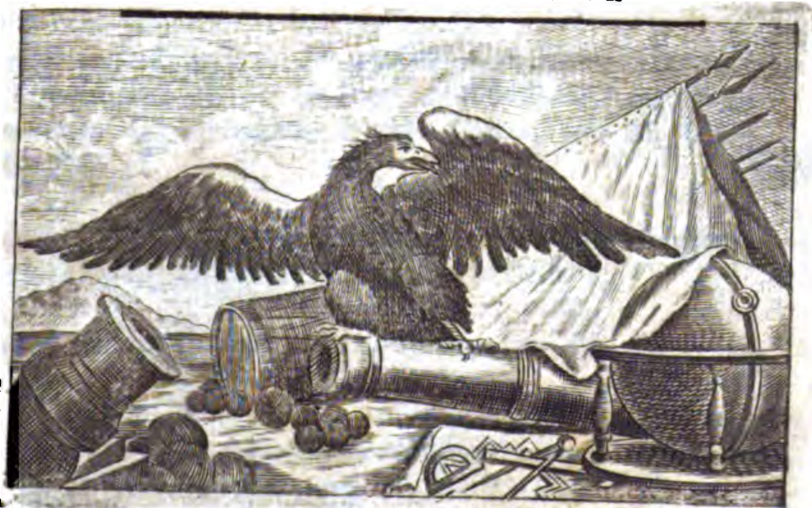


Robert Barclay.
Bury Hill.



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXII.



À BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLXIX.

Imprimé

par ordre de l'Académie.

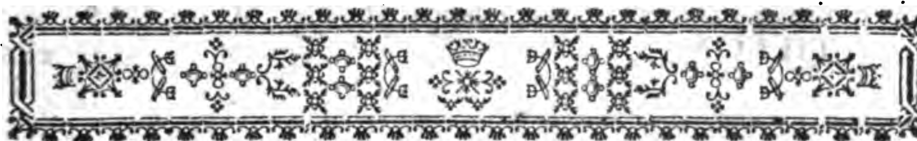


TABLE.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

Mé-

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.

Pre-

CLASSE

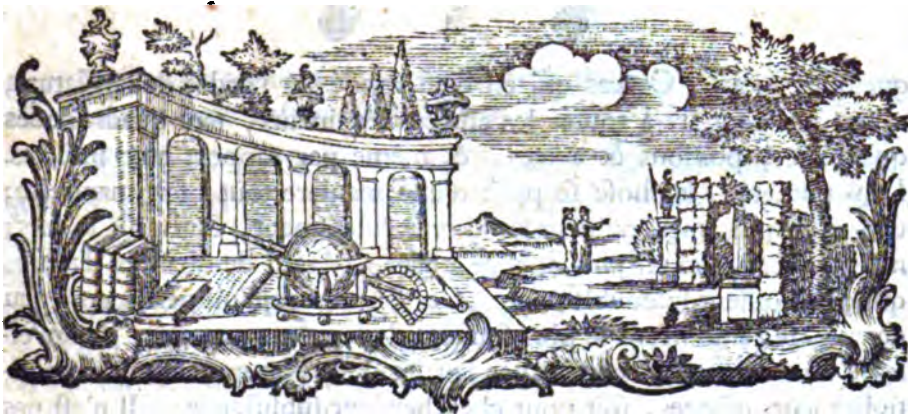
DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.



NOUVELLES OBSERVATIONS CONCERNANT DEUX CAS PARTICULIERS DE GRENOUILLES (a), QUI ONT ÉTÉ TROUBLÉES DANS L'ÉTAT D'ENGOURDISSEMENT OÙ ELLES ONT COÛTUME DE PASSER L'HYVER. (*)

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit de l'Allemand.



Toutes les especes d'animaux sauvages qui vivent sous un Ciel tempéré, depuis les plus grandes jusqu'aux plus petites, & par conséquent jusqu'aux insectes que leur petitesse dérobe à la simple vue, passent l'année entiere dans le même climat, ou bien au changement des saisons, vont dans d'autres pour

quel-

(a) *Rana temporaria.* *Linn.* *Ed.* X. p. 212. n. 13. *Ed.* XII. p. 357. n. 14.
(*) Lû dans les Assemblées du 18 Novembre & du 2 Décembre 1762.

quelques mois. Ce cas qui est bien fondé sur l'ordre de la Nature, a lieu par rapport à toutes les especes d'animaux, tant quadrupedes qu'oiseaux, poissons & autres, & même par rapport aux insectes. Dans plusieurs, la chose se passe d'une maniere tout à fait manifeste; dans quelques unes, on peut l'observer subitement, & tout à la fois; mais l'observation est plus difficile à faire à l'égard de quantité d'autres qui disparoissent insensiblement. Ces dernieres qu'on perd peu à peu de vue, se remontrent le plus souvent de la même maniere, lorsqu'elles y sont comme nécessitées par l'ordre de la Nature, soit pour multiplier leurs especes, soit pour chercher leur subsistance. Il n'est pas question ici des cas extraordinaires, qui, dans certaines années, nous font trouver dans nos contrées des animaux tout à fait étrangers, qui n'y appartiennent point, & dont à peine un seul individu se présente tout les huit, dix, douze ou quinze ans. (*)

Dans tous les animaux sauvages, qui sont entierement propres à nos contrées, soit qu'ils s'y laissent voir pendant tout le cours de l'année, ou qu'ils se tiennent cachés pendant un court espace de tems, ou aussi, comme cela arrive à plusieurs sortes d'insectes, qu'ils vivent dans leurs oeufs ou dans des chrysalides, on remarque, suivant la température des lieux, certaines différences. En effet, une partie de ces animaux, qui, au cœur de l'hyver, sans craindre la rigueur de la saison, est accoutumée à chercher sa nourriture en plein air, demeure observable toute l'année, dans les lieux qui lui servent de retraite & où elle à établi son domicile; avec cette seule exception que, tantôt les mâles, tantôt les femelles, quelquefois les uns & les autres ensemble; peut-être à cause de leurs alimens, de la saison, de l'accouplement, de la multiplication, & d'autres situations naturelles qui les concernent particulierement, demeurent dans des lieux séparés, & par cette raison ne sauroient être apperçus pendant un fort court espace de

(*) C'est ce qu'on remarque à l'égard des oiseaux aquatiques d'Ecosse & des autres contrées septentrionales: il en vient beaucoup plus rarement des pays chauds dans la Marche.

de tems: ce qui arrive néanmoins, & peut très bien arriver, ſans que ces animaux ayent beſoin de s'éloigner.

Une autre partie des eſpeces ſauvages, qui ſont auſſi indigenes que les précédentes, & qui par conſéquent n'abandonnent jamais nos contrées ſans les cauſes les plus preſſantes, ſe cachent entierement tous les ans pendant quelques mois, de façon qu'il y en a quelques unes dont le ſéjour en hyver n'a encore pu être découvert & déterminé par les Naturaliſtes. Il eſt très connu & décidé à l'égard de pluſieurs que, vers la fin de l'automne, elles entrent dans leurs retraites pour y paſſer l'hyver, & en ſortir au printems ſuivant. Quand la ſaiſon n'eſt pas rude, il y en a qui ſortent de leurs aſyles même pendant l'hyver, pour venir reſpirer l'air; mais elles ne s'en éloignent, ni trop, ni trop longtems. Une circonſtance qui paroit particuliere à ces dernieres, c'eſt qu'elles s'arrangent des lieux de retraite, régulierement & ſûrement conſtruits, où elles ſont à l'abri du froid, & où elles raſſemblent en même tems les proviſions dont elles ont beſoin, ayant eu ſoin de les y porter dès l'automne.

Une partie conſidérable de nos animaux ſauvages indigenes, s'eſt outre cela attiré d'une façon ſinguliere l'attention des Naturaliſtes, par cela même qu'elle ſe trouve dans des circonſtances préciſément contraires à celles que nous venons d'expoſer. Les animaux que j'ai en vue, & dont le nombre va certainement fort loin, puiſqu'il comprend diverſes claſſes du Regne animal, demeurent auſſi conſtamment avec nous, & ſe dérobent entierement à nos regards pendant les mois d'hyver. Voilà ce qu'ils ont de commun avec les précédens; mais ils en different à tout autre égard. Car, dès l'automne, ils commencent à jeûner, ce qui les affoiblit; & enſuite ils s'enferment dans leurs retraites où leur ſituation ne reſſemble en rien à celle des autres.

De ces animaux, les uns ſe logent ſous terre, à diverſes profondeurs, les autres dans des murs, des arbres creux ou des caves, quelquefois ſous des racines ou ſous des rivages élevés; il y en a auſſi dans des cavités, ſous des amas de cailloux, dans des rochers, & ſous

ces pierres qui sont répandues dans les campagnes. Certaines especes se trouvent fort profondément sous l'eau, ou entierement au fond, ou plus à la surface dans la vase. C'est là que, sans aucune nourriture & sans se mouvoir, elles attendent le retour du printems. Elles tombent dans une sorte d'engourdissement, ou d'assoupissement, que quelques Naturalistes appellent le sommeil d'hyver de ces animaux. Dans ce plus haut période d'affoiblissement on n'y remarque plus qu'un mouvement extérieur très lent & très foible; dans quelques unes même il est imperceptible. Alors elles sont dans un état total, ou de contraction, ou d'extension, où elles demeurent, sans le moindre changement, jusqu'à ce que l'air ait repris le degré de chaleur qui fait germer les jeunes plantes, & éclorre les insectes. Pour ne pas m'engager dans de trop grandes longueurs, je renvoie ceux qui aiment les détails à l'histoire naturelle de ces animaux, où tout ce dont j'ai fait jusqu'ici une mention succinte, en faveur de l'ordre, se trouve rapporté d'une maniere circonstanciée. Je vais, conformément à mes vues, me borner ici à deux cas tout à fait extraordinaires, qui, par leur rareté, méritent toute l'attention de ceux qui s'attachent à l'étude de la Nature.

Il s'agit de nos Grenouilles communes, dont une partie passe l'hyver sur la terre, mais l'autre fort avant dans l'eau dans les marais, les lacs & les courans: ce qui peut avoir induit le vulgaire à distinguer entre grenouilles d'eau & grenouilles de terre. Depuis le printems jusqu'au milieu de l'automne, ces animaux, comme l'on sait, vivent du frai des poissons, & de la rapine qu'ils exercent sur tous les insectes & sur toutes les petites créatures dont leur grandeur & leur force leur permettent de se saisir: quelquefois aussi ils dévorent avec beaucoup d'avidité la feuille tendre de certaines plantes, tant qu'elle conserve de la douceur. Mais, dès que les nuits commencent à être plus longues & plus froides, leur appétit passe; ils cessent peu à peu de manger, & perdent la plus grande partie de leur vivacité précédente. Après cela ils se dispersent, vers le milieu d'Octobre: on n'en trouve plus

plus une ſi grande quantité dans les campagnes, dans les prairies & ſur le bord des eaux: dans les derniers jours chauds de l'arriere-ſaiſon ils ne s'écartent gueres des marêcages, & à la fin ils ne ſe montrent plus qu'aux heures du midi, dans les endroits expoſés au Soleil. Quand leur vivacité eſt tout à fait éteinte, ils diſparoiſſent avec les beaux jours qui terminent l'automne, de maniere qu'en Novembre à peine en rencontre-t-on par-ci par-là qui ſe traînent, toute l'eſpece, conformément à l'ordre de la Nature, ayant déjà pris ſes quartiers d'hyver.

Les Grenouilles communes de terre ſe gliſſent partout où elles peuvent être à l'abri de la rigueur du froid: on en trouve, à diverſes profondeurs, dans la terre, ſous les arbres, dans les murailles, dans les caves, entre l'épaiſſeur des planches, dans les écuries & autres lieux ſemblables. Néanmoins je ne les ai jamais trouvées auſſi enfoncées en terre qu'ont coûtume de ſe placer les crapaux des champs & des jardins: car il arrive quelquefois, au milieu de l'hyver, par quelque accident, qu'on tire ceux-ci de creux très profonds, entre des collines, en nombre conſidérable, avec leurs ennemis jurés, les ſerpens, dont ſans cela & dans les autres ſaiſons de l'année, les crapaux ne ſauroient ſoutenir longtems la compagnie; & cela n'auroit pas même lieu dans leurs nids d'hyver, ſi les uns & les autres n'étoient alors dans un état qui ne leur permet pas de ſe nuire réciproquement.

La retraite des Grenouilles communes d'eau en hyver eſt dans le ſol du fond des courans, des lacs, & des marais, à diverſes profondeurs, mais le plus ſouvent tout ſimplement dans le limon. Elles y tiennent auſſi ferme que des pierres, dans un état d'affoibliſſement, d'immobilité & de contraction. Leurs yeux ſont tout à fait petits & enfoncés dans la tête, & pareillement retirés enſemble. La bouche eſt, comme aux Grenouilles de terre, parfaitement fermée. Dans ce lieu, dans cet état & dans cette poſition, ces deux eſpeces de créatures ſe trouvent dans une ſorte d'engourdiſſement, où elles demeurent au fond

fond de leurs retraites jufqu'au printems. Elles vivent à la vérité réellement, quoiqu'avec le mouvement intérieur le plus foible qu'on puiffe imaginer, & qu'on pourroit fuppofer en être le plus bas degré: & quant aux mouvemens extérieurs, il ne s'en manifefte que peu ou presque point. Cet état n'a pas feulement lieu pour les grenouilles, les crapaux, les ferpens, les tortues, les lézards, & autres reptiles femblables; il s'étend auffi à quelques efpeces d'oifeaux & de quadrupedes; mais nous ne fommes inftruits avec exactitude que du plus petit nombre des circonftances qui les concernent: & les cas fortuits qui fe préfentent, ne nous donnent que des notions très imparfaites.

Quand on réflêchit attentivement fur ce qui vient d'être dit de l'état de femblables créatures, on y trouve des articles dont l'importance eft affez grande pour exciter toute l'attention d'un Naturalifte; comme, par exemple, qu'un tel animal peut demeurer pendant quatre à cinq mois dans cet état fans prendre de nourriture, les mouvemens naturels de l'œconomie animale étant alors en partie fufpendus dans le corps, ou même entierement arrêtés. Les mouvemens mêmes qu'on nomme vitaux font confidérablement altérés, réduits au plus bas degré de foibleffe, & rendus prefque imperceptibles.

Si nous empruntons enfuite le fecours de l'expérience, & que nous joignions aux remarques précédentes les obfervations que des hommes célebres ont faites tant en hyver qu'au printems fur ces animaux, les épreuves auxquelles ils les ont foumis, les diffections qu'ils en ont fait, & toutes les rélations qui en exiftent; les deux cas, dont il va être queftion dans la fuite, nous paroitront néceffairement tout à fait rares & extraordinaires. Dans ces animaux, le fang ne fe meût pas en hyver par les poumons comme au printems; & le mouvement du cœur, le principal & le plus indifpenfable de la machine, eft tellement affoibli & comme étouffé, que, fuivant l'obfervation du célebre Leuwenhœck, en confidérant au microfcope les arteres des grenouilles & des chauvefouris, le fang en hyver paroir épaiffi, figé ou granuleux. Cette circonftance fe confirme par l'expérience la plus exacte, qui

qui montre comment la circulation se rallentit d'abord dans les muscles & dans les membres extérieurs de ces créatures, & commence à s'y affoiblir, tandis qu'elle est encore assez forte dans les intestins; & lors même qu'elle paroit cesser tout à fait, elle subsiste pourtant encore dans le cœur & dans les arteres, & y a même pendant longtems encore assez de vivacité. Mais, quand le mouvement décroît à la fin, au point d'être tout à fait imperceptible, il ne laisse pas de continuer dans le cœur & dans les arteres, quoique parvenu au dernier degré d'affoiblissement. Il ne reste quelquefois aucun signe de respiration & de vie qui soit observable, aucun indice de sentiment & de mouvement. Une chose que le même Observateur a encore remarquée, c'est que le sang des animaux réduits à cet état ne se laisse pourtant pas dissoudre & délayer, même après l'avoir tenu longtems exposé au feu. On ne sauroit parvenir, ajoute-t-il, à rendre la liquidité & le mouvement actuel à ce sang, avant que le cœur ait commencé à se contracter à diverses reprises; mais, dès que cela est arrivé, le sang recouvre son mouvement précédent, & revient à son état de fluidité naturelle.

Tout cela fait suffisamment voir que, dans ces animaux, la force mouvante ou motrice du cœur (*) est en partie peu à peu détruite, en partie affoiblie à un tel degré, que son mouvement actuel, & en même tems celui de toutes les parties solides du corps, est fort empêché, arrêté, & presque entierement supprimé. Car c'est en cela que consiste la grande & principale cause, sans la force & l'efficace de laquelle la circulation du sang avec la sécrétion de toutes les autres liqueurs qui se trouvent dans le corps humain, ne sauroit avoir lieu.

Rien n'étant donc plus certain que la dépendance où se trouvent la circulation du sang, aussi bien que le mouvement & la sécrétion des autres liquides dans les animaux, de la contraction actuelle (**) & vive en même tems des parties solides du corps, il ne paroit pas que l'asser- tion

(*) *Vis contractilis cordis & arteriarum.*
(**) *actualis contractio.*

tion suivante ait besoin d'être établie sur des preuves ultérieures; savoir que par le frottement réitéré des liquides contre les solides, qui a lieu dans la circulation de tous les sucs suivant l'ordre régulier, il s'excite dans le corps une chaleur, qui sert ensuite nécessairement à dilater & à étendre l'air renfermé dans les canaux & mêlé avec les sucs. Néanmoins il ne faut faire l'application de ces circonstances aux diverses especes de semblables animaux qu'avec beaucoup de circonspection, & en y apportant les restrictions convenables; ce qui va se prouver bientôt de soi-même, en considérant la structure particuliere du cœur & des autres intestins. En attendant, en vertu de ces circonstances, qui peuvent fort bien entrer en comparaison avec les précédentes, l'état des animaux qui font le sujet de ce Mémoire se présente d'une maniere assez distincte; & par la réunion de toutes les expériences & de toutes les observations faites à ce sujet, on peut dire avec une pleine certitude, que tant que les animaux susdits demeurent dans l'état où ils passent l'hyver, les mouvemens naturels & animaux, avec ceux qui sont requis pour la conservation de la vie (*), se trouvent en partie affoiblis, étouffés, & même détruits. Que cela ait effectivement lieu par rapport aux mouvemens naturels (**), c'est ce qui paroit résulter de l'extreme insensibilité & inertie qu'on observe dans ces animaux pendant ce tems-là. Mais, que les autres mouvemens animaux (*.*) soient en même tems étouffés & détruits, c'est ce que témoigne principalement l'entiere imperceptibilité, ou le défaut réel du mouvement (qui est pourtant particulierement nécessaire) de l'estomac & des intestins, avec le défaut de la liqueur qui doit se trouver dans l'estomac pour y dissoudre les alimens, & procurer la digestion & la préparation du chyle; (†) aussi bien que l'état des boyaux entierement vuides & affaissés: enfin cet état singulier d'un assoupissement continuel, d'un sommeil qui dure plusieurs mois.

Quant

(*) *actiones animales, naturales & vitales.*
(**) *actiones naturales.*
(*.*) *animales.*
(†) *motus peristalticus ventriculi & intestinorum, defectus liquoris gastrici, concoctionis, chylificationis.*

Quant à ce qui regarde les principaux mouvemens qui appartiennent à la vie (*), on est en droit de supposer que, comme les précédens, ils cessent en partie, & en partie ils continuent d'une maniere tout à fait imperceptible, à cause de leur extreme degré de foiblesse. Le défaut de respiration peut aussi servir ici de preuve fort évidente, les poûmons se trouvant en même tems tout à fait affaissés, parce que le sang qui a coûtume d'y circuler avec beaucoup de rapidité, n'y passe point pendant un espace de tems. La circulation du sang ne laisse pas de se maintenir dans le corps; & elle s'exécute au moyen d'un mouvement extérieur, imparfait, foible, lent & imperceptible, qui subsiste dans les autres vaisseaux aussi longtems qu'il est possible, sans ébranler les poûmons. On conçoit au reste que la vie peut exister & durer sans la respiration, puisque les embryons des animaux vivent réellement dans les œufs.

Tout ce que je viens d'exposer au sujet de l'état des Grénouilles en général, & de quelques autres animaux, est destiné surtout à mettre les Lecteurs mieux en état de juger de ce qu'il y a de rare & d'extraordinaire dans les deux cas que le titre de cette Dissertation annonce, & qui en font le sujet proprement dit. Les voici.

J'ai observé le premier, il y a déjà un tems considérable, dans le Jardin Botanique de Trebnitz, & dans la compagnie de son illustre possesseur (**), chez qui, au défaut d'un Jardinier, je m'étois chargé avec plaisir pour un certain tems du soin des plantes étrangeres, sur lesquelles je faisois toutes sortes d'expériences. M. de Jussieu, qui s'est acquis tant de réputation par son savoir, & qui est si estimable par son caractere obligeant, me fit parvenir alors une quantité considérable de plusieurs semences rares, qu'il avoit reçues nouvellement de l'Amérique méridionale. La plûpart vinrent fort bien. Mais leurs jeunes plantes avoient beaucoup de douceur visqueuse, & avec cela une moëlle abondante. En particulier, leur bois & leur écorce ne mû-

(*) *actiones vitales.*

(**) M. *de Zieten.* Voyez *Catal. Hort. Trebnitz. de Anno* 1737.

mûrissoient pas bien avant l'entrée de l'hyver, à cause de quoi, renfermées dans les serres, lorsque le tems devenoit d'un froid humide avec des brouillards en Novembre, elles perdoient presque toutes leurs feuilles, à l'exception de celles qui étoient aux pointes.

Cet accident exigea que ces plantes, qui méritoient bien d'être conservées, fussent tenues jusqu'au printems dans un degré considérable d'une chaleur douce continuelle, jusqu'à ce qu'il vînt des jours plus clairs, & que le Soleil eût atteint une plus grande hauteur. On fit donc dans la serre chauffée une couche de fumier avec du tan, que l'on avoit soin de renouveller comme il étoit convenable. Vers le milieu de Décembre, on mit sur cette couche une grande quantité de semblables plantes avec beaucoup de succès. L'appartement & le sol de la maison, qui se trouvoient suffisamment échauffés par là, furent entretenus dans un certain degré de chaleur aussi exactement qu'il étoit possible. Bientôt après on apperçut, particulierement le matin & le soir, quelquefois aussi dans l'obscurité, une grosse & vieille grenouille, qui coassoit d'un ton assez bas, mais dont le coassement devint ensuite aussi haut & aussi fort qu'il se fait entendre au printems en plein air: seulement il n'étoit pas aussi fréquent. Au commencement on ne put pas bien découvrir le gîte de cet animal; il y a apparence qu'il s'étoit glissé par la fenêtre d'en bas de la maison, qui avoit été quelquefois ouverte en Octobre, & qu'il avoit pris sa retraite sous le seuil.

Les mêmes circonstances durerent jusqu'à la fin de Fevrier; l'animal apparemment avoit été ranimé par la douce chaleur que le fumier avoit communiquée à la terre, au point que, dans une saison où il n'a pas coûtume de paroître, il étoit venu à la fin chercher sa nourriture & l'avoit trouvée dans l'appartement chauffé par le fourneau, comme je m'en apperçus avec étonnement; mais en même tems j'en reçus du dommage. Car, peu après, il se manifesta, aux tiges tendres des plantes vers les pointes, & aux jeunes feuilles, des points & de petites taches répandues partout, comme si on les avoit piquées & déchirées avec des épingles. Ces taches se multiplierent & s'aggran-

dirent

dirent journellement, de façon qu'on s'appercevoit distinctement qu'il y avoit dans le lieu même quelque chose qui endommageoit ces plantes en les froissant & les rongeant; aussi commencerent-elles à se flêtrir, & quelques unes périrent. Quoique je ne pusse pas découvrir d'abord le véritable auteur de ce dommage, il me paroissoit trop délicat pour que j'eusse pu l'attribuer à la Grenouille, qui d'ailleurs ne s'étoit pas encore montrée. (*)

En Janvier, de nouvelles circonstances survinrent, qui dévoilerent bientôt tout le mystere. Les fenêtres de la serre ayant été ouvertes le matin par un beau Soleil, & les plantes devant être un peu arrosées une heure après, on découvrit d'abord la grosse Grenouille entre les pots, un peu étendue sur le tan, comme si elle eût voulu bien jouir de la chaleur des rayons du Soleil; & les jours suivans, on la rencontroit presque partout dans l'appartement. Dans la même matinée on vit un nombreux essain de fort petites sauterelles, qui paroissoient être de l'espece des petites sauterelles vertes des prés, & qui sortirent du tan entre les pots. (**) Cet essain alla se porter droit sur les plantes, de façon que les tiges, les sommets & les branches de quelques unes en furent presque tout à fait couverts.

On détruisit un petit nombre de ces insectes, mais la plus grande partie échappa entre les pots & rentra dans le tan. En général, on se donna pendant quelque tems des peines inutiles pour en débarrasser les plantes; la grenouille qui prenoit tous les jours plus de vivacité, les chercha soigneusement, & en fit curée en peu de tems, de façon que la maison s'en trouva entierement délivrée. Six jours après, contre mon attente, la grenouille se perdit, & je n'ai pu en découvrir depuis aucune trace. Il y a toute apparence qu'elle rentra dans son gîte qui aura été quelque endroit plus frais de la maison, ou, ce qui est encore plus vraisemblable, qu'elle sera morte; comme cela arrive aux

(*) M. *de Zietem* conjectura tout d'abord qu'il falloit qu'il y eût des insectes cachés dans le tan.

(**) Cette circonstance a eu lieu encore une fois avec du tan qui n'étoit pas net.

aux animaux de ces eſpeces, que quelque accident tire pendant l'hyver de leur aſſoupiſſement, & conduit dans des appartemens chauds.

La douce & continuelle chaleur du fumier avoit ranimé cette grenouille, de façon qu'au milieu de l'hyver elle s'eſt fait voir pendant longtems, & qu'elle a même cherché de la proie pour lui ſervir de nourriture. C'eſt la même chaleur qui a fait éclorre les œufs des ſauterelles, & les a miſes en état de ſe procurer bientôt des alimens.

L'autre cas particulier que mes eſſais m'ont offert, n'eſt pas moins remarquable que le précédent. Par un froid rigoureux & une forte gelée, je fis pêcher, vers la fin de Décembre, une quantité de grenouilles au fond de la Sprée, & j'en choiſis trois des plus conſidérables pour mes expériences. De ces trois il y en avoit une femelle & deux mâles; ces derniers étoient aiſément reconnoiſſables aux caroncules avancées qu'ils ont à chaque pouce des pieds de devant. A en juger par les indices extérieurs, ces animaux étoient dans un parfait engourdiſſement, & dans un état de contraction peut-être plus fort que de coûtume, parce qu'après les avoir tirés de deſſous l'eau de Charlottembourg, on les avoit portés à Berlin expoſés au froid. Je mis chaque grenouille dans un verre à part avec de l'eau de riviere; le verre avoit environ un pied de largeur & deux de hauteur. D'abord ces grenouilles allerent à fond comme des pierres, & conſerverent toute la force de leur contraction. Je les poſai dans ces verres ſur le plancher d'une chambre froide, & les y laiſſai tranquilles pendant huit jours: il ſe fit au deſſus de l'eau une croute de glace, ſans que cela portât aucun préjudice aux grenouilles.

Au bout de ce tems, je les trouvai toujours dans la même poſition où elles s'étoient montrées dès le commencement: je les tirai de l'eau pour les conſidérer plus attentivement; je ſéparai leurs pattes de derriere l'une d'avec l'autre; mais par un effet de l'air chaud, comme je l'expliquerai dans la ſuite, ces pattes ſe replierent peu à peu avec une force extrèmement débile, & reprirent leur précédente ſituation. Néanmoins la bouche demeura fermée, les yeux étant petits, tout retirés

tirés & fort enfoncés dans la tête. Tant que ces animaux demeurerent au froid, ils ne changerent point la ſituation que je leur avois une fois donnée, ou du moins ne le firent que fort lentement, avec une extreme difficulté & d'une maniere preſque imperceptible.

Le 8 Janvier, je mis les verres avec les grenouilles dans une chambre qui étoit à la vérité chaude, mais ſur le plancher, & je fis chauffer avec force la chambre qui étoit au deſſous, ce qui fit que les grenouilles commencerent à s'étendre & à s'allonger un peu dans l'eau: le lendemain ces changemens devinrent encore beaucoup plus ſenſibles. Ayant élevé ces grenouilles à deux pieds de terre, elles ſentirent un peu mieux la chaleur du fourneau, & au bout d'une couple de jours elles s'arrangerent & ſe redreſſerent au fond du vaſe: juſqu'à ce qu'à la fin elles recouvrerent aſſez de force pour débaraſſer leurs pieds les uns d'entre les autres. Mais, afin de pouſſer plus loin cette expérience, je plaçai les verres encore deux pieds plus haut, de ſorte que par la douce chaleur du poële la vivacité des grenouilles alla toujours en augmentant. Elles ſe mirent à nager au milieu du verre, & de tems en tems elles regagnoient le fond. Quelquefois elles montoient juſqu'à la ſurface de l'eau; où elles nageoient aſſez longtems; puis revenant, elles s'y plaçoient toutes droites ſur les quatre pattes étendues.

Dans ces circonſtances, je me propoſai de conſerver un des verres avec ſa grenouille au même degré de chaleur, & au contraire de ramener inſenſiblement les deux autres grenouilles à l'état précédent, où je les avois d'abord trouvées dans une chambre froide. Je m'y pris avec la plus grande circonſpection. Les mouvemens ſuſdits diminuerent proportionellement avec la vivacité de ces animaux; & ils retomberent dans leur premier état en ſuivant un ordre contraire à celui qui les en avoit fait ſortir. Ayant fait les mêmes eſſais à diverſes alternatives, je remis les verres à la chaleur précédente, & je les poſai à côté de celui qui étoit demeuré dans le poële, qui étoit alors à quatre pieds d'élévation, & à trois pieds de diſtance de la fenêtre. Là ces animaux reprirent leur premiere vivacité.

Sur

Sur ces entrefaites il arriva de ſoi-même, & ſans que j'y euſſe fait attention, que le verre où étoit la grenouille femelle ſe trouva placé entre les deux autres où étoient les deux mâles: depuis ce tems-là je remarquois journellement que ces trois animaux montroient plus de vivacité & d'inquiétude; ils faiſoient beaucoup plus de mouvemens qu'auparavant en montant & en deſcendant dans l'eau; leurs yeux devenoient ſaillans, gros & brillans; la bouche étoit ouverte, & les grenouilles commençoient même à coaſſer, comme la premiere grenouille dont j'ai parlé dans mon récit précédent. Ce coaſſement devenoit plus fort, quand elles nageoient longtems au deſſus de l'eau, & donnoient plus de jeu à leurs poûmons. Et il paroiſſoit en général que, depuis ce tems-là, ces grenouilles ne pouvoient, ni ne vouloient demeurer, ni tout à fait, ni trop longtems ſous l'eau. Elles eſſayoient au contraire toutes ſortes de ſituations, quand elles étoient laſſes de l'une, tenant au moins la moitié de la tête hors de l'eau pour pomper ſeulement l'air; ce qui n'avoit point eu lieu auparavant. Pour leur procurer plus de facilité à ce dernier égard, je vuidai hors des verres aſſez d'eau pour que les grenouilles puſſent ſe tenir au fond les pieds étendus, comme elles le faiſoient le plus ſouvent, & avancer le nés hors de l'eau.

Tel fut leur état au milieu de Janvier, & encore un peu plus tard; après quoi elles eſſayerent de ſortir tout à fait des verres; ce qui leur réuſſiſſoit ſouvent, de ſorte que j'étois obligé de les reprendre par le poële, & de les remettre dans le verre. Mais, le plus ſouvent, elles alloient ſe loger toutes trois dans le même verre. L'un des mâles mourut alors, ſans que j'euſſe pu en découvrir la véritable cauſe. L'autre au contraire monta ſur la femelle dans le verre, & ils s'accouplerent régulierement le 30 Janvier, de la façon qu'on a coûtume de le ſuppoſer, quand on ne met point de différence entre le ſimple embraſſement des grenouilles, & l'acte de la fécondation réelle.(*)

Le

(*) Feu M. le Profeſſeur *Mentz* a propoſé ſes idées ſur les circonſtances extérieures qu'on obſerve dans le cas en queſtion: & voici ce qu'il dit là-deſſus au §. XXII. d'une

Le huitieme jour depuis que j'avois commencé à observer ce cas si extraordinaire, je trouvai le matin les deux grenouilles mortes, encore dans leur état d'accouplement; & cela mit fin tout d'un coup à mes expériences, que j'aurois volontiers poussées encore plus loin. (*) Quoique je n'ose rien décider de positif sur la cause de cette mort, entre plusieurs qui peuvent y avoir contribué, le défaut d'une bonne & suffisante nourriture ne me paroit pas avoir été la principale, vu que, dans ces sortes d'animaux, depuis la fin de l'automne les liqueurs du corps qui s'étoient épaissies peu à peu, (entre lesquelles le sang tient le premier rang, à quoi il faut joindre les mouvemens hors de saison & véhémens excités dans le corps de ces animaux, & les autres situations contraires à l'ordre naturel qu'ils ont éprouvées,) avoient causé un extreme affoiblissement, auquel j'attribuerois plus volontiers qu'à quantité d'autres causes la mort qui s'est ensuivie. L'expérience vient outre cela nous fournir son secours, en nous apprenant que les especes d'animaux, ou du moins quelques unes d'entr'elles, qui, comme il a déjà été dit, sont troublées & tirées par quelque accident, au milieu de l'hyver, de leur état d'engourdissement & de foiblesse, quelque soin qu'on prenne de leur procurer une chaleur artificielle, de les nour-

d'une Dissertation soutenue à Leipsig sous le titre de *Generat. Paradox. in Ran. conspic.*

E thalamo frigido prorepit coaxans quadrupes, & cæco ardens impetu in amplexus ruit. Signo dato ololygone, obscuro murmure insilit a tergo masculus, arctissimeque amplexu involvit fæmellam, lunatis aliis, pectore armis intumbens, anterioresque pedes inflectens. Sub alis, consertis digitorum vel unguium intercapedinibus, qui ideo membrana, qua posteriorum pedum digiti connectuntur, ut natationi usum præbeant, sunt liberi. Sed ita conseruntur in manibus digiti, (quos ita nominare liceat) ut pollex ea parte, qua est tuberculum papillare, pressius applicetur cuti thoracis, eo loco quo fistula utero emissa inseritur, ubi eo imprimis tempore, quo genitale virus sitit palustris nympha, cutis rara & transparens est; & sic in amplexu hærentem sustulit amata taurum, quem vel in stagno natans, sive in gramine soloque duro saltans, subando circumfert, imo sublatum gestat, & ita firmiter incumbit adversarius, ut nec virga cæsus, nec ferro sectus amatam dimittat.

(*) Toutes les fois que j'ai répété de semblables expériences, elles ont donné les mêmes résultats, comme je l'exposerai dans la suite avec plus d'étendue.

nourrir & de les conserver, meurent pour l'ordinaire bientôt après. C'est ce que j'ai observé diverses fois dans les alouettes, & une fois dans une hirondelle au mois de Janvier; (*) & d'autres prétendent avoir fait les mêmes observations sur les cigognes & sur plusieurs autres animaux. Il y a aussi certaines années, dans lesquelles l'hyver est doux, ou du moins n'a pas le degré accoutumé de rigueur; & alors tant les grenouilles que certaines especes de poissons, que la saison tempérée porte à sortir plutôt de leurs trous, & à frayer de meilleure heure, sont ensuite trouvées le plus souvent mortes en assez grande quantité au printems suivant. Si nous devons ajouter foi à nos Annales, il y a eu des années (**) dont la température a été telle que les pêches, & d'autres arbres ou plantes sauvages, ont commencé à fleurir dès le 6. 8. ou 12 Décembre, & qu'au milieu de Janvier, les enfans ont porté à l'Eglise des couronnes de fleurs fraîches. (*.*)

Il est aisé de conjecturer dans quel état les animaux aussi bien que les plantes se sont alors trouvés, & encore plus que tous les autres, ceux qui annuellement sont assujettis aux grands changemens d'état

(*) C'étoit une hirondelle ordinaire de maison, dont on sçait certainement que l'espece appartient aux oiseaux de passage, les connoisseurs en fait d'Histoire naturelle en ayant vu, dans leur courses maritimes, tout à fait hors de l'Europe dans la saison où elles ne manquent jamais de nous quitter. Cet oiseau que l'on m'avoit envoyé de Thuringe en Janvier 1738, dans un panier, étoit mouillé, gelé, & avoit de la glace à ses ailes. Je le réchauffai dans mon poële, il reprit vie, commença à voler; mais il étoit fort foible, & mourut encore le même jour. On l'avoit tiré le matin d'un ruisseau près d'un moulin hors de l'Unstrut. J'ai lieu de croire que c'étoit un oiseau tardif, qui s'étoit niché, & que l'eau en montant avoit entrainé. Dans un autre tems, je trouvai l'oiseau qu'on nomme en Allemand *Rohrdommel*, dans un endroit couvert, auprès d'une source jaillissante. Comme la fable qu'on raconte des hirondelles m'est connue, j'ai promis en divers endroits, pendant trois ans de suite, un ducat pour la premiere hirondelle, & un florin pour la seconde, que les pêcheurs tireroient avec leurs filets de dessous la glace; mais, malgré ces offres, on ne m'en a point apporté.

(**) 1425. 1427. 1428. 1538.

(*.*) Suivant la Chronique de la Marche, les hyvers de 1567 & 1577 ont été de cette température; & il en a été de même de ceux de 1720. 1723. 1746 & 1747 dans la même Marche.

tat connus qu'ils éprouvent pendant l'hyver. Les arbres & les autres plantes du pays, dont l'état en hyver a une conformité assez considérable avec les circonstances qui concernent les animaux susdits, fleurirent alors quatre ou cinq mois plutôt que de coûtume; & les oiseaux de passage, ou ne s'en sont point du tout allés, ou ne se sont gueres écartés, de façon qu'au bout de quinze jours ou trois semaines on les a vu reparoître. Ainsi, en pareille occurrence, les animaux susdits ont quelquefois été cachés à peine six semaines, au bout desquelles ils ont quitté leurs retraites d'hyver tout à fait de bonne heure, savoir en Décembre, ou tout au moins en Janvier.

J'ai fait moi-même des expériences sur tout cela en certaines années (*), dans Berlin ou aux environs, pendant les mois d'hyver; la premiere fois, le 6 Décembre 1746; la seconde fois, le 20 Janvier 1747; & pour la derniere fois, le 6, le 8 & le 12 Fevrier 1750, j'ai déjà trouvé des crapaux & des grenouilles qui nageoient çà & là sur les eaux, & dont les ovaires étoient aussi épais & aussi gonflés qu'ils ont coûtume de l'être dans le tems du frai. Mais aussi, au bout de huit ou quinze jours, un petit froid étant survenu, j'ai rencontré plusieurs de ces animaux morts, dont les ovaires étoient fort gâtés, ou même tout pourris. Les Physiciens des Etats du Roi remarquerent pour la plûpart, dans cette même année, des circonstances presque semblables par rapport à plusieurs especes de poissons. (**)

Ici se terminent les observations que j'avois rassemblées sur deux cas particuliers aux grenouilles, qui avoient été troublées dans l'état d'engourdissement où elles passent l'hyver. Mais, comme je voulois parvenir à quelque chose de mieux fondé & de plus certain au sujet de l'accouplement imprévu des grenouilles dans une saison tout à fait ex-

 tra-

(*) 1746. 1747. 1750.

(**) J'ai déjà, dans le tems même, fait rapport de ces circonstances singulieres à quelques uns de Messieurs les Membres de la Classe de Physique de notre Académie Royale, qui ont aussi fait des expériences plus nombreuses & plus étendues sur la température chaude qui régna pendant l'hyver de cette année & sur ses suites.

traordinaire, auſſi bien que de leur mort arrivée pendant cet état, ou du moins peu après, je réitérai encore au bout de quelque tems des expériences dont je vais encore rendre compte.

J'allai en automne (*) avec un de mes diſciples à qui je donnois des inſtructions ſur quelques eſpeces rares & tardives de champignons, au Parc qui touche Berlin. J'eus occaſion d'y remarquer, par un air aſſez froid, que les grenouilles de diverſes eſpeces & de divers âges, dont la plûpart n'étoient plus que diſperſées une à une & tout à fait foibles, ſe hazardoient de paroître vers l'heure de midi en ſortant des terrains bas où elles s'étoient logées, pour venir prendre la chaleur foible mais encore agréable du Soleil, en ſe plaçant ſur des bords expoſés au grand air. (**) Je raſſemblai environ une ſoixantaine de ces grenouilles, & je les mis d'abord dans une chambre dont la chaleur étoit fort tempérée, placées dans de grands verres, avec de l'eau de pompe que je renouvellois tous les trois ou quatre jours. Environ au bout de dix jours (*,*), de cette multitude de grenouilles il y en avoit deux de médiocre grandeur qui s'étoient accouplées de la même maniere que j'ai décrite ci-deſſus, mais le lendemain matin elles étoient déjà ſéparées. Cependant je les ôtai d'avec les autres, parmi leſ-

(*) Le 23 Octobre 1763.

(**) Il y a apparence que les Grenouilles ne ſe cachent pas entierement, tant qu'elles peuvent ſoutenir le froid, & trouver encore quelque nourriture. Auſſi, quand la ſaiſon eſt tempérée, on en trouve par ci par là, vers la fin de Novembre, tant à la ſurface de la terre qu'à celle de l'eau. Quoiqu'elles s'affoibliſſent de plus en plus, elles ne laiſſent pas de ſe tenir dans une ſituation droite, changeant alternativement la contraction de leur goſier, & ayant de grands yeux vifs tout ouverts. Dans les commencemens, elles ne ſe cachent que la nuit, & ſe remontrent toujours aux heures où l'air eſt encore ſuffiſant pour les échauffer. Peut-être n'eſt-ce qu'avec répugnance qu'elles ſe renferment; & quand la nuit où elles le font eſt ſuivie d'un jour de froid conſiderable & de gelée, cela les met hors d'état de pouvoir reſſortir. Mais, ſi dans le milieu même de l'hyver il ſurvient un tems qui puiſſe rendre à leur corps le degré de chaleur néceſſaire pour le ranimer, elles prennent l'envie de ſortir de leur retraite, & payent pour l'ordinaire cette précipitation de leur vie.

(*,*) Le 3 Novembre, où juſtement je voulois les montrer à quelques amateurs ainſi accouplées.

lesquelles elles étoient trop à l'étroit, & je les mis dans une grande tasse de verre, qui étoit fort basse & découverte, avec un peu de sable net au fond; j'y joignis encore quelques grenouilles toutes jeunes, & je posai la tasse en plein air. (*)

Le quatre Novembre, à neuf heures du soir, ces grenouilles s'étoient accouplées pour la seconde fois; & le lendemain, à dix heures avant midi, elles étoient encore au même état. Je substituai alors de l'eau nette à celle qui étoit devenue sale, (sur quoi je m'étendrai tout à l'heure davantage) & après avoir fait cela le même jour, j'ôtai la tasse du grand air, pour la porter dans un poële chaud, & je la montrai à quelques amis, en présence desquels la grenouille mâle se sépara par un saut de la femelle, à laquelle ce mâle s'étoit accouplé pour la seconde fois.

La femelle toute affoiblie alla aussitôt à fond, & se mit dans un état de contraction. Je remis la tasse avec ces grenouilles dehors à l'air froid, & je remarquai dès le même soir que le mâle s'étoit accouplé pour la troisieme fois avec sa femelle. Ayant rapporté, le 6 Novembre, à dix heures avant midi, le verre où ces animaux étoient, dans le poële chaud, ils étoient déjà séparés, jusqu'à deux heures de l'après-midi qu'ils s'accouplerent pour la quatrieme fois, & je les trouvai encore au même état le soir à neuf heures.

Je ne sçai si ces accouplemens si fréquemment réitérés ont eu quelque autre cause que la chaleur du poële qui ne manquoit jamais d'augmenter la vivacité des grenouilles: à quoi il faut ajoûter que les grenouilles accouplées, (dont j'eus à la fois un plus grand nombre) se firent entendre alternativement dans mon poële par un coassement élevé le 6 & le 7 de Novembre. On pouvoit en approcher de la lumiere, & les observer exactement, sans que cela les dérangeât. Après le

(*) Ces grenouilles n'avoient pas été tirées, comme les premieres, de leur engourdissement d'hyver, mais le tems où elles ont coûtume d'y entrer, avoit seulement été retardé.

le quatrieme accouplement, les grenouilles dont il a été question jusqu'ici, n'y revinrent plus; mais leurs côtés, tant des mâles que des femelles, devinrent plus épais qu'auparavant, la couleur des premiers étant d'un bleu verdâtre, & celle des autres d'un gris-jaune.

J'ai parlé ci-dessus du soin de renouveller l'eau dans laquelle on met les grenouilles; ce qui étoit nécessaire parce qu'elles la salissoient toujours de leurs ordures. Je joignis cette circonstance à celles que j'ai indiquées en parlant de la grenouille qui a été le premier objet de ce Mémoire, & que j'avois trouvée vivant de rapine dans une serre: & je pouvois d'ailleurs suffisamment inférer de la vivacité des grenouilles, qu'elles ne pouvoient pas la conserver longtems sans nourriture. J'essayai donc si je pouvois leur en procurer; & le 7 Novembre, je jettai dans la tasse une douzaine de mouches estropiées. A peine la Grenouille mâle qui s'étoit dégagée du quatrieme accouplement, eut-elle remarqué le mouvement des mouches dans l'eau, qu'elle les hapa de la maniere ordinaire à celles de son espece quand elles sont dans l'eau, ou sur un gazon humide. Pour parvenir d'autant mieux à mon but, je couvris le verre où j'avois encore jetté cinq mouches; & dans moins de quelques minutes il ne restoit plus que ces cinq dernieres qui étoient allées à fond. (*)

La nuit du 11 au 12 Novembre, le coassement alternatif des grenouilles fut plus fort qu'auparavant, & le matin le premier mâle s'étoit accouplé de nouveau pour la cinquieme fois, après un intervalle de quatre jours de repos. Je substituai de tems en tems de l'eau nette à l'eau sale, & je ne laissois dans la grande tasse qu'autant d'eau qu'il en falloit pour que les grenouilles pussent nager à peine droites. Je remarquai que cela leur plaisoit fort à cause de la chaleur du poële; car elles étoient presque toujours assises dans une posture droite, avec la moi-

(*) On sçait que les grenouilles vivent de proie & se nourrissent de plusieurs insectes; mais qu'elles puissent se rendre maîtresses des escarbots de bois, d'eau & de terre, qui ont de grandes cornes & de fortes écailles, aussi bien que d'autres Insectes de cette vigueur, & les avaler, c'est ce qu'auront peine à s'imaginer ceux qui ne sont pas instruits à cet égard par l'expérience.

moitié de la tête hors de l'eau. Leur accouplement alternoit fort souvent; & du 3 au 21 Novembre, cela monta en tout à douze fois, la femelle devenant pendant ce tems-là toujours plus pâle & s'affoiblissant entiérement, jusqu'à ce qu'enfin elle mourut le matin suivant. Ses côtés étoient devenus fort gros & gonflés.

Comme j'avois pris cette fois-là une quantité considérable de grenouilles pour les soumettre à mes expériences, j'étois en état d'arriver à la conviction en observant plusieurs d'entr'elles à la fois. D'abord je les avois toutes mises en sept verres différens, avec de l'eau de pompe, de l'eau de pluie ou de l'eau de riviere, en mettant du sable au fond, ou sans y en mettre. Elles étoient de toutes sortes d'especes & d'âges, telles qu'on les rencontre dans cette saison de l'année, mêlées les unes parmi les autres dans les lieux marécageux; mais il n'y eut que celles de médiocre grandeur qui voulussent s'accoupler. Dès que je m'en fus apperçu, je les séparai d'avec les autres, & je les mis dans des tasses de verre, où je pouvois faire sur elles les mêmes observations que j'ai rapportées au sujet de la premiere. Je ne crois pas qu'il soit nécessaire de répéter les circonstances que j'ai déjà indiquées en parlant de la premiere paire, puisqu'elles sont parfaitement les mêmes. Leur accouplement a été communément jusqu'à 8, 10 ou 12 fois; & j'ai remarqué avec cela que cet accouplement a d'abord duré environ 48 heures, ensuite 24, 12, & à la fin 4 seulement, ou même une.

Mais je me trouvai obligé de donner de l'eau fraîche à ces grenouilles tous les trois ou quatre jours, pour les mieux observer. Car elles salissoient fort promtement l'eau par leurs excrémens, de sorte qu'elle devenoit épaisse, trouble, visqueuse & puante; il sembloit qu'elles la gâtassent exprès le plutôt qu'il leur étoit possible, & qu'elles n'aimassent pas l'eau claire. Je m'apperçus cependant que l'eau de quelques verres où étoient les grosses grenouilles, ne se troubloit & ne se salissoit pas aussitôt que celle des autres. Sa clarté duroit assez pour que je n'eusse besoin de la renouveller que tous les huit jours. Les grenouilles mouroient les unes après les autres; celles qui s'étoient accou-

couplées, les premieres; les autres successivement. Cela commença dès le neuvieme jour. Elles ne durerent pas en tout trois mois complets. (*)

Quant à ce qui regarde l'eau, je mis, comme je l'ai déjà dit, dans quelques verres de l'eau de pluie, mais dans les autres de l'eau de pompe fraîche, telle qu'elle sort de la pompe. Celle-ci paroissoit fort sensible aux grenouilles, elles s'inquiétoient & essayoient de sauter hors du verre; ce qu'elles ne faisoient point avec l'eau tempérée de pluie ou de riviere. A la fin elles se mettoient dans une forte contraction, & demeuroient au fond dans une espece de leger engourdissement, jusqu'à ce que l'eau versée sur elles eût été tempérée par la chaleur du poële. Alors elles regagnoient le haut pour respirer l'air. Quant aux especes de grenouilles qui ont coûtume de vivre dans l'eau, elles se tenoient au commencement volontiers fort au fond, surtout à la fin de l'arriere-saison, tandis que les autres alternoient, ou se tenoient même à fleur d'eau aussi longtems qu'il leur étoit possible.

Au sujet de l'accouplement, j'ai observé que les femelles s'y affoiblissoient au point de tomber au fonds de l'eau, mais que le plus souvent, au bout de quelques heures, ou même d'une seule, elles retournoient à l'accouplement avec les mêmes mâles. J'essayai, lorsqu'il arrivoit que deux grenouilles se séparoient, de mettre le mâle dans un autre verre, à un air frais, & lui ayant donné la femelle d'un autre de même espece, il se donna toutes les peines imaginables pour en venir à l'accouplement. Tous ses efforts pendant 26 heures n'ayant eu aucun succès, je le laissai dans le verre avec la même femelle, auprès de laquelle il fut dans une inquiétude perpétuelle, mais j'y mis en même tems

(*) Cela venoit de ce qu'elles manquoient de nourriture, & de ce qu'il leur en faut, parce que leurs mouvemens & les liquides de leurs corps étoient animés & entretenus par la chaleur. Il en est autrement, lorsqu'on laisse de semblables animaux dans leur engourdissement, comme on le fait avec les tortues, qu'on place dans des caisses remplies de terre dans des endroits frais, lorsqu'elles cessent de manger, dès le mois de Septembre; & elles n'en sortent qu'en Mars, ou au commencement d'Avril, pour chercher de la nourriture.

tems le mâle qu'elle avoit eu auparavant. A peine s'écoula-t-il un quart d'heure que l'accouplement eut lieu; mais cette fois-là il dura à peine une heure.

Cette eſpece d'accouplement qu'on voit dans les grenouilles, & qui conſiſte dans l'acte par lequel le mâle embraſſe étroitement la femelle, eſt aſſez connu; & d'ailleurs il a été diſtinctement décrit dans une Remarque précédente. Il faut pourtant ajoûter que le plus ſouvent il réuſſit fort mal, ou même échoue tout à fait, quand le mâle dans ſon ardeur, n'arrange pas la femelle dans la ſituation qui eſt préciſément requiſe. C'eſt ce dont on peut aiſément ſe convaincre en ſuivant le fil des expériences dont j'ai rendu compte ci-deſſus. Car, quand les grenouilles en ſautant viennent à ſe manquer, ce qui a ſurtout lieu quand une femelle eſt pourſuivie par pluſieurs mâles à la fois, il arrive que le mâle qui s'en empare, au lieu de la ſaiſir ſous les bras, s'attache ſeulement au bas ventre, autour des reins, & la tient pendant quelque tems fort étroitement ſerrée avant qu'elle puiſſe ſe dégager.

Il eſt encore poſſible, comme je l'ai remarqué diverſes fois, que le mâle ne ſaiſiſſe qu'un des reins de la femelle, & même à contre-ſens; ou qu'il n'emploie qu'un bras, l'autre étant ſi fortement contracté qu'il ne peut rien embraſſer.

Quand toutes les circonſtances requiſes pour l'accouplement ſe réuniſſent, telles qu'on les connoit, & que je les ai en partie rapportées, j'ai trouvé dans les femelles les côtés fort épais & gonflés, ſans avoir pu remarquer qu'elles ayent frayé. En général elles devenoient fort foibles, & mouroient bientôt après; peut-être parce que les œufs étoient mis dans un mouvement trop fort & prématuré, avant le tems ordinaire où ils peuvent & doivent être parfaitement développés; & c'eſt ce qui cauſe la mort de ces animaux, parce qu'ils ne peuvent pas ſe débarraſſer de leur frai.

 En

En finissant, je dois encore avertir qu'il s'étoit formé sur les verres exposés en plein air une croûte épaisse de glace, sous laquelle les grenouilles se conserverent sans aucun dommage. Dans quelques verres où la glace devint plus épaisse, les grenouilles mêmes gelerent au point de n'avoir que la tête de libre. Mais, les ayant fait dégeler doucement, elles reprirent leur vivacité précédente.

Voilà jusqu'où j'ai pû pousser ces expériences que je crois n'être pas indignes de l'attention des Naturalistes, d'autant plus qu'elles mettent dans un nouveau jour les effets du froid sur l'irritabilité des corps des animaux.



EX-

EXPÉRIENCES

SUR

LE POIDS DU SEL ET LA GRAVITÉ SPÉCIFIQUE DES SAUMURES FAITES ET ANALYSÉES

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Ayant eu dernierement occasion de comparer ensemble des sels tirés de différentes salines, je crus devoir m'en prévaloir, pour faire là-dessus plusieurs expériences, dont je vais rendre compte à l'Académie dans ce Mémoire.

I. COMPARAISON *de la mesure & du poids du Sel.*

§. 2. On sait que la gravité spécifique du sel est à celle de l'eau pure comme 2148 à 1000. Si donc le sel n'étoit qu'une seule masse, on seroit toujours assuré, qu'en achetant une mesure, par exemple un pied cube de sel, ce pied cube peseroit 2,148, ou environ $2\frac{1}{7}$ fois plus qu'un pied cube d'eau pure.

§. 3. Mais le sel consistant en de petits crystaux & floccons, il s'en faut de beaucoup, qu'un pied cube en pese deux fois plus qu'un pied cube d'eau pure. Ces petits crystaux & floccons se couchent l'un sur l'autre, de façon qu'ils laissent entr'eux de très grands interstices vuides, & par là le poids de toute la mesure diminue considérablement. Plusieurs de ces interstices ne se forment que parce que les crystaux & les floccons de sel ont une couche irréguliere, de sorte que s'appuyant l'un contre l'autre ils s'empêchent de s'ajuster de ma-

maniere que ſe touchant face à face ces interſtices ſe rempliſſent du moins en grande partie. On ſait qu'on obtient ce but en ſecouant & trémouſſant le vaſe, & on l'obtient davantage en comprimant le ſel avec force. On comprend auſſi ſans peine, que lorſque la meſure eſt fort haute, le ſel qui eſt au fond de la meſure eſt comprimé par le poids de celui qui eſt deſſus, & que par conſéquent la quantité de ſel n'eſt pas exactement proportionelle à la hauteur de la meſure, à moins qu'on ne le comprime dans toutes également.

§. 4. Il y a cependant encore une autre irrégularité, qui dépend de la différente figure du ſel. La figure du ſel commun doit être cubique. Si donc tous les grains étoient des cubes égaux, il eſt clair qu'ils pourroient s'ajuſter enſemble de façon qu'ils rempliſſent tout l'eſpace, ſans laiſſer d'autre vuide que cet enfoncement pyramidal qui ſe trouve dans chaque cube, & qui ne fait que tout au plus la ſixieme partie de ſon volume.

§. 5. Mais la cryſtalliſation du ſel ne procede pas ſi régulierement. Ces différens cubes s'attachent l'un à l'autre partout où ils ſe touchent, & forment par là des grains d'une figure fort irréguliere. Dans les ſalines, où il eſt queſtion de ménager le bois & de faire beaucoup de ſel en peu de tems, on ne laiſſe pas à la ſaumure le tems requis pour une cryſtalliſation réguliere, mais on ſe contente d'accélérer l'évaporation de l'eau, afin d'en tirer enſuite le ſel, quelque figure que ſes parcelles puiſſent avoir. De là il eſt fort ordinaire de voir que le ſel reſſemble plutôt à des floccons irréguliers qu'à des cryſtaux cubiques de plus d'une ligne d'épaiſſeur. J'ai examiné par le microſcope ces floccons de ſel. Ils ne préſentent qu'une eſpece de ramification qui n'offre preſque rien de cubique.

§. 6. Comme toutes ces irrégularités ne peuvent manquer de produire des différences conſidérables, quand il s'agit de comparer la meſure du ſel avec ſon poids, je me propoſai de déterminer ces différences par des expériences; & les ſels que j'avois à examiner m'en offrirent l'opportunité.

§. 7.

§. 7. Comme il eſt indifférent pour mon but, de quelles ſalines ces ſels ayent été tirés, je déſignerai les ſix eſpeces que j'ai eues par les lettres A, B, C, D, E, F, & je remarquerai à l'égard de toutes, que c'étoient des ſels très purs, & qu'ils ne contenoient que tout au plus une centieme, ou deux-centieme partie de matiere terreſtre ou de terre-mere. Les trois ſels A, B, C, étoient de très beaux cryſtaux, & particulierement dans le ſel C il y en avoit de la groſſeur de deux lignes. Les ſels D, E, ne conſiſtoient qu'en floccons, & le ſel F avoit des grains cubiques, mais qu'on ne voyoit être tels que par le microſcope.

§. 8. Je pris donc un petit vaſe cylindrique, dont la hauteur étoit de 22 lignes & le diametre de 16 lignes, meſure de Paris, & l'ayant rempli d'eau de fontaine, je trouvai qu'il contenoit 856 grains, poids de Berlin. Ainſi une maſſe égale de ſel péſeroit 1839 grains.

§. 9. Ce qui étant fait, je remplis ce vaſe de chacun de mes ſels, d'abord ſans les comprimer, enſuite en les comprimant autant qu'il étoit poſſible, & je trouvai le poids du ſel

	non comprimé	comprimé
A	593 gr.	717.
B	601	745.
C	634	783.
D	463	715.
E	470	696.
F	512	850.

§. 10. On voit par là que les ſels comprimés peſoient presque également, à l'exception du ſel F, qui péſoit beaucoup plus. Je n'en trouve d'autre raiſon, que celle qui dérive de la régularité de ſes grains. Les ſels B, C, approchoient d'avantage du ſel F, parce qu'il y avoit de fort grands cryſtaux. Car un grand cryſtal peut être regardé comme un aſſemblage de petits grains, ſans interſtices vuides.

§. 11. Cela se manifeste encore par le poids des sels non comprimés. Les deux sels D, E, qui n'étoient que des flocons, pesoient le moins. Les sels A, B, C, ayant de grands crystaux, pesoient près d'un tiers davantage, & le sel F tenoit un milieu. Il pesoit plus que les sels D, E, parce que ses grains étoient réguliers, mais il pesoit moins que les sels A, B, C, parce que ses grains étoient beaucoup plus petits que ceux de A, B, C.

§. 12. Quoique le sel F comprimé ait eu le plus de poids, cependant ce poids n'excédoit pas celui de l'eau, de sorte que les interstices vuides remplissoient encore au delà de la moitié de l'espace. Car les 850 grains que ce sel pesoit, occupent un espace de 397 grains d'eau pure, mais le vase en contenoit 856.

§. 13. Comme donc, suivant ces expériences, le poids d'une même mesure de sel non comprimé varie depuis 463 jusqu'à 634, ou bien depuis 8 à 11, on voit par là, qu'en achetant le sel par mesure, on peut croire en acheter 11 livres, tandis qu'on n'en achete que 8, & réciproquement on peut croire n'en vendre que 8 livres, tandis qu'on en vend 11.

§. 14. Si par contre on veut avoir égard à ce que le sel soit bien comprimé, ces mêmes expériences nous font voir, que le poids d'une même mesure peut aller depuis 696 jusqu'à 850, ou bien depuis 9 à 11. Cette différence est un peu plus petite que celle des sels non comprimés; cependant elle ne laisse pas d'être encore fort considérable, & il est aisé de voir que, si on achete le sel au poids, il ne sera jamais possible que les différens degrés d'humidité produisent une différence si grande. Car dans 9 livres de sel bien sec il faudroit mettre 2 livres d'eau. Or ces 2 livres d'eau ayant autant de volume que $4\frac{2}{7}$ livres de sel, on voit bien que ce mélange feroit une espece de pâte, que personne n'achéteroit pour du sel sec. Mais, comme dans des vases qui ont plus de hauteur, le sel s'y comprime par son propre poids, nous voyons par nos expériences que la différence peut aller depuis

463

463 jusqu'à 850, ou depuis 6 à 11, c'est à dire presque du simple au double. Ce qui fait voir, qu'en achetant ou en vendant le sel par mesure, on peut se tromper encore beaucoup plus fortement.

II. EXPERIENCES
sur la gravité spécifique des Saumures.

§. 15. Comme la gravité spécifique de l'eau augmente à mesure qu'il s'y trouve plus de sel, on se sert de cette circonstance dans les salines pour voir, si une Saumure contient assez de sel pour qu'il vaille la peine & les dépenses nécessaires pour l'en tirer par la coction. Ici il se présente différentes questions à discuter par des expériences. D'abord on peut demander, quel est le rapport entre la gravité spécifique des saumures & le sel qu'elles contiennent? Ce rapport suit-il la regle d'Archimede? Est-il le même pour des saumures de différentes salines? Enfin, quelles sont les variations que peuvent y causer les changemens du froid & du chaud? Les différentes especes de sel dont je me voyois pourvu, me firent naitre l'idée de faire des expériences rélatives à ces questions. Je fis les premieres au mois de Juillet 1765, dans une température de 15 degrés du Thermometre de M. de Réaumur, & je commencerai par les exposer.

§. 16. Il y a différens moyens de s'assurer du rapport entre la gravité spécifique d'une saumure, ou solution de sel, & le sel qui s'y trouve. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut demander, combien dans une livre de saumure il y a d'onces de sel? On peut pareillement demander, combien il y en a dans une pinte, dans un pot, ou dans telle mesure que l'on voudra? Mais, comme il s'agit toujours de commencer par comparer la gravité spécifique de la saumure à celle de l'eau douce, il s'agira de parler en cette matiere un langage indépendant des mesures & des poids de chaque pays, & qui par là même puisse être entendu & appliqué partout, c'est à dire qu'il faudra plutôt s'appliquer à déterminer les rapports, que les mesures & les poids absolus.

§. 17.

§. 17. Je pris donc une petite phiole avec un col fort étroit, & l'ayant remplie d'eau douce, je trouvai que cette eau pesoit 1128,3 grains. Ce volume & ce poids me tiendront lieu du volume & du poids d'une mesuré quelconque.

§. 18. Ensuite je pesai 300 grains de chacun de mes sels, & les ayant mis dans la phiole vuide, j'y versai de l'eau douce, jusqu'à ce qu'elle fut remplie. Je tâchois de faire cela aussi vite qu'il m'étoit possible, afin d'avoir la phiole remplie avant que le sel eût pu commencer à se dissoudre. De cette façon l'eau ne remplissoit que l'espace que le sel avoit laissé, & il est clair que le poids de toute la masse devoit surpasser le poids d'un volume égal d'eau douce, autant que ces 300 grains de sel surpassent un volume égal d'eau douce. Mais l'effet me fit voir, que je n'avois pu remplir la phiole assez vite, & que n'osant remuer le sel, il y restoit encore des bulles d'air, qui diminuoient le poids de la masse. Car ces 300 grains étant d'un même volume que 140 grains d'eau douce, il est clair que cet excès auroit du être de 160 grains. Or je trouvai le poids de la masse pour les sels

A	=	1286,2	=	1128,3	+	157,9.
B	=	1283,9	=	- - -	+	155,6.
C	=	1283,9	=	- - -	+	155,6.
D	=	1290,1	=	- - -	+	161,8.
E	=	1287,4	=	- - -	+	159,1.
F	=	1281,4	=	- - -	+	152,1.

Ainsi le sel F, qui donne 152,1, differe le plus de 160. Aussi ce sel ayant de très petits grains, avoit par la même raison de très petits interstices, desquels l'eau ne pouvoit si facilement chasser l'air qui s'y trouvoit. Il n'y avoit donc que les sels D, E, où la diminution du poids causée par les bulles d'air fût compensée par l'augmentation causée par la dissolution des floccons.

§. 19. Voyant donc que le résultat de ces expériences, quoique approchant de la vérité, n'étoit pas tel, que je pusse en con-

clure

clure avec assez de précision la gravité spécifique du sel même, je remuai ces masses jusqu'à ce que les sels furent entierement dissous. Ce qui étant fait, je trouvai que l'eau avoit considérablement baissé; je remplis donc la phiole en y versant de l'eau douce & en la remuant de nouveau; & comme cette eau douce, en se mêlant avec la solution, en diminua encore le volume de quelques gouttes, je les y versai de nouveau, & je continuai sur ce pied jusqu'à ce que je visse que la solution, quoique je la remuasse, ne diminuât plus de volume, mais que la phiole en étoit toute pleine.

§. 20. Ce qui étant fait, je trouvai le poids des solutions

A	=	1317,3	=	1128,3	+	189,0.
B	=	1317,8	=	- - -	+	189,5.
C	=	1315,2	=	- - -	+	186,9.
D	=	1316,4	=	- - -	+	188,1.
E	=	1315,8	=	- - -	+	187,5.
F	=	1316,4	=	- - -	+	188,1.

Quoiqu'il y ait dans ces nombres une différence de $2\frac{1}{2}$ grains, je la regarde comme nulle, puisqu'elle dérive d'une goutte de plus ou de moins, dont la phiole étoit trop ou trop peu remplie. Ainsi je prendrai comme terme moyen 188 grains. Nous aurons donc les nombres 1128,3; 1316,3 & 300, qui nous fournissent la regle que si, le poids de l'eau douce étant = 1128,3, celui de la saumure est 1316,3, le poids du sel dans cette saumure sera = 300.

§. 21. Si donc la regle d'Archimede avoit lieu, c'est à dire, si le poids du sel étoit proportionel à l'excès du poids de la saumure sur celui d'un volume égal d'eau douce, ce rapport feroit comme 300 à 188. On n'auroit donc qu'à faire cette simple analogie: comme 188 à 300, ainsi l'excès du poids de la saumure sur celui d'un volume égal d'eau douce est au poids du sel contenu dans ce volume de saumure.

§. 22. Mais, avant que d'examiner cette regle, il convient de faire une remarque sur le poids de ces solutions. Comme dans chacune il se trouve 300 grains de sel, & que le volume de ces 300 grains est le même que celui de 140 grains d'eau, il est clair qu'en suivant la regle d'Archimede en toute rigueur, le poids de ces solutions n'auroit du être que 1128,3 + 300 — 140 = 1288,3 grains. Car, à la place de 140 grains d'eau, Archimede substitue 300 grains de sel, comme étant d'un même volume. Otant donc 140 de 1128,3, & ajoutant ensuite 300, on a 1288,3, qui seroit le poids de la solution. Or les expériences nous donnent ce poids = 1316,3 grains. (§. 20.) Il faut donc qu'une bonne partie du sel se soit introduite dans les pores ou interstices de l'eau, de sorte que, sans en augmenter le volume, cette partie ait augmenté le poids de la solution.

§. 23. Pour trouver cette quantité de sel, qui s'est insinuée dans les pores de l'eau, considérons que dans les 1316,3 grains, que pesoit la solution, il y en avoit 300 de sels, lesquels étant soustraits de 1316,3, il reste le poids de l'eau douce = 1016,3 grains. Or le volume entier étoit égal à une masse d'eau douce de 1128,3 grains. Donc, soustrayant 1016,3 de 1128,3, il reste 112 grains, dont le volume d'eau douce dans la solution étoit moindre que le volume entier de la solution. Il s'ensuit qu'en dissolvant 300 grains de sel dans 1016,3 grains d'eau douce, ces 300 grains de sel augmentent le volume de cette eau douce d'une partie égale à 112 grains d'eau douce. Mais les 300 grains de sel occupent naturellement un volume égal à celui de 140 grains d'eau douce. Donc, comme 140 est à 300, ainsi 112 est à 240. Par conséquent, l'augmentation du volume de la solution n'est due qu'à 240 grains de sel, qui ne se sont point introduits dans les pores de l'eau. Il reste donc 60 grains, qui s'y sont introduits. Donc, en rapprochant ces conclusions, nous pourrons établir que, si dans 1016,3 grains d'eau douce on dissout 300 grains de sel, il y en aura 60 qui s'insinueront dans les pores de l'eau, & les autres 240 en augmenteront le volume.

§. 24.

§. 24. Cet énoncé se vérifie aisément. Car les 240 grains de sel occupent un espace égal à 112 grains d'eau douce, lesquels étant ajoutés à 1016,3 donnent 1016,3 + 112 = 1128,3, qui est le volume de la phiole, ou celui de la solution.

§. 25. Si donc on ne veut avoir égard qu'à l'augmentation du poids & du volume, ces 300 grains de sel ne pourront être comptés que pour 112 grains d'eau douce; ainsi, en suivant la regle d'Archimede, il faut considérer le sel dissous comme un corps, dont un volume égal à 112 grains d'eau douce pese 300 grains.

§. 26. Mais la grande question est, s'il en sera de même pour des solutions plus ou moins fortes, que celles dont nous avons tiré cette regle. C'est de quoi on a d'autant plus lieu de douter qu'on sait que dans une certaine quantité d'eau douce on ne sauroit dissoudre au delà d'une certaine quantité de sel, & que par conséquent le sel qui dans les solutions foibles s'insinue dans les pores ou interstices de l'eau douce, ne les dilate pas de façon que ces interstices en puissent admettre toujours davantage.

§. 27. Afin donc d'éclaircir tout cela par des expériences, je remuai de nouveau mes solutions & j'en versai la troisieme partie, de sorte qu'il m'en restoit les deux tiers, dans lesquels par conséquent il n'y avoit plus que 200 grains de sel. Je remplis la phiole d'eau douce, que je remuai bien avec la solution, afin d'avoir un volume égal d'une solution bien mêlée, qui n'eût plus que 200 grains de sel.

§. 28. Ce qui étant fait, je trouvai le poids de la solution

A	= 1259,6	=	1128,3	+	131,3.
B	= 1259,5	=	- - -	+	131,2.
C	= 1258,5	=	- - -	+	130,2.
D	= 1259,1	=	- - -	+	130,8.
E	= 1259,7	=	- - -	+	131,4.
F	= 1259,0	=	- - -	+	130,7.

 Nous

Nous pourrons donc prendre pour terme moyen 131 grains, dont le poids de ces solutions surpassoit celui d'un volume égal d'eau douce.

§. 29. Ainsi le poids de la solution étant = 1128, 3 + 131 = 1259, 3, j'en soustrais le poids du sel, qui est 200, & il reste 1059, 3 pour le poids de l'eau douce qui se trouvoit dans la solution. Or, le volume étant = 1128, 3, j'en ôte celui des 1059, 3 grains d'eau douce, & il reste 69 gr. pour l'augmentation du volume due aux 200 grains de sel, qui se trouvoient dans ces solutions. Or, le volume naturel de 200 grains de sel étant égal à celui de $93\frac{1}{3}$ grains d'eau douce, je dis: comme $93\frac{1}{3}$ est à 200, ou comme 7 est à 15, ainsi ces 69 grains sont à $147\frac{6}{7}$, ou (prenant nombre rond) à 148. Donc, en dissolvant dans 1059, 3 grains d'eau douce, 200 grains de sel, 148 grains de ce sel augmenteront le volume, & 52 grains s'insinueront entierement dans les pores de l'eau douce sans en augmenter le volume.

§. 30. Pour comparer ce résultat avec celui que nous avons tiré des solutions précédentes, nous n'aurons qu'à augmenter ces nombres 200, 148, 52 de la moitié, & nous aurons 300, 222, 78, de sorte que dans ce cas de 300 grains de sel, 78 s'insinuent dans les pores, & 222 augmentent le volume de l'eau douce, au lieu que dans les premieres solutions, de 300 grains il n'y en avoit que 60 qui s'insinuoient dans les pores, & 240 qui augmentoient le volume de l'eau douce.

§. 31. Cette comparaison des deux solutions fait voir que la regle d'Archimede n'y est point applicable. Afin donc de trouver comment elle doit être changée, je repris ces dernieres solutions, & après en avoir versé la moitié, je remplis la phiole d'eau douce, pour avoir une solution qui n'eût plus que 100 grains de sel. Ce que je fis avec les précautions prises pour les secondes solutions.

§. 32. Or le poids de ces solutions fut

A=

A	=	1195,4	=	1128,3	+	67,1.
B	=	1195,3	=	- - -	+	67,0.
C	=	1194,8	=	- - -	+	66,5.
D	=	1195,4	=	- - -	+	67,1.
E	=	1195,4	=	- - -	+	67,1.
F	=	1195,4	=	- - -	+	67,1.

D'où il suit, que le poids de ces solutions ne surpassoit que de 67 grains celui d'un volume égal d'eau douce.

§. 33. Comme donc le poids de la solution étoit = 1128,3 + 67 = 1195,3 gr., & celui du sel = 100 gr., il s'ensuit que le poids de l'eau douce a été = 1095,3 gr., par conséquent son volume de 1128,3 — 1095,3 = 33 gr. moindre que celui de la solution. Je dis donc: comme 7 à 15, ainsi 33 est à 70$\frac{4}{7}$. Donc, en dissolvant dans 1095,3 grains d'eau douce 100 grains de sel, il y aura 70$\frac{4}{7}$ gr. de ce sel, qui augmenteront le volume de la solution, & les autres 29$\frac{3}{7}$ gr. s'insinueront dans les interstices de l'eau sans augmenter le volume.

§. 34. Pour comparer ce résultat avec ceux des solutions précédentes, nous n'aurons qu'à tripler les nombres 100, 70$\frac{4}{7}$, 29$\frac{3}{7}$, & ils se changent en 300, 211$\frac{5}{7}$, 88$\frac{2}{7}$, de sorte que, dans ce cas, de 300 grains de sel il y en aura 88$\frac{2}{7}$ qui s'insinueront dans les interstices de l'eau, au lieu que, dans les secondes solutions, il n'y en avoit que 78, & dans les premieres 60.

§. 35. Nous voyons de là que la quantité de sel qui s'insinue dans les pores de l'eau n'est point proportionelle à celle qui se trouve dans les solutions, mais que cette proportion diminue à mesure que la solution est plus forte. Comme dans ces comparaisons nous avons réduit toutes les solutions à 300 grains de sel, il faudra faire la même réduction à l'égard de l'eau douce, en augmentant de la moitié celle des secondes solutions, & en triplant celle des troisiemes, ce qui donne la table suivante.

Eau douce.	Sel insinué dans les pores.	Sel non-insinué dans les pores.	Somme.
1128,3	60	240	300.
1589,0	78	222	300.
3285,9	88 2/7	211 5/7	300.

D'où il paroit que, quoiqu'on dissolve une quantité égale, c'est à dire 300 grains de sel, dans des masses de 1128, 1589 & 3286 grains d'eau douce, la quantité du sel qui s'insinue dans les pores n'est que de 60, 70, 88 2/7 grains, & que par conséquent cette quantité croît beaucoup plus lentement que celle de l'eau, & partant aussi plus lentement que celle du nombre des pores dans lesquels le sel s'insinue.

§. 36. Mais, afin de voir plus clair en tout cela, je fis une solution des plus fortes, & l'ayant fait cuire sur le feu, jusqu'à ce qu'elle commençât à produire des crystaux, je l'exposai à l'air pour lui laisser prendre le degré de la température de l'air; après quoi j'en remplis la phiole, & j'en trouvai le poids de 1359,1 grains, de sorte qu'il surpassoit celui d'un volume égal d'eau douce de 1359,1 — 1128,3 = 230,8 grains. Ensuite, j'en tirai le sel par une coction fort lente, & l'ayant bien séché, il se trouva être de 379,5 grains.

§. 37. Ayant donc de cette façon une solution absolue, qui contenoit tout le sel qu'elle pouvoit contenir, je fis là-dessus le même calcul que j'avois fait sur les solutions précédentes. D'abord, soustrayant du poids de la solution 1359,1 celui du sel 379,5, je trouvai celui de l'eau douce = 979,6; d'où je conclus que, si dans la température du 15 degré du thermometre de M. de Réaumur on mêle 979,6 grains d'eau douce avec 379,5 gr. de sel, on obtient une solution complette ou saturée. Or ces nombres sont à très peu près comme 80 à 31, ou comme 5 à 2, de sorte que la plus forte solution contiendra 5 grains d'eau douce contre 2 grains de sel.

§. 38. Mais le volume de l'eau douce 979,6 étant plus petit que celui de la solution 1128,3 de la quantité 1128,3 — 979,6 = 148,

148,7; cet eſpace eſt rempli de ſel. Faiſant donc: comme 7 à 15, ainſi 148,7 eſt à 317$\frac{3}{14}$, on trouve, que des 379$\frac{1}{2}$ gr. de ſel qui ſe trouvent dans 979,6 gr. d'eau douce, il y en a 317$\frac{3}{14}$ qui en augmentent le volume, & les autres 62$\frac{2}{7}$ gr. s'inſinuent dans les pores ou interſtices de l'eau.

§. 39. Comme cette ſolution eſt complette, il s'enſuit, que l'eau échauffée juſqu'au 15 degré du thermometre de M. de Réaumur, n'en ſauroit contenir d'avantage. J'en infere donc que, dans cette température, 979$\frac{1}{2}$ grains d'eau douce peuvent contenir dans les interſtices de cette eau 62$\frac{2}{7}$ gr. de ſel, mais que, pour faire qu'elles les contiennent, il y faut joindre encore 317$\frac{3}{14}$ autres grains de ſel. Cette derniere reſtriction eſt néceſſaire, parce que ſi on ne vouloit diſſoudre que les 62$\frac{2}{7}$ grains de ſel, il n'y en auroit qu'à peine 15 ou 20 grains qui s'inſéreroient dans les pores de l'eau. Car les expériences précédentes nous font voir que, quelque foible que ſoit la ſolution, il n'y a jamais que le tiers ou le quart du ſel, qui s'inſinue dans les pores de l'eau.

§. 40. Cette circonſtance fait, qu'on ne peut pas conſidérer le ſel comme diſſoluble à l'infini. Car, ſi on pouvoit admettre cette ſuppoſition, il s'enſuivroit que, dans les ſolutions moins fortes, tout le ſel s'introduiroit dans les interſtices de l'eau; ce dont les expériences précédentes nous montrent tout le contraire, puiſqu'elles nous font voir, que non ſeulement le ſel ne s'y introduit pas entierement, mais auſſi, que la quantité qui s'y introduit, n'eſt proportionelle, ni au nombre des pores ou à la quantité de l'eau douce, ni à la quantité du ſel qui s'y trouve.

§. 41. Si donc dans 979$\frac{1}{2}$ grains d'eau douce il faut diſſoudre 379$\frac{1}{2}$ grains de ſel, pour que 62$\frac{2}{7}$ gr. en rempliſſent les interſtices, il paroit que le ſurplus, qui eſt de 316$\frac{3}{14}$ gr., eſt employé pour dilater les interſtices de l'eau, afin qu'ils puiſſent contenir les 62$\frac{2}{7}$ gr. de ſel. En effet, ces 316$\frac{3}{14}$ grains de ſel ne font qu'augmenter le volume

lume de la solution; & comme ils s'y trouvent parsemés & soutenus par les forces de la cohésion de l'eau, il est évident qu'ils en séparent les particules, & que par là ils dilatent les interstices de l'eau. Il paroit de là qu'il doit y avoir un certain rapport entre la figure & la grosseur des parcelles élémentaires du sel, & la figure & la grandeur des interstices de l'eau douce. Mais ces expériences n'offrent pas assez de données pour déterminer ce rapport, puisqu'il dépend tout au moins de quatre circonstances, je veux dire, de la figure & de la grandeur des parcelles salines, aussi bien que de la figure & de la grandeur des interstices de l'eau douce.

§. 42. Comme chaque solution a quelque chose de particulier, il convient de rechercher, de quelle façon ces différens rapports peuvent être rapprochés & présentés d'une façon qui les embrasse généralement. Pour cet effet, nous n'aurons qu'à chercher le rapport entre la quantité de sel, qui se trouve dans les solutions & le nombre de grains, dont le poids de la solution surpasse celui d'un même volume d'eau. En consultant là-dessus nos expériences, elles nous donnent les résultats suivans.

Poids du sel		Poids de la solution		
0	- - -	1128,3	+	0.
100	- - -	1128,3	+	67.
200	- - -	1128,3	+	131.
300	- - -	1128,3	+	188.
380	- - -	1128,3	+	231.
x	- - -	1128,3	+	y.

Planche I. J'ai représenté ces nombres dans la quatrieme figure, où l'on voit, que la courbe qui passe par les points des ordonnées est fort uniforme, & que sa courbure n'est que de quelques degrés. Comme donc nous avons quatre valeurs de x & de y, nous n'aurions qu'à appliquer à ces nombres les quatre premiers termes d'une suite

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$$

afin

afin de déterminer les coëfficiens a, b, c, d. Mais j'ai trouvé qu'on peut très bien se contenter des deux premiers termes, en faisant

$$y = 0,6963\, x - \frac{xx}{4298}.$$

Ainsi, par exemple, on trouvera pour

$x = 100$	$y = 67,3$
$= 200$	$= 130,0$
$= 300$	$= 188,0$
$= 380$	$= 231,0.$

Et pour $x = 380$, on trouve la position de la tangente CT, $dy : dx = 0,5195$.

§. 43. Cette tangente se trouve encore d'une autre maniere. Comme elle répond au point de la solution complette, & que l'équation trouvée la donne moyennant les solutions moins fortes, nous pourrons encore la déterminer au moyen des solutions qui sont, pour ainsi dire, plus que complettes, c'est à dire, dans lesquelles il y a plus de sel, que l'eau douce ne peut dissoudre.

§. 44. Soit donc la quantité entiere de sel $= a$, la partie dissoute $= \xi$, il restera $a - \xi$ grains, qui n'ayant point été dissous tombent au fond de la phiole, & ne font qu'augmenter le volume. Or, pour trouver le poids d'une solution complette qui contienne ξ grains de sel, la derniere expérience nous fait voir que pour 380 gr. la solution pese 1359 grains. Donc, pour ξ grains, elle pesera $= \frac{1359}{380}\,\xi$ grains. Ce poids doit encore être augmenté des $a - \xi$ grains de sel, qui n'ont point été dissous; donc tout le poids sera $= a - \xi + \frac{1359}{380}\,\xi = s$.

§. 45. Maintenant, pour trouver le volume, nous aurons d'abord $\frac{7}{15}(a - \xi)$ pour celui du sel non-dissous; ensuite, la derniere expérience nous fait voir que 380 gr. de sel demandent un volume de 1128, 3 gr., & partant le volume requis pour ξ grains, sera =

$= \frac{1128,3}{380} . \xi$; donc le volume entier $= \frac{7}{15}(a - \xi) + \frac{1128,3}{380}\xi$, qui doit être égal à celui de la phiole $= 1128,3$. En résolvant donc cette équation, on trouve

$$\xi = 450,9 - 0,1865\, a.$$

Or, comme a doit être plus grand que 380, puisque la solution est plus que complette, en faisant $a = 380 + b$, on trouve

$$\xi = 380 - 0,1865 . b,$$

& partant le poids entier

$$\varpi = 1359,1 + 0,5195 . b.$$

Or 1359,1 est le poids de la solution complette; donc la solution qui aura b grains de sel de plus, aura $0,5195 . b$ grains de plus de poids. Donc il sera $dy : dx = 0,5195$, comme ci-dessus. (§. 42.)

§. 46. Cette derniere équation nous fait voir que la courbe, dont les abscisses sont x, les ordonnées y, finit là où x est $= 380$, & que depuis ce point elle suit la direction de sa tangente, de sorte que, dès que la solution contient plus de sel qu'elle n'en a pu résoudre, le surplus de son poids est proportionel au surplus du sel. L'équation trouvée

$$y = 0,6963\, x - \frac{xx}{4298},$$

nous fait voir, qu'il n'en est pas de même pour les solutions moins fortes. Mais voyons maintenant les différens usages que nous pourrons faire de cette équation.

§. 47. D'abord, comme cette équation se rapporte à une solution dont le volume est égal à celui de 1128,3 grains d'eau douce, nous la changerons en une autre, qui réponde à une solution dont le volume soit égal à un volume d'eau douce de 1000 grains; ce qui se fera en multipliant le dernier terme $xx : 4298$ par 1,1283. La nouvelle équation sera donc

$y =$

$$y = 0{,}6963\,x - \frac{xx}{3810}.$$

Et le poids de la solution sera

$$z = 1000 + 0{,}6963 \,.\, x - \frac{xx}{3810}.$$

Cette équation nous fournit la table suivante.

Poids du sel x	Poids de la solution z	Poids du sel x	Poids de la solution z	Poids du sel x	Poids de la solution z
0	1000	120	1080	240	1152
10	1007	130	1086	250	1158
20	1014	140	1093	260	1163
30	1021	150	1099	270	1169
40	1027	160	1105	280	1175
50	1034	170	1111	290	1180
60	1041	180	1117	300	1185
70	1047	190	1123	310	1191
80	1054	200	1129	320	1196
90	1060	210	1135	330	1201
100	1067	220	1141	336,8	1204,7
110	1073	230	1146	—	—

§. 48. Le premier usage qu'on pourra faire de cette table, sera de déterminer, combien il y a de sel dans une saumure proposée quelconque. On prendra pour cet effet une mesure quelconque, p. ex. une pinte, un pot, un pied cube &c.; on la remplira de la saumure & on en trouvera le poids. Ensuite, on remplira la même mesure d'eau douce afin d'en trouver le poids. Ce qui étant fait, tout le calcul qu'il y aura à faire, reviendra à deux regles de trois. On dira d'abord: comme le poids de l'eau douce est à celui de la saumure, ainsi est 1000 à un quatrieme nombre z, que l'on trouvera en achevant cet-

 te

te regle de trois. On cherchera ce nombre dans la seconde colonne de la table que nous venons de donner, & on trouvera dans la premiere colonne le nombre correspondant x, en se servant en tout cas de la partie proportionelle, lorsque le nombre trouvé z tombe entre deux nombres de la seconde colonne de la table. Ensuite on dira: comme le nombre z est au nombre x, ainsi est le poids donné de la saumure au poids du sel qui s'y trouve.

§. 49. Supposons p. ex. qu'un pied cube d'eau douce pese 63 livres, & que le même pied cube de saumure pese 74 livres. On inférera d'abord: comme 63 est à 74, ainsi 1000 est à 1175. Cherchant donc ce nombre dans la seconde colonne, on trouvera le nombre correspondant 280. On dira donc: comme 1175 est à 74, ou bien, comme 1000 est à 63, ainsi 280 est à $17\frac{2}{3}$. Donc le pied cube de cette saumure contiendra $17\frac{2}{3}$ livres de sel.

§. 50. Ensuite, nous pourrons nous servir de cette Table pour faire une solution d'une gravité spécifique donnée, à condition cependant qu'elle soit plus petite que celle de la solution absolue ou complette. Pour cet effet, on posera la gravité spécifique de l'eau douce $= 1000$, & on déterminera par ces mêmes unités la gravité spécifique de la solution. Ce qui étant fait, on cherchera ce nombre dans la colonne z, & on trouvera le nombre correspondant x dans la colonne x. Or, comme z marque le poids de la solution, & x celui du sel qui s'y trouve, on soustraira le nombre x du nombre z, & le reste marquera le poids de l'eau douce qui se trouve dans la solution. Soit p. ex. la gravité spécifique de la solution proposée $= 1100 = z$. On trouvera le nombre correspondant $x = 152$, d'où l'on obtient $z - x = 948$, de sorte que pour faire cette solution il faut mêler 152 grains de sel avec 948 grains d'eau douce.

§. 51. Quand on a une saumure foible, & qu'on veut savoir combien il faut en faire évaporer jusqu'à ce qu'elle commence à produire des crystaux, on peut également se servir de cette table. On cher-

cherchera d'abord la gravité spécifique de la solution, celle de l'eau douce étant posée $= 1000$. On cherchera ensuite ce nombre dans la colonne z, & on trouvera dans la colonne x le poids du sel qui s'y trouve. Or, puisque la solution complette pesant 1204,7 gr. il s'y trouve 336,8 gr. de sel, on dira: comme 336,8 est à 1204,7, ainsi est x à $\frac{1204,7}{336,8}x$, qui marque le poids auquel le poids z doit être réduit par l'évaporation; il faudra donc en faire évaporer $z - \frac{1204,7}{336,8}x$ gr.

§. 52. Supposons p. ex. la gravité spécifique de la solution proposée $z = 1100$; il s'y trouvera donc $x = 152$ gr. de sel. Donc il sera

$$\frac{1204,7}{336,8}x = 543.$$

$$z - 543 = 557. \text{ gr.},$$

de sorte que de 1100 gr. de la solution proposée il faut en faire évaporer 557, ce qui fait environ la moitié.

§. 53. Si par contre on veut déterminer la diminution du volume de la solution, on n'aura qu'à remarquer que le volume d'une solution complette est 1000, lorsqu'il s'y trouve 336,8 gr. de sel; car les poids de la colonne z sont tous réduits à ce volume. On dira donc, comme 336,8 est à 1000, ainsi est le poids trouvé $x = 152$ à 451. Donc, si le volume de la solution proposée est compté être $= 1000$, il doit se réduire par l'évaporation à 451, si on veut la changer en une solution complette. Il faudra donc en faire évaporer $1000 - 451 = 549$ parties. On voit par là, que le volume diminue plus fortement que le poids.

§. 54. Si on achete le sel au poids, & qu'il soit fort humide; trouver combien il y a d'humidité, & combien par consé-

quent on achete moins de sel, que s'il étoit bien sec. Notre table nous fournit encore la solution de ce probleme, & même en autant de manieres différentes qu'elle contient de nombres. Nous nous attacherons au cas où 300 grains de sel sec donnent une solution dont le poids est 1185 grains, le volume étant égal à celui de 1000 gr. d'eau douce. Prenez donc 300 grains de votre sel humide; en y versant 885 gr. d'eau douce, vous aurez une solution dont le poids sera de 1185 grains, & dont le volume seroit égal à celui de 1000 grains d'eau douce, si le sel étoit bien sec, mais qui sera plus grand, puisque l'humidité occupe plus d'espace que le sel. Afin donc de trouver la différence, prenez une petite phiole dont le col soit fort étroit, & la remplissant également d'abord de l'eau douce, ensuite de votre solution bien remuée, vous chercherez le poids de l'une & de l'autre. Vous direz ensuite: comme le poids de l'eau douce est à celui de la solution, ainsi est 1000 à un quatrieme nombre z, lequel étant trouvé, vous verrez de combien il est plus petit que 1185, que vous auriez trouvé si votre sel avoit été bien sec. Supposons p. ex. que vous n'ayez trouvé que 1180; cherchant donc ce nombre dans la colonne z, vous trouverez à côté le nombre $x = 290$. Mais, comme votre solution en tout pesoit 1185, vous direz: comme 1180 est à 1185, ainsi est 290 à $291\frac{1}{4}$. Ce qui vous fera voir que, tandis qu'on vous pese 300 grains de votre sel humide, il ne s'y trouve réellement que $291\frac{1}{4}$ gr. de sel, & qu'il y a $8\frac{3}{4}$ gr. d'humidité, qui s'évaporeront dès que vous vous mettrez à sécher votre sel. Si donc on vouloit prendre la chose à toute rigueur, il est clair que dans cet exemple il faudroit diminuer le prix du sel dans le rapport de 300 à 29[illegible] ce qui seroit près de 3 pour cent, ou bien il faudroit donner un surplus de poids dans le rapport de $291\frac{1}{4}$ à 300. Il y a des cas où l'humidité est encore plus considérable.

III. RE-

III. *REMARQUES*
sur les différentes manieres d'estimer la bonté des saumures.

§. 55. Quand on parle de la bonté des saumures, le discours roule principalement sur la quantité de sel qui s'y trouve, & il est clair que la différence du langage qu'on peut tenir là-dessus dépend des différentes manieres d'estimer cette quantité du sel. Il y a des salines, où on met pour base la solution complette. On divise le degré absolu de salure en 32 degrés, de sorte qu'une saumure du 16me degré ne contient que la moitié du sel de la saumure complette. Cette façon de déterminer les degrés de salure me paroit fort indécise, en ce qu'il faut encore déterminer, si la saumure, le sel qui s'y trouve, & l'eau douce qu'elle contient, doit être mesurée ou pesée, & laquelle de ces trois quantités y est mise pour base. Mais, quoiqu'il y ait moyen de s'entendre là-dessus, il reste une autre difficulté, qui ne se leve pas si facilement, c'est que ce qu'on appelle saumure complette est fort sujet à variation. On sait que l'eau qui est prête à geler ne dissout presque plus de sel, & que l'eau bouillante en dissout la plus grande quantité. Une saumure qui se refroidit, dépose une partie de son sel; & cette quantité est plus grande que celle de l'eau qui s'évapore par le refroidissement. Comme donc par là la saumure s'affoiblit, il est clair que le degré de salure d'une solution complette dépend de sa chaleur, & que par conséquent on ne sauroit le fixer à moins qu'on n'établisse un certain degré de chaleur, ce qui étant trop incommode, il vaudra mieux abandonner cette façon de désigner les degrés de salure.

§. 56. Quant aux autres manieres dont on se sert, il sera plus sûr & plus convenable d'estimer le sel par son poids, que de le mesurer, puisque la mesure du sel est trop variable, & qu'une même mesure en contient plus ou moins, suivant que le sel a des crystaux réguliers ou des floccons irréguliers. Par contre le sel étant bien sec, un même poids de sel nous en donne toujours la même quantité, dès qu'il est également épuré des matieres terrestres.

§. 57.

§. 57. La saumure peut être pesée ou mesurée indifféremment. Mais, quand on dit qu'une livre d'une saumure contient deux fois plus de sel qu'une livre d'une autre saumure, ce langage n'est pas le même que quand on dit, qu'une mesure de saumure contient deux fois plus de sel, qu'une même mesure d'une autre saumure. La table que nous avons donnée ci-dessus, se rapporte à des volumes égaux à celui de 1000 grains d'eau douce. Prenons en conséquence deux saumures, dont l'une ait 150 gr., l'autre 300 gr. de sel. La table nous montre que le poids de la premiere sera 1099, celui de l'autre = 1185. Ainsi, quoique la mesure soit la même, les poids different comme 1099 de 1185. Si donc on veut réduire ce dernier poids au premier, il faudra également diminuer les 300 gr. dans le rapport de 1185 à 1099, ce qui ne donneroit que 278¼: ainsi la quantité de sel ne seroit plus que comme 150 à 278¼.

§. 58. Comme donc ces deux langages different réellement, on ne sauroit les substituer l'un à l'autre, sans faire une réduction semblable à celle que je viens de faire; & cette réduction est d'autant plus nécessaire, que dans l'évaporation le volume de la saumure diminue plus fortement que son poids, & que les fraix & le tems nécessaires se comptent mieux d'après la diminution du volume, que d'après celle du poids.

§. 59. Si donc on estime la quantité de saumure par la mesure, & celle du sel par son poids, on n'aura qu'à déterminer une fois pour toutes, de quelle mesure & de quel poids on veut faire usage, & la table donnée ci-dessus y pourra être accommodée sans peine. Pour cet effet, on remplira la mesure d'eau douce, & après avoir pesé cette eau, on divisera ce poids en 1000 parties. Ce qui étant fait, chacune de ces parties vaudra une unité des nombres que la table présente.

§. 60. Supposons p. ex. que la mesure soit une pinte, qui puisse contenir 30 onces d'eau douce. On dira: comme 1000 est à 30,

30, ainſi eſt chaque nombre de la table à un quatrieme nombre, que l'on trouvera, & qui étant ſubſtitué au nombre de la table, transforme cette table en une autre, qui ſera directemement applicable à la meſure & au poids dont on ſe ſert. Ainſi p. ex. au lieu de $x = 200$ & $z = 1129$, on trouvera $x = 3$ & $z = 33\frac{87}{100}$; ce qui veut dire, qu'une pinte de ſaumure peſant $33\frac{87}{100}$ onces, il s'y trouve 3 onces de ſel.

§. 61. La maniere de déterminer ou de déſigner la bonté de la ſaumure par le poids du ſel contenu dans un certain poids de ſaumure, par ex. dans une livre, n'eſt pas ſi commode. Car il faut toujours commencer par le volume, afin de trouver combien la gravité ſpécifique de la ſaumure ſurpaſſe celle de l'eau douce, puiſque c'eſt par là qu'on trouve le poids du ſel contenu dans ce volume, & ce n'eſt qu'après avoir fait cela, qu'on peut comparer le poids de la ſaumure avec le poids du ſel qui s'y trouve.

§. 62. Mais, ſi avec tout cela on veut ſe ſervir de la comparaiſon de ces poids, la table que nous avons donnée ci-deſſus, y ſervira pareillement. Car, quoiqu'elle ſe rapporte à un même volume, on pourra toujours faire l'analogie: comme chaque nombre z eſt à ſon nombre correſpondant x, ainſi eſt une livre de ſaumure à un quatrieme nombre qui marquera le poids du ſel contenu dans cette livre de ſaumure.

IV. REMARQUES
ſur les Inſtrumens dont on ſe ſert pour trouver la bonté des Saumures.

§. 63. Après tout ce que je viens de dire, il ne ſera pas difficile de déterminer la diviſion des inſtrumens dont on ſe ſert pour trouver la bonté des ſaumures & de les accommoder à ce but. On ſait que ces inſtrumens ſont les mêmes que ceux qu'on emploie pour déterminer la gravité ſpécifique des matieres liquides. Il ſuffira donc de les conſtruire & de les graduer en ſorte que la gravité de l'eau douce

douce ſoit comptée = 1000, & qu'on puiſſe encore s'en ſervir pour les ſaumures les plus fortes. Ce qui étant fait, ils indiqueront la gravité des ſaumures en des nombres qui ſeront les mêmes que ceux de la colonne *z* de notre table; & on trouvera le nombre répondant *x*, qui marquera le poids du ſel qui ſe trouve dans un volume égal à celui de 1000 grains d'eau douce.

§. 64. Mais, ſi on veut accommoder ces inſtrumens à une certaine meſure, de ſorte qu'ils indiquent immédiatement le poids abſolu du ſel que cette meſure de ſaumure contient, on fera d'abord la réduction de la table que j'ai indiquée ci-deſſus, (§. 59. 60.) & au lieu des nombres *z*, que l'inſtrument marque dans le cas du §. 63. on mettra le nombre *x* réduit, & de cette façon l'inſtrument l'indiquera immédiatement.

§. 65. Cependant on ne ſauroit diſconvenir que preſque tous ces inſtrumens n'ayent quelque défaut d'exactitude plus ou moins conſidérable. Mais, dès qu'il ne s'agit que de ſavoir à très peu près combien une ſaumure contient de ſel, on pourra aſſez exactement les accommoder à ce but. Celui qu'on peut ſe procurer le plus aiſément, & qui peut-être eſt auſſi le plus exact, c'eſt une phiole qui ait un col fort étroit. Comme je m'en ſuis ſervi pour les expériences rapportées ci-deſſus, il n'en faudra pas d'avantage pour en connoître l'uſage.

§. 66. Le plus ordinaire de ces inſtrumens, c'eſt un cylindre étroit, qui a, à l'un de ſes bouts, une boule remplie de quelques poids, & qui étant plongé dans la ſaumure, s'y enfonce d'autant moins, que la ſaumure ſera plus peſante ſpécifiquement. Comme la ſaumure la plus ſalée n'eſt à l'eau douce qu'en raiſon de 5 à 6, il s'enſuit que le poids de cet inſtrument étant tant ſoit peu plus grand que celui d'un volume égal d'eau douce, le volume du cylindre doit être un peu plus grand que la cinquieme partie de tout le volume de l'inſtrument, de ſorte qu'en obſervant ces deux conditions, on pourra faire le cylindre de telle longueur que l'on jugera convenable, tant pour la commodité que pour avoir une graduation qui ne ſoit pas trop ſerrée. Mais il ſera tou-

toujours néceſſaire de faire que le cylindre ſoit aſſez léger pour que le centre de gravité de l'inſtrument ne ſoit jamais au deſſus de la ſurface de la ſaumure, puiſque ſans cela l'inſtrument, au lieu de ſe tenir dans une ſituation verticale, ſe renverſeroit. On obvie à cet inconvénient, ſoit en prolongeant le cylindre, ſoit en joignant à la grande boule une plus petite, qui ſoit remplie des poids dont l'inſtrument doit être chargé pour le mettre en équilibre avec l'eau douce.

§. 67. Comme la plûpart de ces inſtrumens ſont diviſés, ſoit arbitrairement, ſoit en degrés égaux, & que pour les bien graduer il faudroit en meſurer exactement le volume, ce qui n'eſt pas toujours ſi facile à faire, il ne ſera pas hors de propos d'entrer là deſſus en quelque détail. Soit donc cet inſtrument AB, que je ſuppoſe fait conformément aux conditions que je viens de dire. Peſez-le exactement, & notez la ſixieme partie de ſon poids. Ce qui étant fait, plongez-le dans l'eau douce. Soit A le point où il s'enfonce. Suſpendez-le enſuite au baſſin d'une balance, & mettez dans l'autre baſſin cette ſixieme partie du poids que vous avez notée. Plongez-le de cette façon dans la même eau douce, pour trouver juſqu'à quel point il s'enfonce. Soit ce point B. Voici maintenant l'uſage qu'il faudra faire des deux points A, B, que vous avez trouvés. Planche I. Fig. 1.

§. 68. D'abord je remarque, que le volume AB enfoncé librement dans l'eau douce eſt égal à un volume de cette eau, qui eſt du même poids que l'inſtrument. Et de la même maniere, le volume BC eſt égal à celui d'une maſſe d'eau douce qui peſe les $\frac{5}{6}$ du poids de l'inſtrument. Donc le volume de la partie AC du cylindre eſt égal à celui d'une maſſe d'eau douce, qui peſe un $\frac{1}{6}$ du poids de l'inſtrument. Ainſi le volume BA eſt égal à celui de 6 cylindres AC, & partant les volumes AB, CB, ſeront comme 6 à 5. Suppoſons donc qu'il y ait une ſaumure dans laquelle l'inſtrument ne s'enfonce que juſqu'au point B, je dis que la gravité ſpécifique de cette ſaumure ſera à celle de l'eau douce comme 6 à 5, c'eſt à dire en raiſon réciproque des eſpaces. Car la maſſe BC de la ſaumure peſe autant que la maſſe BA

 de

de l'eau douce, puisque chacune est du même poids que l'instrument. Si donc en A on marque la gravité spécifique de l'eau douce $= 1000$, on marquera en C le nombre $\frac{6}{5} . 1000 = 1200$, comme désignant la gravité spécifique de la saumure.

§. 69. Ces deux points étant donc désignés, nous trouverons les points répondants à une solution ou saumure quelconque. Car leurs gravités spécifiques étant réciproquement comme les espaces, on comptera l'espace BC $= 5$, BA $= 6$, AC $= 1$, & on divisera AC en parties décimales, qui se compteront de C vers A. Si donc on veut trouver le point répondant à la saumure, dont la gravité spécifique est $= 1100$, on dira: comme 1100 est à 1200, ainsi est 5 à 5,454 . . . Portant donc 0,454 . . . parties de C en M, on trouvera le point M, où l'on écrira 1100, comme étant la gravité spécifique de la saumure proposée.

§. 70. En procédant de cette façon, l'instrument marquera les nombres z de notre table, & on pourra également y marquer les nombres répondans x, aussi bien tels qu'ils se trouvent dans la table, que lorsqu'on les aura réduits à quelque mesure & poids absolus en suivant les regles des §. 59. 60. Du reste on suppose que la partie CA soit exactement cylindrique. Car, si le diametre n'étoit pas partout le même, il vaudroit mieux déterminer tous les points M méchaniquement; ce qui se feroit de la même maniere que nous avons trouvé le point C. Je n'ai pas besoin d'avertir que la partie CA peut avoir une figure parallélépipede quelconque, parce qu'il suffit qu'elle soit partout d'une même épaisseur.

Fig. 2. §. 71. Dans quelques salines on donne à cet instrument une figure conique BA, apparemment parce que les ouvriers, qui les font de léton ou de fer blanc, font plus facilement un cone qu'ils ne font un cylindre exact, ou des figures partie cylindriques partie sphériques. Ces cones sont ordinairement faits de façon, que dans l'eau douce ils s'enfoncent jusqu'à la pointe A. Mais, si la façon en est facile, il n'en est pas de même de la graduation; à moins qu'on ne veuille la faire mé-

méchaniquement. Voyons cependant de quelle maniere on pourra s'y prendre.

§. 72. D'abord on pesera l'instrument, & on notera la sixieme partie de son poids. Ensuite on le plongera dans l'eau douce. Supposons qu'il s'y enfonce jusqu'au point C. Suspendez-le ensuite au bassin d'une balance, & en mettant dans l'autre bassin la sixieme partie de son poids que vous avez notée, plongez-le dans la même eau douce, pour trouver jusqu'à quel point il s'y enfoncera. Soit ce point D. Comme ce procédé est le même que le précédent, (§. 67.) il est clair que le point C répondra à la gravité spécifique $= 1000$, & le point D à celle qui est $= 1200$. Le volume BD étant posé $= 5$, le volume BC sera $= 6$; donc le volume du cone tronqué CD sera $= 1$. Comme les volumes AC, AD, sont en raison des cubes de AC, AD, le volume du cone tronqué sera en raison de la différence des cubes de AD, AC.

§. 73. Soit donc M un point intermédiaire quelconque, le volume du cone tronqué MD sera pareillement en raison de la différence des cubes de AD, AM. Divisant donc cette différence par la différence des cubes de AD, AC, on trouvera les parties décimales qui répondent au volume du cone tronqué MD, & ajoutant ensuite ces parties décimales au volume BD $= 5$, on aura le volume BM. Or, les gravités spécifiques étant réciproquement comme les volumes, on dira: comme le volume BM est au volume BD $= 5$, ainsi est 1200 à la gravité spécifique qui répond au point M.

§. 74. Voilà donc la solution directe par laquelle on trouve la gravité spécifique pour un point M quelconque donné. Mais si, la gravité étant donnée, il s'agit de trouver ce point M, on commencera par la derniere analogie, en disant: comme la gravité spécifique proposée est à 1200, ainsi est le volume BD $= 5$ à un quatrieme nombre, qui marquera le volume BM, & dont on soustraira le volume BD $= 5$, pour avoir celui du cone tronqué DM. Ensuite on dira: comme le volume $= 1$ du cone tronqué CB est au volume du cone

 tron-

tronqué MD qu'on vient de trouver, ainſi eſt la différence des cubes de AD, AC, à la différence des cubes de AD, AM. Ayant donc trouvé cette différence, on la ſouſtraira du cube de AD, pour avoir le cube de AM. Par là on trouvera AM moyennant l'extraction de la racine cubique.

§. 75. Une formule algébrique préſentera ces deux ſolutions ſous un ſeul coup d'œil. Soit g la gravité ſpécifique qui répond au point M, on aura pour la premiere ſolution

$$g = 6000 : \left(5 + \frac{AD^3 - AM^3}{AD^3 - AC^3}\right),$$

& pour la ſeconde

$$AM^3 = AD^3 - (AD^3 - AC^3) \cdot \left(\frac{6000}{g} - 5\right).$$

§. 76. Ces formules s'abregent pour le cas où le cone, étant plongé dans l'eau douce, s'enfonce juſqu'à la pointe A. Car alors il eſt CA = 0, & on aura

$$g = 6000 \cdot AD^3 : (6AD^3 - AM^3)$$

$$AM^3 = AD^3 \left(6 - \frac{6000}{g}\right).$$

Les nombres g, qu'on trouvera de cette façon, ſont ceux de la colonne z de la table. Cette table fournira donc les nombres correſpondans x, qui marquent le poids du ſel contenu dans un volume de ſaumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce.

§. 77. Quelquefois on ſe ſert auſſi d'un globe qui ait plus de gravité ſpécifique que le liquide dont on veut déterminer la gravité ſpécifique. On ſuſpend ce globe à une balance, & en le plongeant dans la ſaumure, on obſerve combien il peſe, & combien par conſéquent il a perdu de ſon poids. La perte qu'il en fait dans l'eau douce étant comptée pour 1000, celle qu'il en fait dans la ſaumure ſera exprimée dans ces mêmes parties; & par là on aura pareillement les nom-

nombres de la colonne *z* de notre table, & la table fournira les nombres correſpondans *x*. Dans ce cas, il ſuffira que le poids du globe excede d'une 5ᵉ partie celui d'une maſſe égale d'eau douce. Mais comme, en ſe ſervant d'une balance ordinaire, on eſt obligé de calculer la peſanteur ſpécifique, il ſera bon d'imaginer quelqu'autre inſtrument qui tienne lieu de balance, & qui marque immédiatement la gravité ſpécifique de la ſaumure & le poids du ſel qui s'y trouve. Or il y a pluſieurs moyens d'accommoder à ce but les leviers angulaires. Je ne m'arrêterai donc qu'à la deſcription d'un ſeul.

§. 78. Soit AE une poulie, à laquelle ſoit affermi le bras AB, avec le quart de cercle ou l'arc BC, dont le centre ſoit le même que celui de la poulie. L'arc BC doit être fort léger; par contre on fera le bras AB d'autant plus peſant, afin que l'inſtrument étant ſuſpendu librement, la ligne à plomb tirée du centre de la poulie tombe entre D & B très près du bras AB, qui doit ſervir de contrepoids. Attachant donc en A un fil ou un crin AEP, il eſt clair que, ſi à ce crin eſt ſuſpendu un poids P, ce poids élévera le bras AB, & que le crin coupera l'arc en un point F, d'autant plus près de C, que le poids P ſera plus grand. On voit auſſi que ce poids ne ſauroit ſurpaſſer une certaine grandeur, puiſqu'il ne doit pas élever le centre de gravité de l'inſtrument, ou, pour mieux dire, celui de la partie ABC au deſſus du niveau du centre de la poulie. Fig. 3.

§. 79. Si donc la gravité du globe qu'on veut employer ſurpaſſe d'une cinquieme partie celle de l'eau douce, on accommodera l'inſtrument de façon, qu'en faiſant le poids P égal à la ſixieme partie de celui du globe, l'arc BF ſoit d'environ 60 ou 70 degrés. Tout cela dépend du diametre de la poulie & du poids qu'on donne au bras AB.

§. 80. Suppoſons donc que l'inſtrument étant ſuſpendu librement & ſans poids, la ligne à plomb ſoit ED, & qu'en attachant en P un poids égal à la ſixieme partie de celui du globe, la ligne à plomb ſoit EF. Ayant tiré le rayon AD, & la perpendiculaire ou la tan-

tangente DGH, abaissez du point F la perpendiculaire FG, & la partie DG sera proportionelle au poids P, ou à la sixieme partie du poids du globe. Si donc, au lieu du poids P, vous attachez en P le globe, & que vous le plongiez dans l'eau, il est clair que le globe n'aura plus que la sixieme partie de son poids, & que par conséquent la ligne à plomb tombera en EF, c'est à dire que le crin EP passera par le point F. Si par contre vous plongez le globe dans une saumure dont la gravité spécifique soit à celle de l'eau douce comme 6 à 5, il est clair que cette saumure portera tout le poids du globe, & que par conséquent la ligne à plomb sera ED. Marquant donc 1000 au point F, vous marquerez 1200 au point D.

§. 81. Dans toute autre saumure intermédiaire, le globe aura encore quelque partie de son poids, & la ligne à plomb tombera entre F & D. Pour trouver les points répondans, on regardera le poids du globe comme divisé en 1200 parties, & on soustraira de ces 1200 parties la gravité spécifique de la saumure; ce qui reste, c'est le poids que le globe conserve encore dans cette saumure. Supposons que le globe y étant plongé, la ligne à plomb soit EN; abaissez du point N la perpendiculaire NM, & la partie DM sera proportionelle au poids que le globe conserve encore dans la saumure. Ecrivant donc en G 1000, en D 1200, vous diviserez la ligne GD en 200 parties, & par chacune vous éléverez des perpendiculaires MG, qui marqueront en N les points répondans aux gravités spécifiques. Ainsi p. ex. si vous avez GM = 150, le point M, & partant aussi le point N, répondra à la gravité spécifique = 1150. De cette façon, les nombres marqués sur l'arc DF seront ceux de la colonne z de notre table; laquelle par conséquent vous fournira les nombres répondans x, que vous pourrez pareillement écrire sur l'arc DM, pour trouver ensuite immédiatement les grains de sel contenus dans un volume de saumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce. Ce qui étant fait, la réduction de ces nombres à des mesures usitées se fera de la même façon que nous avons indiquée dans la description des autres instrumens.

V. OB-

V. OBSERVATIONS
sur l'altération du poids des saumures causée par la variation de la chaleur.

§. 82. Nous avons remarqué ci-dessus que la chaleur dilatant les corps, il conviendra d'avoir égard aux variations qu'elle peut produire dans le poids & la gravité spécifique des saumures, & particulierement de celles qu'on peut appeller complettes ou saturées. La premiere question qui se présente ici, c'est de voir, si la dilatation des saumures se fait d'une maniere proportionelle à celle de l'eau pure, ou si chaque saumure se dilate différemment. Pour cet effet, je pris la même phiole dont je m'étois servi pour les expériences précédentes, & l'ayant remplie d'eau bouillante, je trouvai le poids de cette eau de 1089, 3 grains, le barometre étant alors à 28 pouces. Or, dans la température du 15me degré de M. de Réaumur, la même phiole contenoit 1128, 3 grains d'eau douce. Mais, les dilatations étant réciproquement comme les poids d'un même volume, il s'ensuit qu'un volume d'eau douce chaude de 15 degrés étant échauffé jusqu'au 80me degré, se dilate depuis 1089, 3 jusqu'à 1128, 3, par conséquent de 39, 0 parties sur 1089, 3. Donc, ces 39 parties répondant à 80 — 15 = 65 degrés du thermometre, nous aurons $\frac{19 \cdot 38}{65} = 11\frac{1}{9}$ parties, qui répondent à 15 degrés. Déduisant donc ces $11\frac{1}{9}$ parties de 1089, 3, il reste 1077, 2 pour le volume qui répond à l'eau douce prête à se congeler. Posons ce volume = 1000, & le volume de l'eau bouillante sera $= 1000 \cdot \frac{1128,3}{1077,2} = 1047\frac{1}{2}$. Ainsi 1000 parties d'eau douce prête à se congeler, se dilatent jusqu'à $1047\frac{1}{2}$ quand on les fait bouillir.

§. 83. J'en fis autant avec une solution de sel qui étoit très forte. Dans la température de 15 degrés elle pesoit 1354 grains; mais l'ayant fait bouillir, un même volume n'en pesoit plus que 1296,8 grains. Pour la faire bouillir, je mis la phiole dans l'eau bouillante,

 afin

afin d'être assuré par là du même degré de chaleur. Ainsi donc, la dilatation répondant à 80 — 15 = 65 degrés du thermometre alloit depuis 1296,8 jusqu'à 1354,0, & par conséquent elle étoit de 57,2 parties sur 1296,8. Donc, pour 15 degrés nous aurons 13,2 parties, lesquelles étant soustraites de 1296,8, donnent le volume de cette solution répondant au froid de la glace = 1283,6. Posant donc ce volume égal à 1000, celui de la même solution, qui répond à la chaleur de l'eau bouillante, sera $= 1000 \cdot \frac{1354,0}{1283,6} = 1055$. Or nous avons vu que la dilatation de l'eau douce ne s'étendoit que depuis 1000 jusqu'à $1047\frac{1}{2}$.

§. 84. Avant que d'examiner ce que cette différence peut emporter, il convient de remarquer, que ce n'est que par maniere de fiction que j'ai calculé le volume de la solution pour le froid de la glace. Car, outre que l'eau salée se congele plus difficilement, elle dépose la plus grande partie de son sel quand elle se congele. Ainsi ce n'est point dans ce sens qu'il faudra prendre la proportion que je viens d'établir entre la dilatation de l'eau douce & celle de la solution que j'ai employée, & qui differe comme $47\frac{1}{2}$ de 55 sur 1000. Il suffit que cette proportion ait lieu dans tous les cas où cette solution n'est point assez froide pour commencer à déposer une partie du sel qu'elle contient, ce qui ne se fera pas à moins qu'elle n'ait au dessous de 13 degrés de chaleur.

§. 85. Pour voir donc de quelle conséquence pourra être cette différente dilatabilité, je vais d'abord examiner la solution telle qu'elle étoit dans la chaleur de 15 degrés; ensuite je l'examinerai dans la chaleur de l'eau bouillante, vu que ce sont les deux cas de mes expériences. Dans la température de 15 degrés, la solution pesoit 1354 grains, un même volume d'eau douce 1128,3, ce qui donne la gravité spécifique de la solution $= \frac{1354,0}{1128,3} = 1200$. Consultant donc la table que nous avons donnée ci-dessus, nous trouverons 330 grains

grains de sel, qui répondent à cette gravité spécifique, de sorte que dans un volume égal à 1000 grains d'eau douce cette solution renferme 330 grains de sel.

§. 86. Par contre la même phiole remplie d'eau bouillante ne pesoit que 1089, 3, & étant remplie de la solution chauffée au même degré elle pesoit 1296, 8 grains. Ce dernier nombre étant divisé par le premier donne 1; 191 pour le rapport de la gravité spécifique, ce qui dans la table n'indiqueroit que 310 grains de sel, au lieu de 330 que nous fournissoit le calcul précédent. Il est donc clair que, pour examiner la bonté des saumures, il faut avoir égard au degré de chaleur qu'elles ont.

§. 87. Remarquons d'abord, que les variations qui se présentent à ce sujet dépendent de deux causes. La premiere, c'est le degré de salure. Car il est clair que, plus cette salure sera foible, plus aussi la dilatabilité de la saumure approchera de celle de l'eau douce. Ensuite ces variations dépendent du degré de la chaleur. Car plus la la chaleur approchera du 15me degré de M. de Réaumur, plus aussi les résultats des épreuves qu'on fera, approcheront de ceux de la table que nous avons donnée ci-dessus, & qui est faite sur ce 15me degré.

§. 88. Or nous avons vu, que depuis le froid de la glace jusqu'à la chaleur de l'eau bouillante l'eau douce se dilate de $47\frac{1}{2}$ parties sur 1000, & la solution que j'ai employée de 55 parties sur 1000, & par conséquent de $7\frac{1}{2}$ parties de plus que l'eau douce. Ces $7\frac{1}{2}$ parties doivent être distribuées sur les 330 grains de sel que la saumure contient, & on trouvera 1 partie sur 44 grains, de sorte que sur chaque fois 44 grains de sel, qu'un volume de saumure égal à 1000 gr. d'eau douce & dans la température de 15 degrés contient de plus, il faut ajouter une unité au degré de dilatabilité de la saumure. Mais, comme les saumures, telles qu'on les tire des sources ou qu'on les laisse exposées à l'air, ne different jamais beaucoup du degré de l'air, il est clair que la différence de cette chaleur & de celle du 15 degré est toujours assez petite, pour que le résultat des expériences ne diffe-

 re

re pas notablement de ceux que fournit notre table; & cette différence est encore diminuée parce qu'il est fort rare de trouver des saumures aussi fortes que celle que j'ai employée.

§. 89. Si cependant on veut avoir égard à cette petite différence, il faudra d'abord réduire les gravités spécifiques à la chaleur du 15me degré. Supposons p. ex. que la chaleur de la saumure soit de 10 degrés, & qu'ayant comparé sa gravité spécifique avec celle de l'eau douce du même degré de chaleur, on l'ait trouvée $= 1120$. On cherchera d'abord ce nombre dans la colonne z de la table, & on y trouvera le nombre répondant $x = 185$, qui marque les grains de sel que la saumure contiendroit, si elle avoit la chaleur du 15 degré. Or, quoiqu'en effet sa chaleur ne soit que de 10 degrés, on se servira néanmoins de ce nombre $x = 185$ comme fort approchant du véritable. On dira donc que, puisque sur 44 grains il faut augmenter le degré de dilatabilité d'une unité, il s'ensuit que sur 185 grains il faudra l'augmenter de $5\frac{3}{5}$ d'unités. Ainsi on aura pour l'eau douce $1047\frac{1}{2}$, pour la saumure $1047,5 + 5,6 = 1053,1$. Ces degrés sont pour la chaleur de l'eau bouillante, qui répond à 80 degrés du Thermometre de M. de Réaumur. Pour les réduire aux degrés 15 & 10, on fera les analogies suivantes

$$80 : 15 = 47\tfrac{1}{2} : 8,9$$
$$= 53,1 : 10,0.$$
$$80 : 10 = 47,5 : 5,9$$
$$= 53,1 : 6,6.$$

Ainsi on aura pour la chaleur de 15 dégrés la dilatation de l'eau douce 1008,9, celle de la saumure 1010,0. Et pour la chaleur de 10 degrés, ces dilatations seront 1005,9 & 1006,6. Ces nombres serviront pour réduire au 19me degré de chaleur la gravité spécifique 1120, que nous avons pour le 10° degré de chaleur. Car il faudra l'augmenter en raison réciproque de 1008,9 à 1005,9, & la diminuer en raison de 1010,0 à 1006,6, ce qui donne

$$\frac{1006,6 \,.\, 1008,9 \,.\, 1120}{1010,0 \,.\, 1005,9} = 1119\tfrac{1}{3},$$

ce qui ne differe que de deux tiers de la gravité ſpécifique de la ſaumure pour le 10° degré de chaleur. Cherchant donc 1119⅓ dans la colonne z de la table, on trouvera le nombre x répondant = 184, lequel marque les grains de ſel qui, dans la température de 15 degrés, ſont contenus dans un volume de la ſaumure égal à celui de 1000 grains d'eau douce également chaude. Si on veut enſuite trouver les grains de ſel contenus dans un volume égal de la ſaumure chaude au 10 degré, il faudra augmenter ces 184 grains dans le rapport des dilatations 1006,6 : 1010,0, ce qui donnera 184⅔ grains.

§. 90. Le ſecond point qui me reſtoit à examiner, c'étoit de voir, comment les changemens de la chaleur peuvent faire varier le degré de ſalure des ſolutions ſaturées. Pour cet effet, je fis diſſoudre du ſel dans de l'eau bouillante, juſqu'à ce qu'elle commençât à dépoſer du ſel qu'elle avoit diſſous. Ce qui arrivant, je verſai cette ſolution toute bouillante dans ma phiole & la remplis. J'en trouvai le poids de 1353 grains. L'ayant enſuite laiſſé refroidir juſqu'à la température de la chambre, qui étoit de 14 degrés de M. de Réaumur, elle dépoſa du ſel au fond de la phiole. Je verſai donc la ſolution dans un autre vaſe, afin d'avoir ce ſel ſéparément. Et l'ayant ſéché ſur la braiſe, il peſa 17 grains. Je fis de même évaporer la ſolution, pour en retirer le ſel qui s'y trouvoit, & le poids en fut de 464 grains, de ſorte qu'en tout il y avoit eu 484 + 17 = 481 gr. de ſel.

§. 91. Ce qui en tout cela me parut remarquable, c'eſt la petite quantité de ſel que la ſolution avoit dépoſée en ſe refroidiſſant depuis le 80° degré du thermometre juſqu'au 14°. Car de 481 grains qu'elle contenoit, il ne s'en précipita que 17. J'en conclus que ſi l'eau, en ſe congélant, dépoſe tout ſon ſel, le moindre degré de liquéfaction ſuffit pour en diſſoudre une bonne quantité.

§. 92. Ayant donc trouvé 481 grains de sel dans une solution bouillante & saturée, qui en pesoit 1353 gr., il s'ensuit qu'il y avoit 1353 — 481 = 872 gr. d'eau douce. Ainsi nous pouvons dire que, quand on fait bouillir 872 gr. d'eau douce, on peut y dissoudre 552 gr. de sel, ce qui fait au delà de la moitié de son poids.

§. 93. Cette solution, qui de toutes est la plus forte, differe assez notablement de celle que nous avons eue ci-dessus pour le 15° degré de chaleur, & qui dans un volume pesant 1359 grains contenoit 380 gr. de sel, & par conséquent 1359 — 380 = 879 gr. d'eau douce, ce qui sur 1000 grains d'eau douce ne donne que 387 grains de sel.

§. 94. Enfin, pour m'assurer de ce qui arriveroit dans les grands froids, j'attendis l'hyver pour faire l'expérience que je vais encore rapporter. J'exposai à un air froid de 5 degrés de Réaumur au dessous du terme de la glace, une solution de sel médiocrement forte, & je plaçai à côté un vase rempli d'eau douce. L'eau douce gela en moins d'un quart d'heure; mais la solution ne gela que fort lentement. Après qu'elle fut assez gelée pour en avoir une portion suffisante de glace, je perçai la glace afin de faire écouler la solution qui étoit encore liquide. Je remplis de cette solution non gelée, toute froide qu'elle étoit, une petite phiole, & j'en trouvai le poids de 367 grains. Mais, en la portant dans une chambre de la température de 6 degrés au dessus du point de congélation, afin qu'elle prît cette température, elle ne pesa alors que 366 grains, parce qu'à cause de la dilatation il falloit en ôter environ une goutte. Je portai dans la même chambre la portion glacée; elle fondit assez facilement. Après lui avoir laissé prendre la même température de 6 degrés de chaud, je remplis la même phiole de cette glace liquéfiée, & j'en trouvai le poids de 350 grains. Enfin je remplis encore la même phiole d'eau douce de la même température, & j'en trouvai le poids de 342 grains. Il s'entend que chaque fois la phiole devoit être rincée & bien vuidée. Or il est

342 : 350 = 1000 : 1023
342 : 366 = 1000 : 1082,

ce qui suivant la table du §. 47. donne 33 & 123 gr. de sel pour un volume égal à 1000 grains d'eau douce. On voit par la même table, que la partie de la solution non gelée auroit pu devenir encore trois fois plus forte. Mais je doute qu'elle le fût devenue, quand même je l'eusse laissée plus longtems exposée au froid. On voit de plus qu'il y avoit encore un peu de sel dans la glace. Mais il faut remarquer que la glace, bien loin d'être toute d'une piece comme celle de l'eau douce, étoit toute feuilletée comme de la pâte d'Espagne. Les feuilles n'avoient qu'environ ¼ de ligne d'épaisseur, & elles se détacherent sans peine les unes des autres. Il est très croyable que ce qu'il y avoit encore de sel ne se trouvoit pas dans la glace, mais entre ces feuilles. Car on sait que le sel en se détachant de l'eau monte, & qu'il ne se précipite qu'après avoir formé des crystaux assez grands pour que les forces de cohésion de l'eau ne puissent plus le tenir suspendu à la surface. Il eût donc fallu les laver dans de l'eau douce; mais c'eût été un travail sans fin, les feuilles étant trop fragiles & fondant trop vite dans de l'eau non glacée.

§. 95. Je répétai cette expérience, en dissolvant une demi-once du sel C (§. 7.) dans 4 onces d'eau douce de la température de 6 degrés. Et ayant exposé cette solution à un air froid de 8 degrés au dessous du point de congélation, pendant une nuit de Janvier, je vis le lendemain que cette solution étoit glacée jusqu'au delà de la moitié. Car la glace pesa 1101 gr., tandis que la partie non glacée ne pesa que 1059 grains. Je plaçai chaque partie dans une chambre de la température de 6 degrés de chaud, & après les y avoir laissés prendre cette température, je remplis la même phiole, & je trouvai le poids de la solution qui n'étoit point gelée 377½ grains, de la glace liquéfiée 362½ gr.; ce qui comme auparavant donne

342 : 377½ = 1000 : 1104
342 : 362½ = 1000 : 1060,

ce

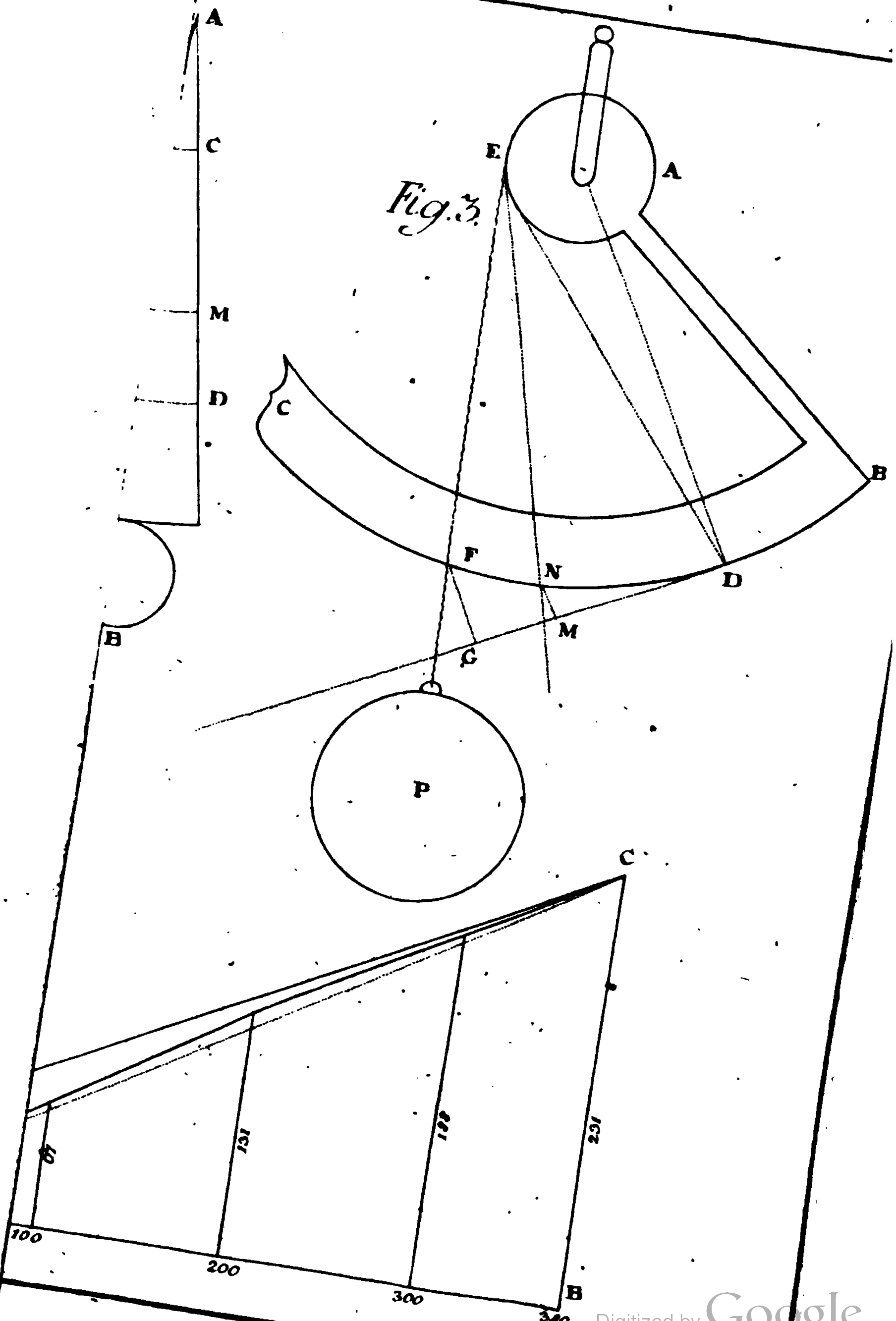
ce qui ſuivant la table du §. 47. donne 156 & 90 grains de ſel pour un volume égal à 1000 grains d'eau douce. Cette ſolution ayant été plus forte que la précédente, on voit auſſi que la partie non gelée devoit contenir plus de ſel. La glace par la même raiſon devoit en retenir d'avantage entre ſes feuilles. Du reſte ces expériences font voir, qu'en effet il y auroit moyen de ſe ſervir des grands froids pour condenſer conſidérablement des ſaumures foibles.

VI. OBSERVATIONS FAITES ſur les ſolutions de quelques autres eſpeces de ſel.

§. 96. Ayant pris une phiole qui contenoit 1128 gr. d'eau douce, j'y mis 300 grains de différentes eſpeces de ſel, mais de chaque eſpece ſéparément. J'y verſai enſuite de l'eau douce pour les diſſoudre, & je remplis enfin la phiole d'eau douce en la remuant, en ſorte que par ce moyen j'eus autant de ſolutions que j'avois de ſels, & que chaque ſolution dans un volume égal à 1128 grains d'eau douce renferma 300 grains de ces ſels. Tout cela ſe fit pendant l'été, dans une température de 16 degrés de Réaumur. Ayant peſé chacune de ces ſolutions, je trouvai le poids d'un volume égal

d'eau douce - - - - -	1128 gr.
de ſel commun (§. 20.) - - - -	1316.
de ſel purifié par l'art du Chymiſte - -	1314.
de ſucre ordinaire - - - - -	1243.
de ſucre de lait - - - - -	1230.
de nitre - - - - - -	1305.
de ſel alcali, la baſe du ſel commun -	1263.
de ſel de Glauber - - - - -	1274.
de vitriol - - - - - -	1315.

Quant


Fig. 3.
A
C
M
D
B
E
A
C
B
F
N
D
M
G
P
C
151
198
231
100
200
300
B

Quant à l'alun, l'eau ne vouloit pas en diſſoudre 300 grains. J'en fis donc la ſolution la plus forte, en diſſolvant dans de l'eau bouillante autant d'alun qu'il étoit poſſible. Cette ſolution en ſe refroidiſſant dépoſa un peu d'alun. J'en remplis la phiole & j'en trouvai le poids de 1220 grains. Et après avoir fait évaporer l'eau, je trouvai 136 grains d'alun. Enfin je fis encore une ſolution de noix de galles la plus forte qu'il étoit poſſible ſans la mettre au feu. Et l'ayant filtrée, j'en trouvai le poids de 1161 grains, & partant elle étoit de 1161 — 1128 = 33 grains plus denſe que l'eau douce. On peut faire ſur ces expériences des remarques ſemblables à celles que j'ai faites ci-deſſus (§. 22. & ſuiv.) ſur les ſolutions du ſel commun. Les différences qu'on y obſervera, feront voir que la quantité de chacun de ces ſels, qui s'inſinue dans les interſtices de l'eau, ne dépend pas uniquement de la grandeur & de la figure de ces interſtices, mais que la grandeur & la figure des particules ſalines y influe pareillement. Du reſte je n'ai point trouvé qu'il y ait en tout cela des données ſuffiſantes, pour déterminer ces grandeurs & ces figures.



MÉMOIRE
SUR
LES PRISMES ACHROMATIQUES. (*)
PAR M. BÉGUELIN.

L'Académie ayant fait venir d'Angleterre une lunette achromatique, avec le prisme composé qui a donné à M. Dollond les dimensions de l'objectif de cette lunette, j'ai eu la curiosité d'examiner plus particulierement ces prismes, & je crois devoir à l'Académie qui a bien voulu me les confier, le rapport des observations que j'ai faites, & les remarques qu'elles m'ont fournies.

1. Ce Prisme Achromatique est l'assemblage de trois prismes, dont les deux extérieurs sont de *crownglass*, tournés tous deux d'un même sens; le troisieme, placé en sens contraire entre ces deux, est de cristal d'Angleterre qu'on nomme *flintglass*. Les deux prismes extérieurs étant mobiles à l'aide d'une charniere, peuvent être écartés & rapprochés de celui du milieu, & dans le rapprochement les faces intérieures s'appliquent si exactement les unes contre les autres, que le tout ensemble forme un seul prisme tronqué, à travers lequel, dans quelque sens qu'on le tourne, & sous quelque incidence que les raïons le traversent, on n'apperçoit absolument aucune bordure, nulle couleur prismatique.

2. Après avoir démonté ces trois verres, mon premier soin a été de mesurer de plus d'une maniere, & avec toute la précision possible, leurs angles réfringens. La méthode qui m'a parû la plus sûre, vû

(*) Lû à l'Académie le 22 d'Octobre 1767.

vû la petitesse de ces prismes, a été de tracer d'avance sur le papier divers angles d'une grandeur approchante à celle de chaque prisme, & différens entr'eux de 15 en 15 minutes. En appliquant verticalement le prisme sur chacun de ces angles successivement, il est aisé d'appercevoir à très peu près quel est l'angle dont les côtés coïncident le plus exactement avec les faces du prisme. J'ai aussi intercepté ces faces entre deux regles à la maniere de M. *Smith*, pour avoir l'angle que ces regles font entr'elles; j'ai de plus vérifié la dimension de chaque angle par l'addition & la soustraction de celui du deuxieme & du troisieme prisme. Le résultat de ces opérations m'a donné les déterminations suivantes, que j'estime être assez exactes:

l'angle réfringent du Flintglass	=	24°.
celui du grand prisme de Crownglass	=	26°.
celui du petit prisme de Crownglass	=	14°. 30′. (*)

(*) Depuis la lecture de ce Mémoire j'ai eû occasion de mesurer de nouveau ces prismes avec un instrument plus exact. J'ai retrouvé les mêmes mesures pour le flintglass & le grand crownglass; mais l'angle du petit crownglass ne s'est trouvé que de 14°. 15′., ou tout au plus 14°. 20′. M. le Professeur de Castillon a eû la bonté de m'aider à prendre ces mesures, & les a réitérées lui-même. J'ai prié ensuite M. Lambert de les répéter encore; mais il a jugé que pour obtenir une précision plus grande, il falloit recourir à l'Optique, vû que la lumiere donne des angles & des lignes droites avec beaucoup plus d'exactitude que la regle & le compas. Voici les principes de la méthode ingénieuse qu'il a imaginée. Soit (fig. 1.) le prisme ABC; que la lumiere y tombe suivant la direction LAM, elle sera réfléchie d'un côté suivant AN, de l'autre côté suivant AP. Or on a par les loix de la réflexion NAB = BAM; & PAC = CAM. Donc NAP = 2 BAC; donc la corde de l'arc NAP est égale au double sinus de l'angle du prisme que l'on cherche. M. Lambert aiant donc placé le prisme sur un papier blanc, & une lampe élevée au dessus du plan du papier, à la distance convenable pour donner sur le papier les raions réfléchis AN, PN, d'une longueur suffisante; il y a tracé ces droites prolongées, & décrivant du centre A, avec un raion de 0,5000 &c. parties d'échelle, l'arc NP, la moitié de la corde, mesurée sur la même échelle, lui a donné le sinus de l'angle BAC, qu'il a trouvé Planche II.

pour le flintglass	=	24°. 14′.
pour le grand crownglass	=	25°. 56′.
& pour le petit crownglass	=	14°. 23′.

3. Il ne restoit plus qu'à observer la réfraction & la dispersion des raïons par chacun de ces verres. C'est ce que j'ai fait avec le plus grand soin par la méthode dont j'ai rendu compte dans mon Mémoire sur les couleurs prismatiques. Comme les bordures colorées, aussi bien que la dépression de l'image, croissent en raison directe de l'intervalle entre le prisme & l'objet, j'ai mesuré chaque bordure, & chaque abaissement de l'image lorsqu'elle étoit stationaire, depuis la distance d'*un* pied, jusqu'à celle de *dix* & au delà. Les petites distances donnent des observations plus distinctes, parce qu'on peut mieux démêler les limites des bordures; d'un autre côté, à la distance de 8 ou 10 pieds, l'erreur sur la hauteur précise des bordures est 8 ou 10 fois moins importante qu'une erreur égale à la distance d'un pied. Le milieu entre les observations les plus sûres m'a donné les mesures suivantes, rapportées à une distance de *deux* pieds d'un prisme à l'objet.

		Bordure.	*Dépression.*
Le flintglass donne	-	$2\frac{1}{2}$ lignes	6 pouces,
le grand crownglass	-	$1\frac{1}{2}$ - -	6 - -
le petit crownglass	-	0,75 - -	$3\frac{1}{4}$ - -

4. Aiant ces données, le reste n'est plus que de simple calcul. On sait par la théorie du prisme, que lorsque l'image est stationaire, l'angle de réfraction à la sortie du prisme est égal à l'angle d'incidence.

Ces deux dernieres déterminations ne different presque pas des miennes. La premiere s'en écarte de 14'. J'ai répété à mon tour l'expérience suivant la méthode de M. Lambert; mais à la lumiere du soleil, & en ombrageant le papier des deux côtés du prisme, pour que les traces éclatantes de la lumiere réfléchie s'y peignissent avec d'autant plus de netteté; ensuite, pour tenir compte du diametre de l'objet lumineux, qu'il faudroit retrancher de l'arc extérieur, ou ajouter à l'arc intérieur, de ces bandes de lumiere, si l'on veut avoir avec toute l'exactitude possible le double de l'angle du prisme; j'ai pris la moitié de la somme des deux arcs, pour le véritable arc NAP. Cette opération répétée plus d'une fois m'a donné l'angle BAC du Flintglass = 23°. 58'.
du grand crownglass = 25°. 54'.
& du petit crownglass = 14°. 17'.
Il est aisé de voir que la petite différence de ces mesures n'altere presque point les résultats contenus dans ce Mémoire, & qu'ils n'en sont que d'autant plus certains.

cidence. On ſait de plus que dans ce cas l'angle de réfraction eſt la moitié de la ſomme de l'angle du priſme, & de l'angle que l'image fait avec l'objet. Enfin j'ai prouvé dans le *Mémoire cité*, que, dans ce cas encore, ce ſont les raïons rouges qui traverſent le priſme iſoscele parallelement à ſa baſe. Mais il y a encore une attention à faire ſur l'angle de dépreſſion de l'image, parce que cet angle entre pour beaucoup dans la détermination des forces réfractives.

Je me ſuis aſſuré par des obſervations réitérées à diverſes diſtances, que les images ſtationaires, vues par le priſme de flintglaſs, & par le grand priſme de crownglaſs, coïncident toujours exactement, qu'ainſi l'un de ces priſmes abaiſſe ou éleve l'objet préciſément autant que l'autre; & j'ai trouvé partout cet abaiſſement égal au quart de la diſtance de l'objet au priſme. Mais il n'eſt pas exactement vrai, que la moitié de l'angle d'abaiſſement, jointe à celle de l'angle réfringent, donne l'angle de réfraction. Ce n'eſt qu'en négligeant l'épaiſſeur du priſme qu'on peut le ſuppoſer, & ce n'eſt qu'à de grandes diſtances qu'on doit négliger cette épaiſſeur. J'ai donc pris pour cette meſure une diſtance horizontale de 15 pieds 4 pouces, entre le plan vertical de l'objet & celui du priſme; ce priſme, ou plutôt l'œil, étoit de $9\frac{1}{2}$ pouces plus élevé que l'objet; l'image ſtationaire a paru également par l'un & l'autre priſme deſcendre de $3'. 11\frac{1}{8}''$, au deſſous de ſon objet. Prenant donc la diſtance horizontale pour le ſinus totus, j'ai trouvé par les tangentes l'angle entre l'image & l'objet $= 14°. 9'$, & par conſéquent le demi-abaiſſement $= 7°. 4'. 30''$.

5. Poſant les dénominations ſuivantes:

l'angle de dépreſſion de l'image	$= a$.
l'angle de la bordure de l'image	$= b$.
l'angle d'incidence ſur le priſme	$= \alpha$.
l'angle de réfraction dans le priſme	$= \beta$.
l'angle d'incidence ſur la face intérieure - - - -	$= \gamma$.

 l'an-

l'angle de réfraction du raïon rouge
au sortir du prisme - - $= \varrho$.
ce même angle pour les raïons violets $= \vartheta$.
l'angle réfringent du prisme de flintglass $= p$.
- - - - - du grand crownglass $= \Pi$.
- - - - du petit crownglass $= \pi$.

La raison de réfraction du flintglass

pour les raïons rouges & violets $= \frac{R}{1};\ \frac{V}{1}$.

celle du crownglass - - - - $= \frac{r}{1};\ \frac{v}{1}$.

On a pour le prisme de *flintglass*

$$\alpha = \varrho = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}a = 19^\circ.\ 4'.\ 30'',$$

& ôtant du logarithme du sinus de cet angle, celui du sinus de l'angle $\gamma = \frac{1}{2}p$, on trouve log. R = 0,1964105 & R = 1,57184. Le même procédé donne pour le crownglass log. r = 0,1835223, & r = 1,52588.

6. Ces valeurs de R & r, étant conclues immédiatement de la mesure des angles des deux grands prismes, & de l'angle de dépression, doivent être exactes à bien peu près. C'est à présent à la hauteur des bordures à déterminer les valeurs des raisons V & v; & comme il est possible de se tromper de quelques secondes dans l'estimation de l'angle b, la grandeur connue des angles des prismes servira à rectifier cette erreur.

La bordure que produit le flintglass est par l'observation (art. 3.) de 2,5 lignes sur une distance de deux pieds. Ainsi le sinus de l'angle b est à son raïon, comme 5 à 576; ce qui donne $b = 29'.\ 50''$, après une double réfraction; d'où l'on tire pour une incidence dans le verre $= \frac{1}{2}p$, l'angle de réfraction du raïon violet: $\vartheta = \varrho + \frac{1}{2}b$ =

$= 19^\circ. 19'. 25''$, & par conséquent log. $V = 0{,}2018222$, & $V = 1{,}59155$.

Pareillement la bordure du grand prisme de crownglass étant $= 1{,}5'''$, j'ai ici $b = 17'. 55''$, donc $s = \varrho + \frac{1}{2} b = 20^\circ. 13'. 17''$; ce qui donne log. $v = 0{,}1866036$, & $v = 1{,}53675$.

7. Si les quatre valeurs trouvées V, R, v, r, sont justes, il faut que la formule $\frac{V - R}{v - r}$, donne la raison de dispersion des deux especes de verres, c. a. d. qu'on ait $\frac{V - R}{v - r} = \frac{dn}{1}$. Or, puisque ces trois prismes combinés détruisent les couleurs, il faut aussi par l'équation achromatique qu'on ait,

$$dn = \frac{V - R}{v - r} = \frac{\text{sin}\ (\Pi + \pi)}{\text{sin}\ p} = \frac{\text{sin}\ 40^\circ.\ 30'}{\text{sin}\ 24^\circ};$$

ce qui donne: log. $dn = 0{,}2032311$, & $dn = 1{,}59672$; au lieu que les valeurs trouvées donnent $\frac{V - R}{v - r} = \frac{1971}{1087} = 1{,}8132$. Mais il suffit de supposer une erreur d'environ $\frac{1}{5}$ de ligne sur la hauteur observée de chaque bordure, pour concilier exactement ces deux équations; & les nouvelles valeurs de V & v qui en résultent, different presque insensiblement des précédentes. On aura

log. $V = 0{,}2015540$; ou $V = 1{,}5905747$,
& log. $v = 0{,}1868460$; ou $v = 1{,}537613$.

8. On peut donc, sans courir risque de se tromper beaucoup, admettre les rapports suivants:

1°. dans le crownglass, $v = 1{,}537613$.
$m = 1{,}53175$.
$r = 1{,}52588$.

2°. dans

2°. dans le flintglaſs, $V = 1,590575.$
$M = 1,581207.$
$R = 1,57184.$

Et pour le rapport des diſperſions,

$$\frac{V - R}{v - r} = 1,5967.$$

9. La premiere remarque qu'on peut faire ſur ces déterminations, c'eſt que dans les lunettes ordinaires dont l'objectif eſt de verre commun, ou de *crownglaſs*, l'aberration de réfrangibilité n'eſt pas à beaucoup près ſi grande que M. *Newton* l'avoit eſtimée. En effet, aiant dans le crownglaſs, pour les petites réfractions moïennes, $m - 1 = 0,531746$, & la différence entre les réfractions extremes, $v - r = 0,011733$; cette différence n'eſt que la $\frac{1}{45\frac{1}{3}}$ partie de la réfraction totale, au lieu que M. *Newton*, par la meſure du ſpectre ſolaire, l'avoit eſtimée être la $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$ partie de cette réfraction; d'où il réſulte que, par rapport aux raïons d'un point très éloigné, cenſés paralleles, le diametre du cercle de confuſion, qu'on a eſtimé juſqu'ici être la $\frac{1}{55}$ partie de l'ouverture de l'objectif, n'en ſeroit qu'environ la $\frac{1}{90}$, ou ſeulement la $\frac{1}{412}$ partie, ſi l'on néglige avec M. *Newton* les raïons les plus foibles & les plus obſcurs.

Ce n'eſt pas que je doute de l'exactitude des obſervations du grand Newton. Elles ont tous les caracteres qui peuvent rendre des obſervations reſpectables. Mais, outre que ſes priſmes pouvoient être d'un verre qui diſperſât plus les raïons que ne fait le *crownglaſs*, j'ai déjà remarqué dans le Mémoire cité, que la diffuſion eſt plus petite étant obſervée immédiatement par l'œil, que lorſqu'on la meſure ſur le mur qui reçoit l'image colorée. Or le but de toutes ces diſcuſſions optiques étant de perfectionner les lunettes, qui tranſmettent les images des ob-

objets immédiatement dans l'œil, il importe de ſavoir à quoi peut dans ce cas-là aller la confuſion que la réfrangibilité produit. On voit par les *Tranſactions philoſophiques N°. 96.* qu'on oppoſa déja aux calculs de M. *Newton*, l'expérience d'une lunette de 12 pieds qui préſentoit une image très diſtincte.

10. Au reſte il ne ſeroit pas difficile de réduire les meſures priſes par les bordures, à celles de l'image reçue ſur le mur d'une chambre obſcure. J'ai évalué, dans mon Mémoire ſur les couleurs priſmatiques, la diminution que l'étendue de la bordure ſouffre par les réfractions dans l'œil, au tiers de ſa hauteur totale; un grand Géometre réduit cette diminution au quart: quelque calcul qu'on adopte ici, il n'en réſulte pas une différence conſidérable dans les meſures que j'ai déterminées. Les valeurs de r & R reſtent les mêmes, quelle que ſoit la hauteur des bordures. Ce ſeroit celles de v & V qui ſeroient altérées, ſi l'on augmente la hauteur des bordures, du tiers, ou de la moitié. Mais, même en ce dernier cas, & ſans ſuppoſer une plus grande erreur dans l'eſtimation des bordures que celle de l'article 7, on ſatisfait à l'équation achromatique, en poſant $V = 1{,}600255$, & $v = 1{,}543676$; ce qui donneroit la réfraction moïenne du flintglaſs: $M = 1{,}586$, & celle du crownglaſs: $m = 1{,}5348$, à très peu près les mêmes que j'ai trouvées (art. 8.). Au reſte, en adoptant ces nouvelles valeurs de V & v, on a $\frac{v - r}{m - 1} = \frac{1}{30}$; ce qui ſe rapproche beaucoup plus du calcul de M. *Newton*.

11. *Seconde remarque.* Comme le pouvoir réfractif du *flintglaſs* eſt plus grand que celui du *crownglaſs*, la diſperſion des raïons dans le *flintglaſs* pourroit ſurpaſſer celle du *crownglaſs*, ſans que pour cela la force de diſperſer du *flintglaſs* ſurpaſſât préciſément d'autant celle du *crownglaſs*. Il faut donc, pour eſtimer au vrai leurs diverſes forces diſperſives, combiner la diſperſion d'un verre avec la réfraction de l'autre; ce qui donne l'analogie:

$$\frac{V-R}{M-1} : \frac{v-r}{m-1} = D : d = 1,4609 : 1.$$

Or, que des verres d'eſpeces différentes, different auſſi en forces réfringentes; que l'eſpece la plus denſe produiſe la plus forte réfraction; cela eſt dans l'ordre des phénomenes, & n'eſt pas plus ſurprenant que de voir l'air réfracter beaucoup moins que l'eau, & l'eau beaucoup moins que le verre. Mais, que les raïons de diverſes eſpeces ne ſoient pas diſperſés dans la même raiſon que la réfraction ſuit dans les divers milieux, c'eſt ce qu'il y a de difficile à concevoir, & qu'on ne ſauroit accorder à moins d'y être forcé par des expériences qui n'admettent point d'autre explication. Si l'on pouvoit ſuppoſer, comme d'habiles Phyſiciens l'ont fait, que la moindre diffuſion dans certains verres n'eſt qu'apparente, que ce n'eſt que l'effet de l'opacité de ces verres, qui moins tranſparens ne tranſmettent que difficilement & en petite quantité les raïons les plus foibles; on comprendroit clairement pourquoi les bordures produites par de tels verres ont moins de hauteur, quoique le rapport de la diſperſion à la réfraction reſte le même. Il s'agit d'examiner la poſſibilité de cette ſuppoſition.

En remontant à la production des bordures colorées, telle que je l'ai expliquée dans le Mémoire *ſur les couleurs priſmatiques*, il faut, pour que la ſuppoſition que j'examine ici ait lieu, que, tandis que le *flintglaſs* & le *crownglaſs* diſperſent également les raïons par un eſpace = 15 parties, il y ait environ *cinq* de ces parties qui ſoient abſorbées par le crownglaſs; ce qui ne ſauroit arriver que de l'une des quatre manieres ſuivantes. Comme chaque bordure complette eſt repréſentée par un triangle rectangle vertical, il faut que les parties ſupprimées dans la bordure produite par le *crownglaſs* manquent, ou 1°. uniquement vers la pointe du triangle, qui ne contenant que très peu de raïons eſt toujours la partie la plus obſcure de la bordure; ou 2°. uniquement vers la baſe, qui réuniſſant un grand nombre de raïons hétérogenes, approche ſenſiblement du blanc; ou 3°. que la ſuppreſſion des raïons ſe faſſe également à la pointe & à la baſe; ou 4°. enfin

que

que le retranchement tombe sur la base de l'un des triangles, & sur le sommet de l'autre.

Or, de ces quatre moïens différens, les deux premiers sont évidemment contraires aux observations. Car, si l'on applique contre un fond noir deux quarrés de papier blanc, posés en échiquier sur une même ligne horizontale, on verra toujours la partie la plus foncée de la bordure rouge du quarré inferieur être de niveau avec la partie la plus claire de la bordure bleue du quarré supérieur. Ces deux bordures sont collatérales dans toute leur étendue, & elles finissent sur une même ligne horizontale, par le jaune le plus clair d'un côté, & le violet le plus sombre de l'autre. La différence des verres n'en met aucune dans cette observation.

Si l'on nomme les quatre couleurs principales le *rouge*, le *jaune*, l'*azur* & le *violet*, par leurs lettres initiales, ces bordures collatérales seront représentées par ces deux triangles caractéristiques:

	Bordure claire.		*Bordure sombre.*	
Rouge foncé	R	- - - - -	VVAIIIR	Azur très clair
	IR	- - - - -	VVAIII	
	IIR	- - - - -	VVAII	
	IIIR	- - - - -	VVAI	
	AIIIR	- - - - -	VVA	
	VAIIIR	- - - - -	VV	
Jaune très clair	VVAIIIR	- - - - -	V.	Violet obscur.

La seule inspection fait voir que, si la suppression des raïons extrêmes n'affectoit que la partie la plus obscure, ou la plus lumineuse des bordures, elles ne paroitroient plus de niveau sur une même horizontale.

Les deux autres moïens ne sont pas exposés à cette difficulté, & n'ont rien de contraire à l'observation; il paroit même assez plausible que la suppression des raïons violets vers les bases y produise une couleur sensiblement blanche. J'avoue qu'en considérant combien le crownglass affoiblit la clarté des objets, je serois fort tenté d'admettre

une ſuppreſſion des raïons extrêmes, auquel cas la proportion trouvée par M. *Eüler*, qui donne:

$$\log.\ r : \log.\ R = \log.\ v : \log.\ V,$$

pourroit reſter la véritable loi de la nature; quoique l'interception accidentelle des raïons foibles ne permettroit pas d'en faire uſage dans le calcul des objectifs composés, & qu'il faudroit toujours chercher par l'expérience les bordures ſenſibles de chaque eſpece de verre, pour trouver la combinaiſon achromatique qui les détruit.

Je ſai qu'on objecte contre cette loi, les verres découverts par M. *Zeiher*. En effet, je ne crois pas que la tranſparence de ces verres ſurpaſſe celle du criſtal d'Angleterre, & cependant leur diſperſion doit être de beaucoup ſupérieure à celle du *flintglaſs*. J'ignore ſur quels principes, & par quelle méthode M. Zeiher a meſuré cette diſperſion. Je n'ai vû aucun priſme de cette eſpece de verre, & je ne ſache pas qu'on ait encore réuſſi à en conſtruire de bonnes lunettes; ce qui doit ſurprendre, vû la perfection qu'on s'en pouvoit promettre. Si ce verre contient beaucoup de veines, comme cela eſt preſque inévitable lorſqu'on ne vitrifie qu'une petite maſſe dans de ſimples creuſets, il ne ſeroit pas étonnant que la diſperſion parût exceſſive.

12. *Troiſieme remarque.* En ſe ſervant des dénominations de l'article 5, on a par la nature de la réfraction, $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{r}$. La nature du priſme donne $\gamma = \pi - \beta$. On a donc $\sin \rho = r \sin \gamma = r \sin \left(\pi - \text{ang.} \frac{\sin \alpha}{r}\right)$. De là réſultent les formules ſuivantes pour l'angle de derniere réfraction dans les verres combinés; formules qui me paroiſſent les plus commodes pour la facilité, & l'exactitude du calcul.

I. à deux priſmes p & π combinés, dont le flintglaſs eſt tourné vers l'objet.

ſin

$$\sin \varrho = r \sin \left(\pi - \frac{R}{r} \sin \left(p - \frac{\sin \alpha}{R}\right)\right),$$

$$\sin \vartheta = v \sin \left(\pi - \frac{V}{v} \sin \left(p - \frac{\sin \alpha}{V}\right)\right).$$

II. à deux prismes π & p, dont le crownglass est tourné vers l'objet.

$$\sin \varrho = R \sin \left(p - \frac{r}{R} \sin \left(\pi - \frac{\sin \alpha}{r}\right)\right),$$

$$\sin \vartheta = V \sin \left(p - \frac{v}{V} \sin \left(\pi - \frac{\sin \alpha}{v}\right)\right).$$

III. à trois prismes, dont celui de flintglass p est entre deux prismes de crownglass, savoir Π vers l'objet, & π vers l'œil.

$$\sin \varrho = r \sin \left(\pi - \frac{R}{r} \sin \left(p - \frac{r}{R} \sin \left(\Pi - \frac{\sin \alpha}{r}\right)\right)\right),$$

$$\sin \vartheta = v \sin \left(\pi - \frac{V}{v} \sin \left(p - \frac{v}{V} \sin \left(\Pi - \frac{\sin \alpha}{v}\right)\right)\right).$$

Ces formules supposent que l'on a partout $\gamma = \pi - \beta$; mais cela n'est vrai dans le sens positif, que lorsque les angles β & γ, tombent dans le même sens au dessous de leurs perpendiculaires par rapport à l'angle réfringent π, qui est alors $\pi = \beta + \gamma$. S'il arrive au contraire que β soit au dessus de la perpendiculaire à la premiere face, il devient négatif, & l'on aura $\pi = -\beta + \gamma$; donc $\gamma = \pi + \beta$. Par la même raison, si c'est γ qui tombe au dessus de la perpendiculaire à la seconde face, on aura $\pi = \beta - \gamma$, ou $\gamma = \beta - \pi$. Enfin, si l'incidence est perpendiculaire à la premiere face, on aura α, & $\beta = o$, & par conséquent $\gamma = \pi$; ce qu'il est toujours aisé de distinguer dans l'application de ces formules. Or cette considération montre que, quelques rapports r, v, R, V, qu'il y ait pour les raïons hétérogenes, si ces rapports sont constants pour toutes les inciden-

K 3 ces,

ces, il n'eſt pas poſſible que les raïons rouges & violets ſortent toujours paralleles, après avoir traverſé deux, trois, ou pluſieurs priſmes combinés de *flintglaſs* & de *crownglaſs;* qu'au contraire, s'il y a des incidences qui donnent ce parallélisme exactement, ou très approchant, il y aura néceſſairement d'autres incidences où les raïons colorés s'écarteront à leur ſortie, & auront une diffuſion conſidérable...

En effet les ſinus de la derniere réfraction des raïons rouges & violets ſeront toujours, ſin $\rho = r$ ſin γ'; r ſin γ''; r ſin γ'''; & ſin $s = v$ ſin γ'; v ſin γ''; v ſin γ''' &c., ſelon qu'il y aura deux, trois, ou quatre priſmes combinés. Il faudroit donc, pour qu'il n'y eût plus de diſperſion, qu'on eût toujours r ſin $\gamma'' = v$ ſin γ''; & comme le rapport de réfraction v eſt toujours plus grand que le rapport de réfraction r, il faudroit que le ſinus γ'' des raïons rouges fût toujours plus grand que le ſinus γ'' des raïons violets, & cela préciſément en raiſon inverſe de v à r. Or il eſt évident que la choſe n'eſt pas poſſible. Elle ne ſauroit l'être à deux priſmes, ſi le crownglaſs eſt tourné vers l'objet, dans les cas où la formule donneroit:

$$1^\circ.\ \gamma = \pi + \beta;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'.$$
$$\text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta'.$$
$$\text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi - \beta;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta',$$

parce que dans tous ces cas l'angle β' du raïon rouge eſt par la nature des réfrangibilités plus grand que l'angle β' du raïon violet. Par la même raiſon, ſi c'eſt le flintglaſs qui ſoit tourné vers l'objet, les raïons colorés doivent diverger à leur ſortie lorſqu'on aura:

$$1^\circ.\ \gamma = \pi;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \beta' - \pi',$$
$$\text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi - \beta;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \beta' - \pi'.$$

Enfin, s'il y a trois priſmes, dont celui de *flintglaſs* ſoit au milieu, le parallélisme des raïons colorés ne ſauroit exiſter à leur ſortie, ſi l'on a:

$$1^\circ.\ \gamma = \pi + \beta;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta';\quad 3^\circ.\ \gamma'' = \beta'' - \pi'',$$
$$\text{ou}\ 1^\circ.\ \gamma = \pi;\quad 2^\circ.\ \gamma' = \pi' - \beta';\quad 3^\circ.\ \gamma'' = \beta'' - \pi'',$$

ou

ou 1°. $\gamma = \pi - \beta$; 2°. $\gamma' = \pi' - \beta'$; 3°. $\gamma'' = \beta'' - \pi''$,
ou 1°. $\gamma = \beta - \pi$; 2°. $\gamma' = \pi' + \beta'$; 3°. $\gamma'' = \pi'' - \beta''$.

La plûpart de ces cas ne ſont pas à la vérité applicables à notre priſme, ou, lorſqu'ils le ſont, la diviſion du crownglaſs en deux rend les angles d'émerſion des raïons hétérogenes aſſez petits pour qu'une différence dans leur ſinus, qui produiroit une aberration conſidérable ſi ces angles étoient plus grands, n'en donne qu'une médiocre; d'où l'on voit l'avantage que les objectifs à trois lentilles doivent avoir ſur ceux à deux lentilles, pour rendre l'aberration de réfrangibilité inſenſible; indépendamment de celui que la diminution des courbures leur donne.

Cependant il reſte vrai, qu'en adoptant nos meſures, l'écart des raïons hétérogenes doit aller ſous diverſes incidences juſqu'à quelques minutes; & néanmoins, en quelque ſens qu'on tourne le priſme, & ſous quelque incidence que les raïons le traverſent, on n'apperçoit abſolument aucune bordure, nul veſtige de couleurs priſmatiques. Il y a plus encore; c'eſt qu'on peut écarter les priſmes extérieurs du priſme mitoïen, juſqu'à former entre celui-ci & chacun des deux autres un angle de 30 à 35 degrés, ſans qu'il en réſulte aucune couleur. Il faut donc, ou ſe défier de la regle reçue juſqu'ici en Optique, que la raiſon entre les ſinus d'incidence & de réfraction eſt exactement conſtante pour toutes les incidences; ou, puiſque des quantités variables, telles que ſont les raiſons des ſinus à leurs angles, multipliées & diviſées par des quantités conſtantes, ne ſauroient toujours donner la même équation finale ſin $\varrho =$ ſin ν, il faut convenir que, quelques rapports qu'on adopte, le paralléliſme exact entre les raïons rouges & violets à leur ſortie des priſmes combinés, ne peut pas avoir également lieu pour toutes les incidences: au contraire, ſi l'on veut en faire le calcul, on trouvera que, ſi ce paralléliſme qui rend les priſmes *achromatiques*, a lieu ſous une incidence déterminée, il n'aura pas lieu, ni ſous une incidence un peu plus petite, ni ſous une incidence un peu plus grande; que la diffuſion paſſera ſucceſſivement pluſieurs fois dans un tour du priſme, d'un *maximum* où le raïon rouge fera un écart en haut,

haut, à un autre *maximum* où ce raïon fera l'écart en bas; & que ces plus grands écarts, inégaux entr'eux, seront plus ou moins considérables selon la grandeur, l'ordre & l'inégalité des angles réfringens. La suite de ces variations sera, $\varrho = ȣ$; $\varrho > ȣ$; $\varrho = ȣ$; $\varrho < ȣ$; $\varrho = ȣ$; $\varrho > ȣ$; $\varrho = ȣ$ &c.

13. *Quatrieme remarque.* Quelle que soit la cause qui rend imperceptible la dispersion des raïons colorés dans notre prisme, je crois qu'il est permis d'en conclurre qu'une destruction totale de l'aberration de réfrangibilité n'est pas nécessaire pour donner des objectifs achromatiques, & qu'il suffiroit peut-être pour cet effet de multiplier les lentilles. Si, en gardant la proportion de sin $(\Pi + \pi)$ à sin p, au lieu de combiner trois prismes, on en combinoit *cinq*, il n'est pas douteux que la diffusion des raïons hétérogenes sous les diverses incidences en seroit beaucoup moindre. Elle diminueroit encore si au lieu de cinq prismes on en combinoit sept. D'un autre côté, sans augmenter le nombre des prismes, l'aberration de réfrangibilité diminuera aussi en diminuant les angles réfringens sous la même proportion; & comme dans les petits angles on peut prendre sans erreur les arcs eux-mêmes pour leurs sinus, rien ne seroit plus facile que de suivre la marche des raïons extrêmes, rouges & violets, à travers autant de prismes combinés que l'on voudra.

Planche II. Fig. 2. Or les lentilles alternativement convexes & concaves, dont les faces intérieures coïncident, représentent exactement une double rangée de prismes alternativement renversés; la seule différence est que dans les lentilles l'angle réfringent n'est pas constant comme dans les prismes. Mais, comme la tangente, & par conséquent aussi la perpendiculaire à chaque point des arcs de courbure, est commune aux deux lentilles dont les surfaces coïncident, il arrive qu'autant l'angle réfringent de la lentille de *crownglass* augmente lorsque le raïon s'écarte de l'axe, autant aussi l'angle réfringent du verre concave de *flintglass* augmente de son côté; en sorte que les proportions des réfractions en sens contraires restent sensiblement les mêmes.

Main-

Maintenant, si l'on prend la face du prisme pour la corde de l'arc de la moitié de la lentille, il est aisé de démontrer par la nature du cercle que cet arc est égal en degrés à l'angle réfringent du prisme, si ce prisme est isoscele; & que dans tous les cas, il est double de l'angle que cette face du prisme fait avec la perpendiculaire tirée du tranchant du prisme sur sa base. Il est également aisé de montrer qu'un raïon qui tombe sur la face du prisme parallélement à sa base, ou à l'axe AX, fait un angle d'incidence α, égal à la moitié de l'angle réfringent du prisme isoscele; ou égal à l'angle de la face du prisme scalene avec la verticale à sa base. Donc, si ce même raïon tombe sur la demi-lentille parallélement à l'axe, il y fera le même angle d'incidence i, dans le point où l'arc & sa corde ont la même perpendiculaire, c'est à dire au milieu de l'arc. De ce milieu de l'arc jusqu'à l'extrémité qui aboutit à l'axe, ou au centre de l'objectif, l'angle d'incidence du raïon parallele est plus petit sur la lentille que sur le prisme, où il reste constant; & il finit à cette extrémité-là par être nul. Il augmente au contraire successivement depuis le milieu de l'arc jusqu'à l'autre extrémité qui aboutit à la circonférence de l'objectif, où il devient précisément double de l'incidence sur le prisme.

De là il est évident que l'aberration de réfrangibilité ne sera jamais plus grande dans un objectif composé d'un nombre quelconque de lentilles dont les surfaces coïncident, que dans le même nombre de prismes combinés, si les arcs de courbure des lentilles font la mesure des angles réfringens des prismes isosceles correspondans, ou s'ils ne contiennent que le double des degrés du demi-prisme scalene qui leur correspond. Si, par exemple, on combine cinq petits prismes, dont deux seroient de *flintglass*, & les trois autres de *crownglass*, en gardant la proportion de sin $40\frac{1}{2}^{d}$ à sin 24°, ou de 16 à 10, qui répond à la dispersion produite par ces verres; & qu'on prenne l'angle réfringent du flintglass $= 2^{\circ}$, la combinaison sera:

	Crowngl.	Flintgl.	Crowngl.	Flintgl.	Crowngl.
Prismes.	$\pi = 2° 12'$;	$p = 2°$	$\pi' = 2°$	$p' = 2°$	$\pi'' = 2° 12'$,
Les demi-angles.	$1° 12' + 1°$;	$1° + 1°$;	$1° + 1°$	$1° + 1°$	$1° + 1° 12'$,
Arcs des lentilles	$2° 24' + 2°$;	$2° + 2°$,	$2° + 2°$;	$2° + 2°$;	$2° + 2° 24'$.

Non ſeulement l'aberration de réfrangibilité ne ſauroit être plus grande dans un objectif formé de ces cinq lentilles que dans le priſme compoſé de ces cinq priſmes, mais elle y ſera encore beaucoup moindre, par la raiſon que depuis la circonférence de l'objectif juſqu'au centre la grandeur des angles diminue.

Le Lunettier n'aura donc qu'à choiſir les arcs de courbures des lentilles qui lui paroîtront les plus commodes; & les combiner de maniere que la ſomme de ceux des verres concaves, ſoit à la ſomme des arcs des verres convexes, comme 5 à 8, ſi ces arcs ſont aſſez petits pour qu'on puiſſe ſubſtituer leurs ſommes à celles de leurs ſinus. La moitié de la ſomme des arcs des deux faces de chaque lentille donnera l'angle du priſme correſpondant à cette lentille; & puiſqu'il eſt très aiſé d'eſtimer, & par conſéquent d'éviter l'aberration de réfrangibilité reſtant dans un aſſemblage quelconque de priſmes pour une incidence donnée, il ſera également aiſé de l'éviter pour l'incidence parallele à l'axe dans l'objectif compoſé d'un pareil nombre quelconque de lentilles. L'ouverture que l'Artiſte prendra convenablement aux courbures, pour éviter l'aberration de ſphéricité, déterminera la longueur des raïons des faces, & ceux-ci la longueur de la lunette. Ou, ſi l'Artiſte commence par choiſir la longueur de la lunette, le nombre des lentilles qu'il voudra emploïer déterminera la longueur des raïons de convexité & de concavité dans la raiſon inverſe; & la plus grande courbure déterminera l'ouverture convenable, & par conſéquent les angles des priſmes correſpondans.

§. 14. En développant les formules de l'article 12, & en partageant l'angle de chaque priſme verticalement en deux angles égaux ou inégaux, ſi l'on nomme le premier de ces angles du côté de l'objet, i, le dernier vers l'œil, d, chacun des demi-angles intermédiaires, b;

&

& qu'on suppose les petits arcs en raison des sinus; l'équation achromatique: $\sin \rho = \sin \pi$, donne les formules suivantes:

I. à deux verres; le flintglass vers l'objet,

$$(v - r)(b + d) = (V - R)(i + b).$$

II. à deux verres; le crownglass vers l'objet,

$$(v - r)(i + b) = (V - R)(b + d).$$

III. à trois verres; le flintglass au milieu,

$$(v - r)(2b + i + d) = (V - R)\ 2b.$$

IV. à cinq verres,

$$(v - r)(4b + i + d) = (V - R)\ 4b.$$

V. à un nombre quelconque n de verres,

$$(v - r)((n - 1)b + i + d) = (V - R)((n - 1)b).$$

Si l'on suppose donc toutes les faces d'égale courbure, la formule achromatique devient,

$$(v - r)(n + 1) = (V - R)(n - 1).$$

Or, aiant à très peu près $\frac{v - r}{V - R} = \frac{10}{16}$, on auroit, $10n + 10 = 16n - 16$, ou $n = 4\frac{1}{3}$. Mais, puisque la formule suppose que la premiere & la derniere lentille est de *crownglass*, n, qui d'ailleurs doit être un nombre entier, ne sauroit être un nombre pair; on en peut donc conclure qu'en faisant toutes les faces égales, & les courbures de peu de degrés, les objectifs à *trois* verres, & ceux à *cinq*, auront une aberration de réfrangibilité très peu sensible, moindre cependant dans l'objectif à cinq verres que dans celui à trois.

15. Ce seroit sans doute un grand avantage pour l'Artiste de travailler tous ses verres sur un même raïon & dans des bassins égaux; d'ailleurs l'égalité des faces permet une plus grande ouverture, & pourvû que les raïons soient égaux entr'eux, il n'importe gueres que l'ou-

vrier se trompe même grossierement sur leur mesure précise. Mais, outre que l'égalité des faces ne détruit pas entiérement les couleurs, elle ne produiroit pas toujours l'avantage d'accourcir la lunette autant qu'il seroit possible.

En effet la longueur de la lunette, ou ce qui revient ici au même, la distance de foïer f d'un objectif composé, est déterminée par l'angle sous lequel le raïon ϱ, ou u, coupe l'axe; angle que je nommerai ϕ. Cette distance est le cosinus de ϕ, multipliée par la demi-ouverture x, & divisée par le sinus; on a $f = \frac{x \cos \phi}{\sin \phi}$.

Or, si l'on prend les petits arcs, pour leurs sinus, la nature des prismes donne les équations suivantes pour les prismes alternants, en posant l'angle de premiere incidence $= i$,

Crowngl.   *Flintgl.*   *Crowngl.* . . . &c.

$$\alpha = i;\ \beta = \frac{i}{r};\ \gamma = \pi - \beta.\ \beta' = \frac{r}{R}\gamma;\ \gamma' = p - \beta'.\ \beta'' = \frac{R}{r}\gamma';\ \gamma'' = \pi' - \beta''.$$

. . ., &c.

& lorsque le dernier verre est de crownglass, & que le nombre total des prismes est $= n$, on aura $\varrho = r\gamma^n$.

En développant donc la valeur de γ^n on a:

à deux prismes (le crownglass vers l'objet):

$$\varrho = \pm Rp \mp r\pi \pm i;$$

à 3 prismes:

$$\varrho = r\pi' - Rp + r\pi - i;$$

à 5 prismes:

$$\varrho = r\pi'' - Rp' + r\pi' - Rp - i;$$

à n prismes:

$$\varrho = r\pi^{\frac{n-1}{2}} - Rp^{\frac{n-3}{2}} + r\pi^{\frac{n-3}{2}} - Rp^{\frac{n-5}{2}} + \cdots + r\pi - i.$$

Or,

Or, en nommant d l'angle que la perpendiculaire à la derniere face fait avec la parallele à l'axe, on a l'angle $\phi = \varrho - d$, si la derniere lentille est convexe; & $\phi = d \pm \varrho$, lorsqu'elle est concàve. Donc on aura:

à deux verres:

$$\phi = r\pi - Rp - i + d;$$

à trois verres:

$$\phi = r\pi' - Rp + r\pi - i - d;$$

à cinq verres:

$$\phi = r\pi'' - Rp' + r\pi' - Rp + r\pi - i - d.$$

&c. &c.

Cette formule pour l'angle à l'axe ϕ, qui est restrainte ici au cas des surfaces coïncidentes, devient plus simple en la généralisant pour toutes les courbures, dans le cas des raïons paralleles. Car, nommant les arcs des demi-courbures c, c', c''..., on aura en substituant $c + c'$, à π, $c'' + c'''$, à p, &c.

$$\phi = r(c + c') - R(c'' + c''') + r(c^{IV} + c^{V}) - \&c. - i - d.$$

Or la combinaison $c + c'$; $c'' + c'''$; $c^{IV} + c^{V}$ &c. équivaut par rapport à l'angle à l'axe, à celle-ci:

$$i + g; \quad g + f; \quad f + d.$$

J'ai donc $i = c + c' - g$; $g = c'' + c''' - f$; $f = c^{IV} + c^{V} - d$; donc $- i - d = - c - c' + c'' + c''' - c^{IV} - c^{V}$ &c., & par conséquent

$$\phi = (r - 1)(c + c') - (R - 1)(c'' + c''') + (r + 1)(c^{IV} + c^{V}) - \&c.$$

Soit maintenant la somme des arcs des lentilles convexes, ou de leurs sinus, $= \Pi$: celle des arcs concaves, ou, ce qui revient au même, des trenchans des prismes de *flintglass* $= P$; on aura donc:

$$\phi = (r - 1)\,\Pi - (R - 1)\,P.$$

Et en prenant pour satisfaire à l'équation achromatique, $P = \frac{5}{8}\Pi$, on aura $\phi = (0{,}526 - 0{,}3575)\,\Pi$; $= 0{,}1685\,\Pi$, de sorte que l'angle

gle à l'axe ſera à peu près $\frac{1}{6}$ de la ſomme des arcs convexes de crownglaſs.

Si l'on faiſoit donc toutes les faces des verres d'un objectif égales entr'elles, on auroit à *trois* verres, $P = \frac{1}{2}\Pi$; ce qui donneroit $\phi = 0,526\,\Pi - 0,572 \times \frac{1}{2}\Pi$, ou $\phi = 0,24\,\Pi$. Au contraire à *cinq* verres on auroit $P = \frac{2}{3}\Pi$; par conſéquent $\phi = 0,526\,\Pi - 0,572 \times \frac{2}{3}\Pi$, ou $\phi = 0,145\,\Pi$. Or, plus l'angle ϕ eſt grand, plus la diſtance focale eſt petite; il eſt donc évident que l'égalité de toutes les faces donneroit une lunette plus courte, ſi l'on combine trois lentilles, & plus longue, ſi l'on en combine cinq, que ne ſera la lunette où les arcs des faces auront entr'eux le rapport que la diſperſion des verres preſcrit, ſavoir $P = \frac{5}{8}\Pi$.

16. Comme on ne gagne rien pour le raccourciſſement de la lunette à faire les faces d'une lentille de différentes courbures, & que l'on gagne une plus grande ouverture à faire ces faces égales; il ſera plus avantageux dans la pratique de faire toutes les lentilles de *crownglaſs* d'un même raïon, & toutes celles de *flintglaſs*, auſſi d'un ſeul raïon tel, que ce dernier multiplié par le nombre des faces convexes, ſoit au premier multiplié par le nombre des faces concaves, comme la diſperſion du cryſtal, eſt à celle du verre commun, c'eſt à dire, environ comme 8 à 5. Soit f le raïon commun aux lentilles convexes & leur nombre N; g le raïon commun aux lentilles concaves & leur nombre n; on aura $2gN : 2fn = 8 : 5$, ou $g = \frac{1,6\,fn}{N}$; ce qui donne

à 2 verres: - - - - $g = 1,6f$,
à 3 verres: - - - - $g = 0,8f$,
à 5 verres: - - - - $g = 1,066f$,
à 7 verres: - - - - $g = 1,2f$,
&c. &c.

17. Cette derniere méthode a ſur celle de l'Article 14, les avantages ſuivans. 1°. Elle eſt plus conforme à la théorie, & détruit par

par conféquent mieux les couleurs. 2°. En emploïant ici *trois* lentilles, on évite l'inconvénient des anneaux colorés qui peuvent réfulter du contact des verres. 3°. Elle donne à *cinq* lentilles les raïons des faces plus grands que ne feroit le raïon commun dans l'autre méthode, pour un objectif d'un même foïer; elle permet par conféquent une plus grande ouverture.

D'un autre côté les avantages de la premiere méthode sont: 1°. la facilité de l'exécution qui n'exige qu'un feul raïon. 2°. que l'erreur de l'ouvrier dans la longueur précife du raïon n'influe point fur la bonté de l'objectif. 3°. qu'à *trois* lentilles on a pour un objectif d'un même foïer un plus long raïon, ce qui permet une plus grande ouverture, & feroit avantageux dans les petites lunettes. 4°. qu'à *cinq* lentilles, on aura au contraire un raïon plus court; ce qui facilitera l'exécution des grandes lunettes; les arcs de courbures étant affez petits, pour admettre la plus grande ouverture poffible.

Au reste, l'une & l'autre méthode fuppofe que dans les objectifs combinés de plufieurs verres l'aberration de fphéricité foit affez infenfible, pour admettre des lentilles ifofceles; c'eft ce que je me propofe de rechercher dans un autre Mémoire; il n'eft queftion dans celui-ci que de la réfrangibilité.

18. Enfin, fi la méthode de fubftituer les prifmes aux courbures fphériques n'eft pas dans toute la rigueur géométrique, il y a un moïen aifé de la rendre exacte. Il ne faut pour cela que chercher la valeur des angles π, p, π, &c., pour le prifme que forme le concours des tangentes tirées aux deux points des faces que le raïon de lumiere coupe en traverfant la lentille.

Soient ces points q & Q; les raïons des faces, $pq = f$, PQ $= f'$; le chemin du raïon dans la lentille $qQ = e$. Soit tirée qm, parallele à l'axe. Si l'on nomme i l'angle d'incidence; μ & λ, les angles que le raïon incident, & le réfracté, font avec la parallele à l'axe AX; la demi-ouverture O$m = x$. On a d'abord $\pi = c + c'$. Planche II. Fig. 3.

Or,

Or, lorsque les ouvertures Om, OQ, sont égales, on a $c : c' = \frac{1}{f} : \frac{1}{f'}$. Mais ces ouvertures sont entr'elles comme x à x — Qm; & l'on a Q$m = e \sin \lambda$. Or $\lambda = i - \frac{i}{r} \mp \mu$; donc, en mettant le petit angle λ, pour son sinus, on aura:

$$\pi = \frac{x}{f} + \frac{x - ei + \frac{ei}{r} \pm e\mu}{f'},$$

$$p = \frac{x}{f''} + \frac{x - e'\gamma + \frac{e'r\gamma}{R} \pm e'\mu'}{f'''},$$

$$\pi' = \frac{x}{f^{IV}} + \frac{x - e''\gamma' + \frac{e''R\gamma'}{r} \pm e''\mu''}{f^{V}},$$

&c. &c.

Ou, en négligeant les petits termes affectés de e, (qui d'ailleurs par le développement des γ, γ', γ'', &c. s'entredétruisent sensiblement à l'exception des $\frac{e\mu}{f}$) on aura pour l'incidence parallele à l'axe, (art. 15.)

$$\frac{\Phi}{x} = (r-1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right) - (R-1)\left(\frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''}\right) + (r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}} - \frac{1}{f^{V}}\right)$$
$$- \&c.$$

pour un nombre quelconque de lentilles combinées. Equation qui donne l'angle Φ en minutes, si on divise Φ = par $\frac{10000}{2,909}$, c'est à dire, par 3438.

Et

Et puisqu'on a la distance focale

$$F = \frac{x \cos\phi}{\sin\phi} = \frac{x\sqrt{(1-\phi\phi)}}{\sin\phi},$$

si l'on met l'angle au lieu du sinus, on a, en négligeant $\phi\phi$:

$$F = \frac{1}{(r-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f^{I}}\right)-(R-1)\left(\frac{1}{f^{II}}+\frac{1}{f^{III}}\right)+(r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}}+\frac{1}{f^{V}}\right)}$$

— &c.

ce qui est exactement la formule connue de la distance focale.

19. Pour conclure ce Mémoire, je mettrai sous les yeux la distribution des arcs de lentilles, pour des objectifs de 2, 3, 5 & 7 verres, d'un même foïer, en supposant le rapport des dispersions comme 8 à 5, & les arcs assez petits pour représenter leurs sinus. Les nombres seront telle quantité ou partie de degrés que l'on voudra.

	Crowngl.	*Flintgl.*	*Crowngl.*	*Flintgl.*	*Crowngl.*	*Flintgl.*	*Crowngl.*
1°. *Lentilles coïncidentes,* Degrés de courbure des faces.	11 + 5;	5 + 5;					
	3 + 5;	5 + 5;	5 + 3;				
	3 + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{1}{2}$ + 3;		
	3 + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	$1\frac{2}{3}$ + 3;
			&c.	&c.			
2°. *Lentilles isosceles,* pour diminuer les courbures, & l'aberration de sphéricité.	8 + 8;	5 + 5;					
	4 + 4;	5 + 5;	4 + 4;				
	$2\frac{2}{3}$ + $2\frac{2}{3}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{2}{3}$ + $2\frac{2}{3}$;	$2\frac{1}{2}$ + $2\frac{1}{2}$;	$2\frac{2}{3}$ + $2\frac{2}{3}$;		
	2 + 2;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	2 + 2;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	2 + 2;	$1\frac{2}{3}$ + $1\frac{2}{3}$;	2 + 2;
			&c.	&c.			
3. *Lentilles égales.*	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$;	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$:	$4\frac{1}{2}$ + $4\frac{1}{2}$;				
	$2\frac{7}{12}$ + $2\frac{7}{12}$;	$2\frac{7}{12}$ + $2\frac{7}{12}$;	$2\frac{7}{12}$ + $2\frac{7}{12}$;	$2\frac{7}{12}$ + $2\frac{7}{12}$;	$2\frac{7}{12}$ + ;		
	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$;	$1\frac{5}{6}$ + $1\frac{5}{6}$.

CON-

CONJECTURE PHYSIQUE

SUR

QUELQUES CHANGEMENS ARRIVÉS DANS LA SURFACE DU GLOBE TERRESTRE.

PAR M. SULZER.

La ſurface du globe terreſtre, telle qu'elle eſt aujourd'hui, montre des traces de pluſieurs révolutions remarquables, auxquelles on doit attribuer ſon état actuel. Toute la Terre, à l'exception d'un petit nombre d'endroits, eſt couverte d'une croute de décombres, dont l'épaiſſeur varie. Dans quelques endroits, cette croute conſiſte dans des couches aſſez régulieres de terre, de ſable, de gravier, de pierres, poſées horizontalement les unes ſur les autres, mais très rarement dans l'ordre des gravités ſpécifiques de ces couches. Dans d'autres endroits, cette croute eſt un amas de matieres hétérogenes que le hazard paroît y avoir jettées. On trouve diverſes eſpeces de terres, de ſables, de cailloux, mêlées enſemble; & au milieu même de cet amas hétérogene on trouve quelquefois des reſtes de matieres végétales & animales. Enfin, des amas immenſes de ſable couvrent dans pluſieurs endroits la ſurface du globe à des profondeurs très conſidérables. L'eſprit le moins philoſophique ſent que cette croute n'eſt pas la matiere primitive dont la terre a été couverte dès ſa premiere formation. Ces ſables qui couvrent des régions entieres, ne ſont que des rochers, des cailloux, & des criſtaux concaſſés; & ces cailloux qui, dans bien des endroits, couvrent les campagnes, ne ſont que des morceaux détachés de quelques rochers, qui forment la ſubſtance des montagnes.

De

De cette conſidération naît la queſtion ſuivante: *Par quelle révolution la terre a-t-elle été couverte de cette croute hétérogene?* On ſait quelles ſont les principales hypotheſes par leſquelles les Phyſiciens ont prétendu réſoudre ce grand problême, & je crois qu'on m'accordera ſans difficulté qu'aucune n'eſt ſuffiſante pour répondre à la queſtion conçue dans cette généralité. Ce problême m'avoit occupé depuis bien des années, lorſque dans un voyage que je fis l'année paſſée aux montagnes de *L'Hercynie*, j'eus occaſion d'examiner de nouveau pluſieurs particularités rélatives à cette matiere. Des obſervations faites au pied des montagnes, me firent naître des conjectures qui m'ont paru très propres à répandre du jour ſur les objets deſquels dépend la ſolution du problême. Je propoſerai ici ces conjectures dans l'ordre qu'elles ſe ſont préſentées à mon eſprit. Pour bien ſaiſir ce que j'ai à dire, il faut avoir devant les yeux la figure ci-jointe, qui repréſente la partie quelconque d'une ſection du globe terreſtre. Planche II. Fig. 4.

AB repréſente un arc d'un grand cercle du globe, qui friſe la ſurface de la mer: le point A eſt pris ſur la côte, & la ligne courbe ACDEF &c. repréſente la maniere dont le terrein s'éleve ſucceſſivement depuis les côtes juſqu'au ſommet le plus élevé d'une chaîne de montagnes. Que l'on s'imagine maintenant que la chaîne des montagnes repréſentées dans la figure, dénote cette portion des montagnes de l'Hercynie qui eſt entre le village d'*Ilſebourg* & le ſommet du *Brocken*, appellé auſſi *Blocksberg*, de ſorte que M ſoit le ſommet de cette montagne, & D l'endroit où l'on ſort de ſes défilés, pour arriver à Ilſebourg; & que la ligne DCA repréſente le terrein depuis ces montagnes juſqu'à la mer.

Dans le voyage dont j'ai fait mention, je deſcendis du ſommet du *Blocksberg* M, par le chemin qui conduit à Ilſebourg, ſitué près du débouché D; c'eſt ce débouché qui m'a frappé & qui m'a fait faire la premiere réflexion lumineuſe ſur la matiere que je traitte ici. Depuis la vallée F juſqu'à l'entrée dans la plaine D, on paſſe par un chemin aſſez uni entre la montage DEF, & une autre preſque égale & ſembla-

ble qui est de l'autre côté du chemin, ayant la montagne DEF à gauche, & l'autre à droite. Ces deux montagnes sont fort proches l'une de l'autre, & forment une espece de porte, par laquelle on sort des défilés de l'Hercynie pour entrer dans la plaine. Un petit ruisseau passe le long de ce chemin.

La premiere chose qui me frappa dans cet endroit est l'idée, que si on fermoit ce passage par un mur, la petite riviere qui passe par la vallée F, & qui sort en D, ne trouvant plus d'issue, se gonfleroit & convertiroit la vallée EFG en un lac fort profond. Que l'on s'imagine maintenant, que les eaux de ce lac trouvent quelque fente dans la base de la montagne DEF, par laquelle, elles puissent sortir. On conçoit que la grande pression que l'eau exerceroit contre le fond d'un lac dont la profondeur est de plusieurs centaines de pieds, la feroit sortir en D avec une impétuosité à laquelle rien ne résisteroit. Elle ne manqueroit pas d'élargir peu à peu le passage; & cela fait, elle emporteroit tout ce qu'elle trouveroit en son chemin, charriant & terres, & sables, & pierres, en si grande quantité & avec tant de force, que l'écoulement fini, on trouveroit la campagne entre D & C couverte de ces décombres. L'ouverture en D, au pied de la montagne, se seroit aggrandie peu à peu par l'impétuosité des eaux; une partie de la montagne ayant perdu sa base, se seroit écroulée; & les décombres de cet écroulement se seroient répandues sur la plaine.

Ces remarques m'ont d'abord fait comprendre comment une campagne, comme celle qui va depuis D vers C, peut être couverte de décombres tirées de montagnes assez éloignées, & comment ces décombres peuvent être amassées jusqu'à des hauteurs considérables. J'ai compris ensuite qu'il peut y avoir eu des cas, où l'amas de ces décombres aura été si grand, qu'il aura comblé le fond de l'Océan près des côtes, & obligé ses eaux à rétrograder.

Ayant poussé ensuite plus loin ces premieres réflexions, il m'a paru qu'il est très possible de déduire l'état actuel de la surface du globe

be

be d'un grand nombre d'inondations ſemblables, qui ſe ſeront ſuccédé les unes aux autres dans de longs intervalles. Je propoſerai donc la conjecture qui m'a paru ſuffire pour réſoudre notre problême dans toute ſon étendue.

Je ſuppoſe d'abord que, dans la conſtitution primitive de la terre, toute ſa ſurface a été couverte d'eau, à l'exception des endroits où ſont aujourd'hui les grandes chaînes de montagnes, leſquels endroits formoient alors autant d'iles au milieu de l'Océan. Ainſi, dans le cas particulier auquel ſe rapporte notre figure, toute l'étendue de pays de A juſqu'en D a été ſous l'eau. Non pas que les eaux de l'Océan ayent jamais couvert la plaine ACD, telle qu'elle eſt aujourd'hui; mais parce que toute la maſſe des décombres qui ſe trouve entre la ligne AB & la ligne ACD, n'y étoit pas originairement. Cette ſuppoſition ne renferme non ſeulement rien qui ne ſoit probable, mais elle devient preſque une vérité démontrée, quand on conſidere, que dans tous les pays plats, on peut creuſer juſqu'à des profondeurs qui ſont au deſſous du niveau actuel de la mer, ſans qu'on trouve ni terre, ni aucune autre matiere qu'on puiſſe prendre pour originaire. Il eſt de fait que les terres qui ſont aujourd'hui le ſol des pays plats, ſont en grande partie des décombres, qui par conſéquent n'y ont pas toujours été. Cela nous fait voir comment les eaux de l'Océan ont pû ſuffire pour couvrir toute la ſurface de la terre à l'exception des hautes montagnes. Si encore aujourd'hui on pouvoit ôter partout les terres hétérogenes des endroits où elles ſont dépoſées, & les remettre ſur les montagnes; la quantité d'eau répandue ſur ce globe, ſuffiroit pour couvrir toutes les plaines.

Dans cet état primitif, les vallées que forment les montagnes n'étoient pas encore ouvertes. Toutes les montagnes préſentoient dans leurs contours des promontoires inacceſſibles; les vallées intérieures étoient toutes remplies d'eau, & formoient par conſéquent autant de lacs, dont les eaux n'avoient aucun écoulement. La figure repréſente de pareils lacs GHI, & IKL. Il n'y avoit point alors de rivieres

vieres ſur la terre, vû que les montagnes n'étoient point ouvertes encore, pour donner paſſage aux eaux des lacs. Les vallées recevoient toutes les eaux des ſources. Je m'imagine que dans pluſieurs endroits ces lacs ont pû former des caſcades le long des promontoires; de ſorte que dans cet état même, quoiqu'il n'y ait pas eu de rivieres, il y a eu une circulation continuelle des eaux à l'Océan, & de l'Océan aux ſources, moyennant ces caſcades & l'évaporation. Remarquons encore que quelques uns de ces lacs ont pû avoir une profondeur de quelques milliers de pieds. Car pluſieurs vallées entre les grandes montagnes ont actuellement cette profondeur. Un lac de cette profondeur doit avoir exercé une preſſion prodigieuſe, tant contre le fond, que contre les côtés proches de ce fond. Circonſtance eſſentielle, à laquelle il faut faire une attention particuliere.

A' ces ſuppoſitions, contre leſquelles les Phyſiciens n'auront pas d'objection importante à faire, il faut joindre une obſervation connue de tous ceux qui ont voyagé dans les grandes montagnes: c'eſt que les rochers, qui ſont proprement la ſubſtance des montagnes, expoſés tantôt aux rayons du ſoleil, tantôt à l'action de l'humidité, ſont ordinairement fendus en tout ſens, & que leur ſurface s'amollit peu à peu par la variation continuelle du chaud & du froid, de la ſéchereſſe & de l'humidité. Ces cauſes produiſent deux faits fort eſſentiels dans la matiere que nous traitons. On comprend par-là qu'au fond des lacs dont nous avons parlé, il ſe forma peu à peu un amas de pierres grandes & petites, tombées des ſommets des montagnes, & un ſédiment conſidérable de ſables, de terres, & d'argilles produites par la diſſolution des rochers.

Arrêtons-nous un moment ici, & conſidérons maintenant la Terre dans cet état primitif. Nous la voyons couverte d'eau partout. *Omnia pontus erant.* Dans cet Océan on voit peut-être une vingtaine d'Iles très hautes. En Europe les *Pyrénées*, les *Alpes*, les montagnes de *Boheme*, de *l'Hercynie*, de *Thrace*, forment ces iles. L'Océan lavant les pieds de toutes ces montagnes, il n'eſt pas ſurprenant qu'on

qu'on trouve encore aujourd'hui des coquilles & des poiſſons de mer aux endroits où la mer a ſéjourné autrefois. Dans chacune de ces iles, il y avoit alors un grand nombre de lacs d'une profondeur très conſidérable; & les fonds de ces lacs étoient remplis de terres, de ſables & de pierres de toute grandeur. Dans cet état, des cauſes non ſeulement très naturelles, mais encore très ordinaires, peuvent avoir produit des changemens ſucceſſifs, leſquels ont donné à la Terre ſa face actuelle.

Qu'un tremblement de terre, par exemple, ait fendu un promontoire, qui formoit alors le bord extérieur d'un lac: voilà des eaux qui en ſortent avec une impétuoſité prodigieuſe, charriant tout ce qui étoit dépoſé à leur fond, & détachant encore d'autres matieres qui ſe trouvent ſur leur paſſage. Toutes ces matieres ſont portées dans la mer; & dépoſées là, elles forment de nouvelles iles dans l'Océan. Mais ces nouvelles iles ne ſont compoſées que de décombres. A cette premiere ſortie des eaux, d'autres ſuccedent, & à celles-ci encore d'autres, juſqu'à ce que tous les lacs d'une de nos grandes iles ſoyent écoulés; que ces écoulemens ſe faſſent dans des tems plus ou moins éloignés les uns des autres, & on comprendra ſans peine, comment la partie de l'ancien Océan, qui occupoit l'eſpace d'une ile à l'autre, par exemple, celui qui eſt entre les *Pyrénées* & les *Alpes*, a pû être rempli de décombres au point de combler le fond de l'Océan, & de former des terres habitables.

Voilà en gros ma conjecture ſur l'origine de cette partie de la terre, qui conſiſte viſiblement en décombres. Cette hypotheſe très ſimple, & à ce que je crois, très probable, ſuffit pour expliquer tous les faits particuliers rélatifs à cette matiere. Il me faudroit paſſer de beaucoup les limites d'un Mémoire académique pour prouver cela dans tous les détails dont la matiere eſt ſuſceptible. D'ailleurs, il eſt très facile de faire l'application de cette hypotheſe à des cas particuliers. Je me contenterai donc d'en tirer les conſéquences les plus immédiates & les plus remarquables.

Pre-

Premierement, notre ſyſtême explique un fait qu'on a fort mal compris juſqu'à préſent. Preſque tous les peuples de la terre parlent de déluges, ou grandes inondations arrivées anciennement dans leurs pays. Outre ces déluges fameux *de Noé*, *d'Ogygès*, *de Deucalion*, il y en a eu d'autres dont parlent les peuples de la Chine & ceux de l'Amérique. Ceux qui prétendent que le déluge de Noé a été univerſel, ont crû trouver une confirmation de cette hypotheſe dans ces traditions des autres peuples. Mais, comme l'univerſalité d'un déluge quelconque eſt abſolument inſoutenable, il faut chercher une autre explication à cette multiplicité de déluges. Notre hypotheſe la fournit. Ces déluges n'ont été autre choſe que des éruptions particulieres de quelques grands lacs. Ainſi le déluge de Deucalion a été l'éruption du lac dont le deſſéchement forma les campagnes de la Theſſalie. C'eſt par un pareil événement que le Pont Euxin, qui autrefois étoit un lac enfermé dans des montagnes, s'ouvrit le paſſage dans la Mer *Egée*, & cauſa le déluge dont parle Polybe. Ces éruptions produiſirent une double augmentation de terrein ſec. D'un côté, les fonds des lacs furent deſſéchés, & de l'autre les décombres portées dans les endroits où l'Océan a eu peu de profondeur, y formerent un ſol ſec. C'eſt très probablement de cette derniere façon que fut formé tout le plat pays de l'Egypte.

On conçoit fort bien comment un peuple peu répandu, & occupant le pays ſitué entre la mer & un grand promontoire, a pû croire qu'une pareille inondation ait été générale. Il eſt naturel que Noé & Deucalion ayent crû bonnement, qu'ils étoient les ſeuls hommes de la terre échappés de ces terribles cataſtrophes.

Notre hypotheſe fournit, en ſecond lieu, une explication fort aiſée, non ſeulement des pétrifications dont j'ai déjà parlé, mais encore de tout ce qu'on a obſervé touchant les corps hétérogenes dont les diverſes couches de terres ſont remplies. Dans une diſſertation ſur l'origine des Montagnes, que j'ai publiée il y a près de vingt ans, j'ai allégué quelques faits obſervés dans les Alpes, qui juſqu'à préſent ſe ſont

ſont refuſés à toutes les hypotheſes connues ſur ces matieres. Je me flatte que quiconque voudra ſe donner la peine de réflêchir ſur ces faits, après avoir lû la conjecture expliquée ici, trouvera leur explication ſans difficulté. Qu'une montagne, par exemple, élevée de trois mille pieds au deſſus du niveau de la mer, ait pû être couverte par une inondation, d'un amas prodigieux de terres & de cailloux mêlés enſemble; c'eſt une choſe facile à concevoir, dès que l'on ſait qu'à une diſtance médiocre de cette montagne il y a des vallées dont le ſol eſt de deux mille pieds plus élevé que la montagne dont on vient de parler. L'éruption de ces vallées a donc fort bien pû produire l'effet dont il s'agit.

Quant aux corps marins que l'on trouve en terre dans les endroits peu élevés, j'ai déja remarqué comment cela a dû arriver dans notre ſyſteme. Pour ceux que l'on trouve à des hauteurs conſidérables, il faut réflêchir ſur l'énorme impétuoſité de l'eau qui ſort par une preſſion de quelques milliers de pieds. Or une telle impétuoſité a dû accumuler à de très grandes hauteurs la maſſe de terre que l'eau rencontroit en ſortant par des ouvertures faites aux pieds des montagnes.

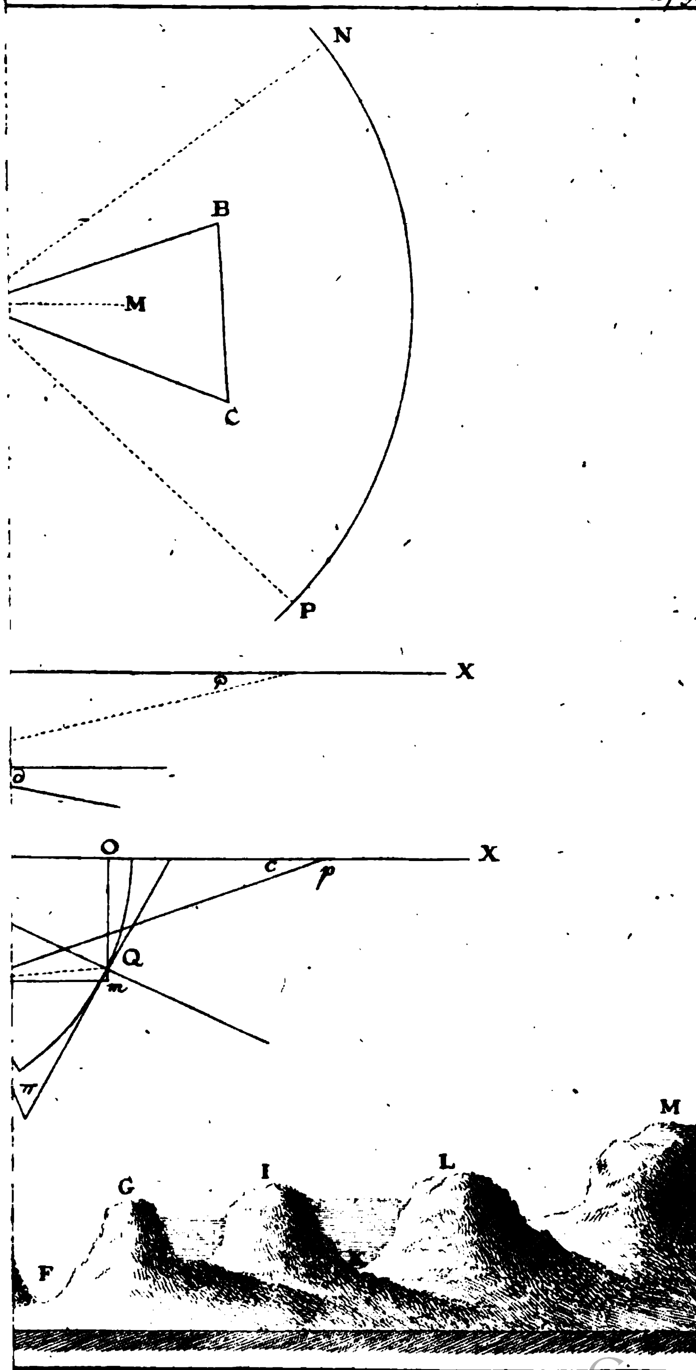
Ne pourroit-on pas, en troiſieme lieu, rendre raiſon par notre hypotheſe de l'exiſtence des grands lacs aux pieds des Alpes? Le Lac *de Geneve*, celui *de Conſtance*, celui *de Zuric*, celui *des quatre villes forêtieres*, celui *de Thun*, le *Lago maggiore*, ſe trouvent viſiblement aux gorges des montagnes: & quiconque a été ſur les lieux, tombera facilement d'accord, qu'il eſt très probable que ces grands lacs ont été creuſés par la force des eaux ſorties des vallées voiſines avec une grande impétuoſité avant que ces vallées ayent été entierement ouvertes.

Je remarque, en quatrieme lieu, que la déclinaiſon de la ligne horizontale qu'on obſerve preſque dans toutes les couches des rochers qui ſe trouvent à la ſurface des montagnes, s'explique très naturellement dans notre ſyſteme. Car les écoulemens des eaux ont dû cauſer de

de plus d'une maniere des éboulemens considérables dans les montagnes. Les couches formées par les dépôts ou sédimens de plusieurs inondations successives ont été horizontales dans leur origine ; un écroulement survenu a nécessairement changé cette position.

On voit bien que les événemens dont je viens de parler, ont dû se succéder dans des intervalles de plusieurs siecles. L'histoire ne nous a conservé probablement que les dernieres grandes éruptions. Il est probable, que longtems avant Noé, il y a eu plusieurs déluges en Asie, & plusieurs autres dans la Grece avant Deucalion. Car il n'y a pas la moindre raison de croire que l'état primitif de la Terre, tel que nous l'avons supposé, n'ait duré que peu de tems ; & que les changemens qui ont donné à la Terre sa forme actuelle, se soyent succédé dans des espaces de tems peu considérables. Cela peut & doit avoir occupé bien des siecles. Il arrive même encore aujourd'hui, quoique bien en petit, des révolutions semblables à celles dont je viens de parler. Dans des pays montagneux, il y a quelquefois des inondations qui ajoutent de nouvelles couches aux campagnes, qu'elles désolent en couvrant les champs de terre & de cailloux, à la hauteur de plusieurs pieds.

Je m'arrête ici, parce que je crois qu'il seroit superflu d'entrer dans un plus grand détail. Les faits généraux que je viens d'expliquer par mon hypothese suffisent pour juger de sa valeur, & pour en montrer l'application à des faits particuliers.


N
B
M
C
P
X
X
O
c
p
Q
m
π
M
G
I
L
F

DEUX DESCRIPTIONS DE CETTE ESPECE D'HOMMES, QU'ON APPELLE NEGRES-BLANCS, COMMUNIQUÉES PAR M. DE CASTILLON. (*)

Je crois devoir communiquer à l'*Académie* deux descriptions que j'ai reçues de *Surinam*. Elles regardent cette espece d'hommes qu'on appelle *Negres-Blancs*. Une de ces descriptions est de M. *Ernest* CASTEL, homme de Lettres établi à *Paramaribo:* l'autre est de M. *Philippe* FERMIN, Docteur en Médecine à *Mastricht*. Cet Observateur, bien connu dans la République des Lettres, a passé, comme on sait, plusieurs années à *Surinam*. L'un & l'autre est témoin oculaire de ce qu'il rapporte.

Le Negre-blanc vû par M. CASTEL, est fils d'un Negre & d'une Négresse de plus noirs. Il a la peau *blanche comme la cire*, la laine & tous les poils *blancs*, les yeux rouges & chassieux. Il voit beaucoup mieux à la clarté de la lune qu'à la lumiere du soleil. M. CASTEL juge que ce Negre-blanc étoit l'an passé (1763) agé d'environ trente ans. (**)

M. FERMIN a considéré avec son attention ordinaire un Negre-blanc appellé *Jean* WITT, demeurant au Plantage nommé *Vos-*

(*) Lû en 1764.

(**) Quelques affaires particulieres contenues dans la Lettre de M. CASTEL, qui renferme cette rélation, m'ont empêché de la déposer aux Archives de l'Académie. J'y ai déposé celle de M. FERMIN.

sembourg. Le pere & la mere de *Jean* WITT sont créoles & très noirs. Sa mere a mis au monde huit enfans; le premier & le quatrieme, mulâtres; le second, le sixieme, le septieme & le huitieme, noirs; le troisieme étoit cette Négresse blanche, dont il est parlé dans l'*Histoire* de l'ACADÉMIE *des Sciences de Paris* pour l'an 1734 (*); le cinquieme est celui dont il s'agit à présent.

Il naquit le 12 Mars 1738, avec tous les traits qui distinguent les Negres-blancs. Il a le *nés extrêmement gros*, *plat*, & *large*; *les levres fort grosses*; & les deux premieres dents de la machoire supérieure beaucoup plus longues & plus larges, que les autres. Cette singularité semble appartenir à l'individu; mais celle qu'on remarque dans les yeux, paroit tenir à l'espece, si les Negres-blancs constituent une espece.

Les yeux de *Jean* WITT ont la tunique extérieure, celle que les Anatomistes nomment *conjonctive* ou *albuginée*, parsemée de filamens rougeâtres; l'iris percée d'un trou au milieu, & *marbrée de gris & de blanc*; & la *prunelle couleur de feu*, & d'un éclat pareil à celui du plus beau brillant: elle répand dans l'obscurité une lumiere très vive, qui disparoit au grand jour. Cet homme apperçoit les objets en tout tems, mais confusément de jour, & distinctement dans les ténebres. Quand il veut fixer sa vue pour marcher ou pour considérer quelque chose, il tourne l'iris de côté, *comme les crabes*. Sa tête & toutes les parties où les hommes ont ordinairement du poil, en sont bien fournies; & ce poil, même celui de la tête, est *blanc* & plus semblable au poil de chevre qu'à la laine.

Jean WITT a cinq pieds & quatre pouces; il est très bien fait, & sa peau est *blanche comme la cire*.

Je connois encore trois descriptions de ces hommes singuliers: elles sont courtes; & l'on sera, je pense, bien aise de les trouver ici, pour

(*) Voyez plus bas.

pour voir d'un coup d'œil les différences & les conformités; j'ai distingué les principales par le caractere italique.

La premiere rélation est de M. *de* TREYTORENS, Médecin à *Surinam*, témoin oculaire (*):

„Il y avoit, dit l'Historien, au tems que la rélation a été écri- „te, 9 ou 10 mois qu'une Négresse esclave, grande & bien faite, & „qui avoit déjà eu quelques enfans, en accoucha d'un qui parut fort „singulier." (Cet Enfant est la sœur de *Jean* WITT, décrit par M. FERMIN.) „Il étoit grand, bien formé, très-blanc, couleur qui „lui a toujours duré. Toute sa phisionomie, tous les traits de son „visage étoient d'un Negre, *les levres grosses & relevées*, *le nés écrasé & „camus*. De plus il avoit comme les autres Negres de la laine à la tê- „te, mais une laine aussi *blanche* que de la neige - - - „Le blanc de „ses yeux étoit fort clair, ce qui n'est pas rare, mais son Iris étoit d'un „rouge fort vif, & couleur de feu, *marbrée seulement de quelques „traits blancs tirants sur le bleu; la prunelle* que nous ne connoissons „que noire, & qui doit l'être puisque c'est un vuide, *étoit aussi très „rouge*. Cet enfant ne vouloit pas ouvrir les yeux quand il faisoit un „Soleil vif & violent; hors de-là il les ouvroit, & voyoit dans un „lieu peu éclairé. Lorsqu'il vouloit fixer la vue sur quelque objet, „son Iris & sa prunelle prenoient un mouvement extrêmement rapi- „de, comme d'un tournoyement autour de leur centre; & il sembloit „que l'Enfant se fût mis tout d'un coup à chercher quelque chose des „yeux avec beaucoup d'inquiétude."

M. *de* VOLTAIRE a inséré la seconde rélation dans ses *Mélanges d'Histoire*, *de Littérature*, & *de Philosophie* (**); la voici.

„J'ai vû il n'y a pas longtems" (en 1744) „à Paris un petit „animal blanc comme du lait, avec un mousle taillé comme celui des

(*) Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'an 1734, pag. 15 & 16, de l'édition in 4to.

(**) Collection complette de ses Oeuvres, premiere édition, 1756, pag. 326 - - - 336.

„Lapons, ayant comme les Negres de la laine frisée sur la tête, mais „une laine beaucoup plus fine, & qui est de la blancheur la plus éclatante. „Ses cils & ses sourcils sont de cette même laine, mais non frisée; ses „paupieres d'une longueur qui ne leur permet pas, en s'élevant, de „découvrir tout l'orbite de l'œil, lequel est d'un rond parfait. Les „yeux de cet animal sont ce qu'il y a de plus singulier: l'iris est d'un „rouge tirant sur la couleur de rose: la prunelle, qui est noire chez „nous, & chez tout le reste du monde, est chez eux d'une couleur „aurore très-brillante. Ainsi, au lieu d'un trou percé dans l'iris, à la „façon des Blancs & des Negres, ils ont une membrane jaune trans-„parente, à travers laquelle ils reçoivent la lumiere - - - Ils regar-„dent, *ainsi que marchent les crabes*, toujours de côté - - - Mais „ils ne peuvent soutenir la lumiere du Soleil: ils ne voyent bien que „dans le crépuscule - - - Cette espece est méprisée des Negres, plus „que les Negres ne le sont de nous - - - On avoit transporté en „Amérique un de ces petits Maures blancs. On trouve dans les Mé-„moires de l'Académie des Sciences, qu'on en avoit donné avis à M. „HELVETIUS. (*)"

La troisieme description se trouve dans la *Vénus physique* de M. *de* MAUPERTUIS, (**) qui ne dit pas s'il a vû ou non le petit mon-stre dont il parle, & qui fut apporté à Paris en 1744.

„C'est (dit cet Auteur) un enfant de 4 ou 5 ans qui a tous les „traits des Negres, & dont une peau très-blanche & blafarde ne fait „qu'augmenter la laideur. Sa tête est couverte d'une laine blanche „tirant sur le roux: ses yeux d'un bleu clair paroissent blessés de l'éclat „du jour: ses mains grosses & malfaites ressemblent plutôt aux pattes „d'un animal qu'aux mains d'un homme. Il est né, à ce qu'on assu-„re, de pere & de mere afriquains & très-noirs. - - - „Quoique, (le

(*) C'est celui que M. *de* TREYTORENS a décrit; il étoit *né* en Amérique. Voyez ci-dessus.

(**) Vénus physique, seconde partie, chap. 4. pag. 115. 116. 117 &c. édition de Lion, 1756.

(le Negre de cette espece) „qui est actuellement en Espagne, & que „Milord MARÉCHAL m'a dit avoir vû, soit bien plus agé que celui „qui est à Paris, on lui voit le même teint, les mêmes yeux, la mê„me phisionomie.“

Qu'il me soit permis d'ajouter quelques réflexions à ces descriptions.

1°. Mrs. FERMIN & CASTEL ont-ils vû le même homme, ou deux hommes différents? (*) Le *petit monstre* de M. *de* MAUPERTUIS est-il le même que le *Maure blanc* de M. *de* VOLTAIRE? On croiroit que c'est le même, puisque l'un & l'autre ont paru à Paris la même année, & qu'on ne dit point qu'il en parut deux. Cependant l'un avoit les yeux *d'un bleu clair*, & l'autre l'iris *rouge* & la prunelle *aurore:* l'un avoit la tête couverte d'une laine *blanche tirant sur le roux*, & l'autre d'une laine *de la blancheur la plus éclatante;* & je n'ose croire ni que M. *de* VOLTAIRE a mal vû, ni que M. *de* MAUPERTUIS a été mal informé.

2°. On peut conclure des rélations que nous avons jusqu'à présent, que les traits de Negre, la blancheur de la peau & du poil, la foiblesse de la vue, & la couleur extraordinaire de l'iris & de la prunelle, appartiennent à la race des Negres-blancs.

3°. Il n'est pas fort rare de voir naître des Negres-blancs dans les familles noires. Une seule femme en a mis deux au monde à *Surinam* dans l'espace de six ou huit ans. La même chose arrive en *Afrique* „dans des endroits où il ne va jamais des Blancs.“ C'est ce qu'on a assuré à M. de TREYTORENS (**), à M. *de* MAUPERTUIS (*,*), à M.

(*) J'avois prié M. Castel d'éclaircir ce doute, puisque M. Fermin, étant retourné en Europe, ne le pouvoit pas. Ma Lettre trouva M. Castel attaqué d'une cruelle maladie, qui ne lui a pas jusqu'à présent permis de faire les recherches nécessaires. *Note ajoutée en 1768.*

(**) *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris, loco citato.*

(*,*) *Vénus physique, loco citato.*

à M. CASTEL. On ajoute qu'il y a une race entiere de ces hommes, une eſpece abſolument différente des autres; que cette race habite le milieu de l'*Afrique;* & que ſa principale habitation eſt près du Royaume de *Lovango*. Le fait eſt-il certain? Juſqu'à ce que j'en aie des preuves ſuffiſantes, j'imiterai la retenue de l'Académie des Sciences de *Paris* (*), qui, ſur la foi „de quelques relations d'*Afrique*" parle „de „certains peuples blancs, ou du moins - - de *certains hommes blancs*, „qui habitent dans le païs des Noirs." Cette eſpece eſt mépriſée des Negres, qui „ne les traitent pas d'hommes, & les chaſſent comme „des bêtes."(**) J'en trouve la raiſon dans une obſervation que M. CASTEL me communique ſur le rapport des Negres tranſportés en Amérique. Les Negres de Guinée regardent la naiſſance d'un Negre-blanc, comme le préſage d'un grand malheur qui menace la famille où il nait; & pour détourner ce malheur, les parens ont grand ſoin de faire périr les monſtres de cette eſpece. Cette ſuperſtition s'eſt apparemment étendue, comme c'eſt l'ordinaire, & a fait croire aux Negres que la rencontre des Negres-blancs étoit de mauvais augure, & que par conſéquent il falloit les détruire.

Il ſe peut ſans doute qu'on trouve au *Sénégal* des familles entieres de cette eſpece, & qu'on ait vû parmi les Noirs, des Blancs dont la blancheur ſe tranſmettoit de pere en fils. (***) Mais il n'en réſulte point une eſpece différente; ce n'eſt qu'une variété accidentelle, comme celle des gouteux de pere en fils; celle des hommes à ſix doigts; ou celle de ces Negres, qui, ſelon M. CASTEL, n'ont que quatre doigts à chaque main, & deux à chaque pied. On en a d'abord fait une nation entiere, & pour obſerver la ſymmétrie, on a retranché deux doigts à chaque main. On s'eſt bien gardé d'en ajouter deux à chaque pied; deux doigts s'écartent plus du nombre ordinaire que quatre. Qu'y a-t-il de vrai en cela? Le voici. Les Negres ainſi conformés ſortent d'un endroit plus prochain des colonies Eſpagnoles, que des colonies Hollandoiſes; ils mêlent des termes Eſpagnols à leur lan-

(*) *Hiſtoire de l'Acad. des Sciences de Paris*, *loco citato*.
(**) Maupertuis, *Vénus phyſique*, *loco citato*.
(***) *Vénus phyſique*, *loco citato*.

langage ; les Espagnols ont coutume de punir leurs esclaves en leur coupant un doigt à chaque faute : la conséquence est facile à tirer ; le merveilleux disparoit, & la nation se réduit à quelques individus mutilés & à leurs descendans tout au plus.

Je souhaiterois donc d'être convaincu par de bonnes preuves que l'*espece* des Negres-blancs existe. Il seroit singulier que cette espece eût le privilege d'exister par elle-même, & d'être augmentée par les enfants que les Negres produisent quelquefois. Il y a des races blanches ; elles n'ont jamais donné naissance à des Negres, que je sache. Il y a des races Negres ; il n'en est jamais sorti un vrai blanc, si ce n'est celui dont je vai dire un mot, d'après M. FERMIN. Le fait est remarquable par plus d'une raison.

Une Négresse appartenant au plantage nommé la *Persévérance*, agée d'environ 28 ans, accoucha le 13 Juin 1760, à terme, de deux jumeaux, également grands, très-bien formés, & d'une beauté accomplie. La premiere étoit une fille, noire comme la mere. Un quart d'heure après, vint au monde un garçon blanc comme un Européen. Il n'avoit pas un seul trait de Negre ; & la fille les avoit tous. Chaque enfant avoit son arriere-faix.

M. FERMIN trouve qu'après un cas de cette nature on ne peut plus révoquer en doute la superfétation. Il est persuadé que le pere de la fille étoit un Negre, & le pere du garçon un Blanc. C'est le premier exemple qu'on peut opposer aux expériences, qui toutes ont concouru jusqu'à présent à montrer que les Blancs avec des Négresses, ou les Negres avec des Blanches, produisent des Mulâtres, comme les Negres avec des Indiennes produisent des *Kabougles*, & comme les Kabougles avec les Blancs produisent des Mulâtres, dont les fils sont presque Blancs, & les petits-fils Blancs entierement.

MÉMOIRE
SUR
UNE CONGÉLATION REMARQUABLE.
PAR M. DE CASTILLON. (*)

I.

Le froid survenu à la fin de Décembre 1767, surprit pendant la nuit deux bouteilles d'eau, que j'avois laissées dans un petit laboratoire, où je faisois quelques expériences. Une de ces bouteilles contenoit de l'eau commune, & l'autre de l'eau distillée, que j'avois reçue l'été passé du célebre M. *Margraff*. La congélation de l'eau commune n'avoit rien de particulier; mais la congélation de l'eau distillée me frappa.

2. On voyoit au milieu de la glace un noyau solide & uni. Il étoit d'un diametre assez considérable vers la surface de la glace; & il alloit en diminuant vers le fond de la bouteille. Il avoit la figure d'une massue. De ce noyau partoient des filets d'air par étages, qui s'étendoient de tous côtés, & qui étoient réguliérement inclinés, & suivoient assez exactement la convexité intérieure du fond de la bouteille, qui, à l'ordinaire, étoit enfoncée en dedans. Ils étoient entremêlés de petits globules d'air. On auroit dit que cette bouteille renfermoit un de ces goupillons dont on se sert pour nettoyer les pots, qui portoit de petites perles entre les crins qui le forment.

Planche III. Fig. 1.

3. Cette différence dans la glace indique manifestement que la distillation produit un changement considérable dans la contexture des

(*) Composé à la fin de Janvier 1768.

des particules qui constituent l'eau, ou du moins dans l'entrelassement des particules de l'eau, & de celles de l'air contenu dans l'eau.

4. Il y avoit dans ce laboratoire des vases de verre ouverts, qui contenoient les uns de l'eau forte, & les autres différentes solutions. L'odeur que ces solutions répandoient, étoit une preuve incontestable de leur évaporation. Je pensai que, peut-être, la figure particuliere de cette congélation provenoit des particules qui s'étoient exhalées de ces fluides. Il falloit d'abord s'assurer de la justesse de cette conjecture, & examiner ensuite pourquoi les mêmes exhalaisons produisoient des effets différens dans les deux sortes d'eau.

5. Les particules exhalées de mes fluides pouvoient, à mon avis, avoir causé ce phénomene, ou parce qu'elles se mêloient avec l'eau distillée pendant que la glace se formoit; ou parce qu'elles s'y étoient mêlées auparavant.

6. Pour décider cette alternative, je transportai les deux bouteilles dans une chambre échauffée & à l'abri de toute exhalaison: je les y laissai jusqu'à ce que toute la glace fût fondue, & plusieurs heures après. Ensuite je les exposai au froid dans un endroit fort éloigné de mes solutions. Il en résulta le même effet. La glace ordinaire se montra dans la bouteille pleine d'eau commune; & le goupillon parut dans la bouteille pleine d'eau distillée. Cette différence de figure n'est donc pas l'effet des exhalaisons qui se mêlent avec l'eau pendant que la glace se forme.

7. Est-elle produite, cette différence de figure, par un mêlange antérieur? ou par la nature même de l'eau distillée? Cette question ne pouvoit trouver sa réponse que dans une nouvelle expérience. Je l'ai faite.

J'ai mis de l'eau commune dans un alambic de verre bien propre, que j'ai placé dans un bain de sable. Une chaleur très douce a fait lentement passer dans mon récipient moins que le tiers de l'eau

contenue dans l'alambic. Cette eau fraîchement diſtillée, & ſûrement exemte de tout mélange d'exhalaiſons étrangeres, a donné une congélation aſſez ſemblable à la premiere, & telle qu'on la voit dans la Figure 2. Planche IV.

8. Cependant trois différences ſenſibles diſtinguoient la congélation de l'eau fraîchement diſtillée, de la congélation de l'eau diſtillée depuis quelque tems.

1°. Les filets & les globules étoient plus conſidérables dans la premiere que dans la ſeconde.

2°. Ces filets ſembloient partir dans la ſeconde d'un centre, & non d'un axe, comme dans la premiere.

3°. Le noyau étoit très petit dans la premiere, & conſidérable dans la ſeconde.

9. Pour voir la différence que la figure du vaſe mettoit dans celle des filets, j'ai pris un globe de verre, & je l'ai à moitié rempli de l'eau que j'avois diſtillée. On le voit repréſenté dans la Fig. 3. Planche V. La partie ſupérieure du globe, qui étoit reſtée vuide, étoit de place en place tapiſſée intérieurement de gouttes d'eau, qui ſe ſont gelées ſans filets ni globules. On les voit dans la figure.

10. L'eau a commencé à geler par le milieu. D'abord la glace étoit unie; on n'y voyoit ni filets ni globules: ils commencerent à paroître à meſure que la glace s'étendit. Au commencement les filets étoient fort minces, & les globules fort petits. Plus la glace devenoit forte, plus le volume des filets & des globules devenoit conſidérable.

11. La ſurface ſupérieure de la glace étoit aſſez inégale, & reſſembloit à la ſurface d'un bois vermoulu. C'eſt ce que j'ai vu bien diſtinctement dans la ſurface de la glace contenue dans la bouteille de la Fig. 2, qui s'eſt caſſée.

12. L'eau

12. L'eau renfermée dans le globe s'eſt gelée plus difficilement & plus tard que celle qui étoit dans les bouteilles; & la ſurface de la glace étoit plus inégale.

13. L'eau a commencé à dégeler par la ſurface extérieure, attenante aux parois des vaſes. A' meſure que l'eau dégeloit, on voyoit l'air ſortir des globules & des filets, & monter à la ſurface. Quand l'eau a été preſque entiérement dégelée, le peu de glace qui reſtoit, n'avoit plus qu'un petit nombre de filets, minces & courts, qui ſuivoient exactement les contours de l'élévation inférieure du fond de la bouteille.

14. Il eſt donc certain que la différence intrinſeque de l'eau non diſtillée & de l'eau diſtillée, cauſe la différence qu'on obſerve dans leurs congélations. Mais eſt-il néceſſaire que, pour produire cette différence intrinſeque, le feu ait réduit l'eau en vapeurs? Ne ſuffit-il pas qu'il ait agi fortement ſur elle? Non. J'ai fait bouillir, à gros bouillons, & pendant longtems, de l'eau commune; je l'ai laiſſée refroidir, & dès que je lui ai trouvé la température de l'air de la chambre, je l'ai expoſée au froid; elle n'a donné qu'une congélation ordinaire.

15. Je me ſuis ſervi pour meſurer d'un pied de Rhin, qui contient exactement $\frac{2}{3}\frac{9}{3}$ du pied de Roi; & pour peſer, du marc de Berlin, qui peſe 4408 grains de Paris, comme l'a déterminé M. *Tillet* de l'Académie des Sciences de Paris, & comme je l'ai vérifié.

16. J'ai donc trouvé que (*)

1. L'eau bouillie eſt un peu plus peſante que l'eau commune (*a*).

2. Le volume de l'eau bouillie réduite à une température moyenne, eſt au volume de la même eau gelée, comme 9 à 10 (*b*).

 3. La

(*) Voyez à la fin du Mémoire.

3. La gravité ſpécifique de l'eau bouillie, eſt à la gravité ſpécifique de la glace qui en provient, comme 1 à 0,9 (*c*).

4. La gravité ſpécifique de l'eau bouillie eſt à la gravité ſpécifique de l'eau diſtillée depuis quelque tems, comme 1 à 1,00256 (*d*).

5. L'eau fraîchement diſtillée eſt un peu plus peſante que l'eau diſtillée depuis quelque tems (*e*).

6. La gravité ſpécifique de l'eau diſtillée depuis quelque tems, eſt à la gravité ſpécifique de la glace qui en provient, comme 1 à 0,929 (*f*).

7. L'eau diſtillée depuis quelque tems, en gelant, occupe l'eſpace qu'elle occupoit auparavant, & de plus la treizieme partie de cet eſpace (*g*). Ainſi l'eau diſtillée ſe dilate moins que l'eau bouillie.

8. La gravité ſpécifique de la glace provenue de l'eau bouillie, eſt à la gravité ſpécifique de la glace provenue de l'eau diſtillée depuis quelque tems, comme 1 à 1,0341 (*h*).

Je n'ai pas pû déterminer la gravité ſpécifique de la glace que m'a donnée l'eau fraîchement diſtillée, parce que la bouteille s'eſt caſſée, & l'augmentation du volume a été inſenſible dans le globe. L'eau en occupoit la moitié aſſez exactement; l'augmentation d'un treizieme, environ, de ſon volume, répandue dans une zone circulaire fort large, avoit ſi peu de hauteur, que je n'ai pas pû l'apprécier.

Le tout a été meſuré & peſé avec toute l'exactitude dont je ſuis capable.

17. Les faits que je viens de rapporter, ſuggerent à mon avis, les conſéquences ſuivantes.

1. L'eau diſtillée eſt plus peſante que l'eau bouillie; donc la ſeconde contient ou plus d'air, ou moins de parties terreſtres, que la premiere.

2. Mais

2. Mais l'eau bouillie, en gelant, se raréfie plus que l'eau distillée; donc l'eau bouillie contient plus d'air que l'eau distillée. On sait d'ailleurs que l'eau distillée contient moins de parties terrestres que l'eau bouillie; ainsi l'eau distillée est plus pesante par la seule raison que, sous le même volume, elle contient plus de particules d'eau.

3. L'eau distillée fraîchement est un peu plus pesante que l'eau distillée depuis quelque tems; donc un peu d'air se mêle à la longue avec l'eau distillée.

4. Mais les filets & les globules sont plus considérables dans la glace de l'eau fraîchement distillée que dans celle de l'eau distillée depuis quelque tems; donc l'air est plus intimément mêlé avec la seconde qu'avec la premiere.

5. Une eau quelconque a été plusieurs fois réduite en vapeurs, &, pour ainsi dire, distillée par l'action de l'air & du Soleil.

Cependant la combinaison des particules d'eau & des particules d'air n'est pas la même dans l'eau commune & dans l'eau distillée. Cette différence ne peut venir que de la différence des circonstances; c'est à dire de la présence ou de l'absence de la chaleur. N'en peut-on pas déduire que l'action du Soleil est différente de l'action de l'air; que l'eau est *décomposée* par le Soleil; & qu'elle est *dissoute* par l'action de l'air, comme *Locke* l'a conjecturé, & comme M. *le Roi* l'a montré par des expériences fort ingénieuses? Ou, ce qui revient au même, que l'action de la chaleur sépare les particules d'eau, des sels & autres corps hétérogenes; & l'action de l'air ne les sépare point. Aussi l'eau de pluye, qui est un mélange d'eau dissoute par l'air, & d'eau décomposée par le Soleil, est moins pure que l'eau distillée, & plus pure que l'eau commune, qui s'est de nouveau imprégnée de parties hétérogenes.

Les

Les filets & les globules, qu'on remarque dans la congélation de l'eau diſtillée, s'augmentent à meſure que la glace devient plus forte: quelles ſont les limites de cette augmentation?

En quoi differe la congélation de l'eau diſtillée une ſeule fois, de la congélation de l'eau diſtillée plufieurs fois?

Le froid artificiel donne-t-il la même congélation que le froid naturel?

Ce ſont des queſtions auxquelles je ne ſaurois actuellement répondre. Une maladie qui m'eſt ſurvenue, a interrompu le cours de mes expériences. Je les reprendrai avec plaiſir, ſi l'Académie le trouve à propos.

CALCULS,

ſur leſquels ſont fondées les aſſertions du §. 16.

J'ai marqué exactement la hauteur de la glace dans la bouteille. J'ai peſé la glace avec la bouteille, enſuite l'eau dégelée avec la même bouteille; & j'ai trouvé le même poids. J'ai meſuré le ſolide d'eau dans le priſme décrit dans mon Mémoire (*) ſur la diſſolution du ſel marin dans l'eau. J'ai rempli la bouteille de la même ſorte d'eau juſqu'à la hauteur de la glace. Je l'ai peſée, & meſurée dans le même priſme. Voici le réſultat de mes opérations.

(*a*) L'eau bouillie que j'ai fait geler, peſoit,

avec

(*) Ce Mémoire appartient de droit au recueil de l'année courante 1768. On l'a inſéré dans celui-ci par des raiſons particulieres, qui ont retardé l'impreſſion du Mémoire ſur la diſſolution du ſel marin. Le priſme dont il eſt parlé, eſt un priſme creux d'une capacité connue.

avec la bouteille, - -	loths	77,875.
La bouteille vuide pesoit,	loths	47,375.
Donc l'eau pesoit,	loths	30,5.

Cette eau occupoit 24,8 pouces cubiques; donc un pied cubique de cette eau, ou 1728 pouces cubiques, pesent loths 2125, 161, & un peu plus; qui font un peu moins que livres 66,4113.

En prenant un milieu entre plusieurs expériences que j'ai faites, & neuf estimes de neuf Auteurs dignes de foi, je trouve qu'un pied cubique d'eau commune pese livres 66,055: donc la gravité spécifique de l'eau bouillie est à la gravité spécifique de l'eau commune comme 1 à 0,995, un peu moins.

Je remarque en passant que M. *Ludolff* a fixé le poids d'un pied cubique d'eau à livres 64, onces 7, dragmes 2, (Mém. de l'Acad. 1749. pag. 35.); & que par conséquent son pied étoit plus petit que le mien.

(*b*) L'eau bouillie qui remplissoit l'espace que la glace avoit occupé, pesoit net loths 33,875; donc elle occupoit pouces cubiques 27, 544, & un peu plus; & la mesure actuelle de cette eau s'est trouvée telle que le calcul la donne. Car la base du prisme a 4 pouces quarrés, & la hauteur de l'eau étoit de $6\frac{8}{10}$ pouces, & un peu moins. Mais 27,544 — 24,8 = 2,744; & 2,744 à 24,8 :: 1 à 9,4; & 24,8 à 27,544 :: 1 à 1,11.

(*c*) Puisque 27,544 pouces cubiques de glace d'eau bouillie pesent 30,5 loths; un pied cubique de la même glace pése loths 1913,448, & un peu moins; & 2125,161 à 1913,448 comme 1 à 0,9.

(*d*) L'eau distillée, que j'ai fait geler, pesoit

avec la bouteille	loths	77,25.
La bouteille vuide pesoit		41 loths.
Reste poids de l'eau,	loths	36,25.

Cette

Cette eau occupoit 29,4 pouces cubiques; donc un pied cubique de cette eau pesoit loths 2130,612; &

2125,161 à 2130,612 comme 1 à 1,00256.

(*e*) L'eau fraichement distillée, que j'ai mise dans le globe, pesoit avec le globe, loths 64,65. Le globe vuide pesoit loths 11,65; donc cette quantité d'eau fraichement distillée pesoit loths 53. Elle occupoit 42,4 pouces cubiques; donc un pied cubique d'eau fraichement distillée pesoit loths 2160; & l'eau distillée depuis quelque tems pesoit loths 2130,612.

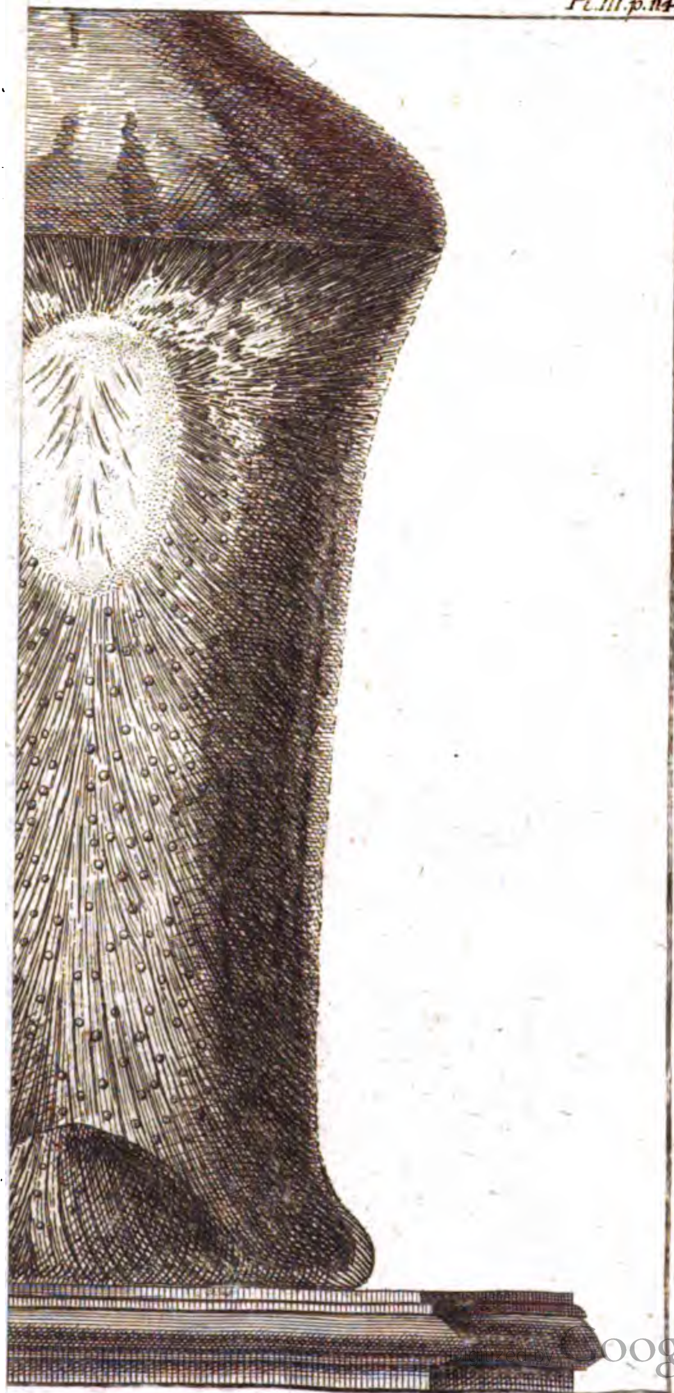
(*f*) L'eau distillée depuis quelque tems, qui remplissoit l'espace occupé par la glace, pesoit net 39 loths; donc cette glace occupoit 31,63 pouces cubiques; car 36,25 loths à 39 loths, comme 29,4 pouces cubiques à 31,63 pouces cubiques; ce qui est très conforme à la mesure prise avec le prisme, dans lequel l'eau montoit à $7\frac{9}{10}$ pouces.

Puisque 31,63 pouces cubiques de cette glace pesent 36,25 loths, un pied cubique de la même glace pese 1980,398 loths. Et 2130,612 à 1980,398 comme 1 à 0,929; plus exactement, comme 1 à 0,928571428571428 57 &c.

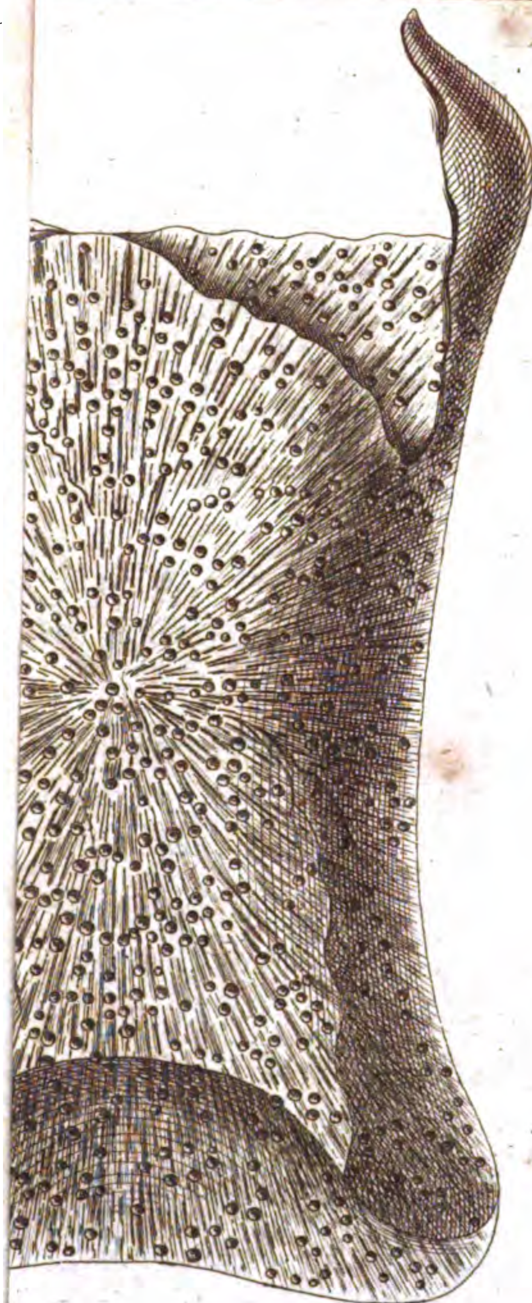
(*g*) L'eau distillée depuis quelque tems, dégelée, occupoit 29,4 pouces cubiques; la même quantité d'eau gelée occupoit 31,63 pouces cubiques; & $31,63 - 29,4 = 2,23$; & 2,23 à 29,4 comme 1 à 13,18,

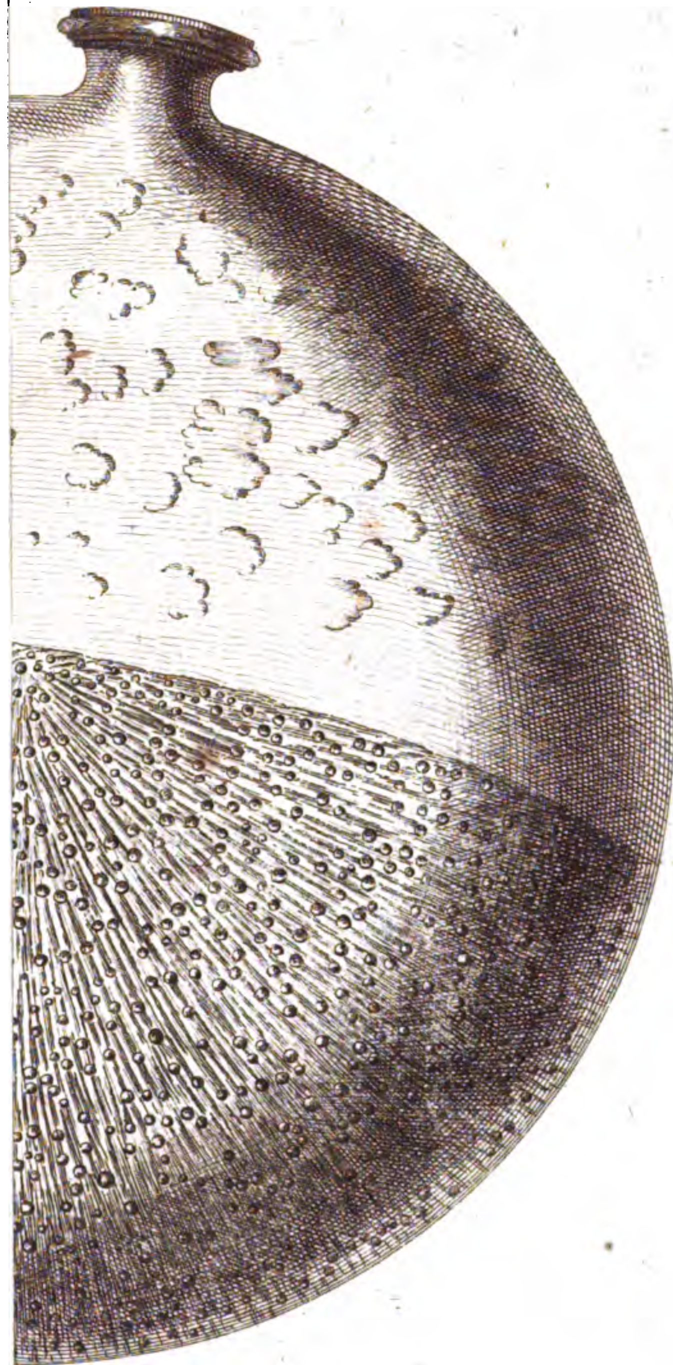
(*h*) Un pied cube de glace d'eau bouillie, pese loths 1913,448. Un pied cube de glace d'eau distillée depuis quelque tems, pese loths 1980,398; & 1913,448 à 1980,398 comme 1 à 1,0349.

MÉ-



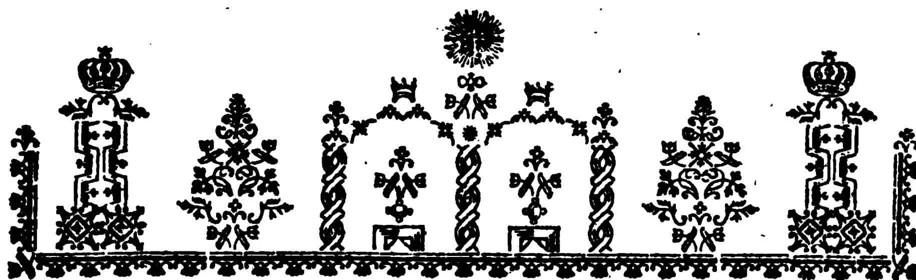
Pl. IV. p. 114.





MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE MATHÉMATIQUE.



CONSIDÉRATIONS

SUR

LES DIFFICULTÉS QU'ON RENCONTRE DANS L'EXÉCUTION DES VERRES OBJECTIFS DÉLIVRÉS DE TOUTE CONFUSION. (*)

PAR M. L. EULER.

1.

Après avoir proposé plusieurs moyens de délivrer les verres objectifs des Lunettes de la confusion causée par leur ouverture, je ne saurois nier que plusieurs essais que j'ai faits pour exécuter de tels verres, n'ont eu aucun succès; & quelques soins que l'Artiste ait apporté à construire des verres sur les mesures que je lui avois présentées, je n'ai jamais pu remarquer, que leur combinaison produisît une moindre confusion, qu'un verre objectif simple. Ces efforts inutiles m'auroient presque déterminé à renoncer entiérement à la Théorie qui m'y avoit conduit, si le témoignage du célebre M. Short sur les Objectifs composés de M. Dollond ne m'avoit rassuré, celui-ci aiant heureusement réussi à composer un objectif d'un verre convexe & concave, dont la confusion étoit tout à fait insensible.

(*) Lu le 15 Octobre 1761.

2. Convaincu donc de la possibilité de tels objectifs, je redoublai mes efforts pour approfondir toutes les difficultés qui peuvent s'opposer à l'exécution de mon dessein, & que notre Artiste n'a pu encore trouver moyen de surmonter. D'abord je voyois bien qu'une petite différence dans la nature du verre, dont la réfraction seroit un peu différente de celle que j'avois supposée dans le calcul, n'y pouvoit être d'aucune conséquence; & quoique M. Dollond lui-même ait employé deux différentes especes de verres, j'ai déjà suffisamment prouvé, que cette petite différence n'y contribue absolument rien, & qu'il ne s'agit plus ici de remédier à la diverse réfrangibilité des rayons, mais uniquement à la confusion qui résulte de la figure & ouverture des verres.

3. Entant que les faces des verres ont une figure sphérique, il est certain que les rayons qui passent par le milieu du verre, forment un autre foyer, que ceux qui sont transmis par les bords du verre: & à mesure que les rayons s'éloignent du milieu du verre, leurs foyers changent suivant une certaine loi, fondée sur la sphéricité de chacune de ses faces. Or, lorsqu'on a bien établi cette loi, il est toujours possible de construire un autre verre concave en supposant ses faces aussi sphériques, où le changement des foyers suive une loi directement contraire, de sorte qu'en combinant deux tels verres ensemble, les foyers de tous les rayons soient réduits au même point. C'est aussi de ce principe que j'ai tiré les déterminations pour la construction de tels objectifs composés, dont l'exécution a pourtant si peu répondu à mon attente. Il est donc bien important de découvrir la véritable cause de ce manque de succès.

4. Le premier soupçon tombera sans doute sur la figure des faces des verres, qui n'auroit pas été si parfaitement sphérique que je l'ai supposé dans le calcul: & en effet, quoique les bassins sur lesquels on travaille les verres, soient parfaitement sphériques, il y a bien des raisons de douter, que les verres en reçoivent précisément la même figure. L'inégalité dans le frottement pourroit bien être assez

grande

grande pour imprimer au verre une autre courbure vers les bords qu'au milieu. De là il arriveroit que la courbure vers les bords feroit ou plus petite ou plus grande que celle du milieu; & dans l'un & l'autre cas, la variation dans le foyer fuivroit une autre loi que celle que j'avois fuppofée dans le calcul. Par conféquent on ne devroit pas être furpris que l'exécution eût fi mal réuffi.

5. Mais, quelque fondé que paroiffe ce foupçon, je ne crois pas qu'il renferme la véritable raifon. Si la courbure des faces étoit moindre vers les bords qu'au milieu, ce feroit un défaut bien heureux, & le verre approcheroit d'une de ces figures parfaites, que Defcartes a déjà découvertes, pour délivrer les verres de toute confufion; & il ne feroit plus queftion de remédier à ce défaut par l'addition d'un autre verre. Or il s'en faut bien que les verres de notre Artifte ayent ce défaut; on y remarque plutôt une confufion très fenfible, qui n'a que trop befoin d'être diminuée. Ce n'eft donc pas affurément de ce côté qu'il faut chercher la caufe du peu de fuccès des foins de notre Artifte.

6. Mais s'il s'étoit trompé en fens contraire, & que la variation dans les foyers qui répondent aux bords du verre & à fon milieu, fût plus grande que je ne l'ai fuppofée dans le calcul; il eft bien vrai, que le verre concave que je propofe ne feroit plus capable de détruire cette confufion: mais il en devroit toujours détruire une partie, & un autre verre plus concave y temédieroit entierement. Cependant, quelque verre concave que j'aye joint au convexe, je n'ai jamais pu appercevoir la moindre diminution dans la confufion: il m'a paru plutôt que la confufion devenoit même plus grande: d'où je tire la facheufe conclufion, que le défaut dans l'exécution eft d'une tout autre nature, qu'il n'eft pas même poffible d'y remédier par l'addition de quelqu'autre verre que ce foit.

7. Pour m'affurer mieux des défauts auxquels ces verres pourroient être affujettis, j'ai examiné à part le verre convexe, & en y cou-

couvrant tantôt le milieu tantôt les bords, j'ai mesuré exactement dans un lieu obscur les foyers formés par les rayons qui passent tant par le milieu que par les bords du verre, & j'y ai trouvé à peu près la même différence que montre le calcul fondé sur la sphéricité des faces. Ensuite j'ai combiné ce verre convexe avec le concave que l'Artiste avoit fait sur les mesures prescrites par la Théorie, & après en avoir couvert tantôt les bords tantôt le milieu, j'ai effectivement remarqué que ces deux foyers se réunissoient au même point, tout comme j'avois lieu de m'y attendre. Cependant, nonobstant cette belle réunion des foyers, cet objectif composé n'a pas laissé de produire une confusion tout à fait insupportable, ayant représenté tous les objets comme enfoncés dans un brouillard fort épais.

8. Ce brouillard ne sauroit être attribué qu'à une réfraction irréguliere des rayons, tout à fait différente de celle qu'une petite aberration de la figure sphérique pourroit causer. Car, pourvu que la surface des verres soit bien unie, quand même elle ne seroit point sphérique, on comprend aisément qu'un tel brouillard n'en sauroit être l'effet. Je crois donc pouvoir soutenir, que la surface des verres que j'ai employés dans ces expériences, n'étoit pas unie, mais plutôt remplie d'une infinité de petites éminences & cavités, quoiqu'en gros la figure en ait peut-être été assez parfaitement sphérique. Aussi un bon microscope ne manque pas de nous découvrir une telle inégalité dans la surface des verres les mieux polis. Cela posé, ce n'est qu'aux éminences que le bassin communique sa figure, & les rayons qui tombent dans les cavités, y souffrent une réfraction très irréguliere, & étant dispersés en tout sens causent visiblement ce brouillard qui empêche que nos objectifs n'ayent le succès espéré.

9. Comme cette inégalité dans la surface du verre est sans doute fondée dans sa nature, il est impossible d'y remédier; & quand même ce défaut se trouveroit moins dans une espece de verre que dans les autres, on ne sauroit jamais espérer d'en être délivré tout à fait. Mais, pourvu que ces cavités ne fussent pas polies, cet effet funeste dont

dont je viens de parler, n'en ſeroit pas à craindre. Voilà donc le ſeul moyen capable de remédier à cet inconvénient; c'eſt d'empêcher que les petites cavités dont la ſurface du verre eſt remplie, ne reçoivent la politure. C'eſt très mal à propos que la plûpart des Artiſtes pouſſent la politure du verre trop loin, s'imaginant que c'eſt en cela principalement que leur adreſſe doit paroître. Il n'y a aucun doute, que les éminences ne doivent être parfaitement bien polies; mais l'Artiſte doit apporter autant de ſoins que les cavités demeurent non polies, ce qui dépend principalement de la matiere dont il ſe ſert pour la politure; outre que le mouvement du verre doit être fort léger, ſans qu'il ſoit preſſé contre le baſſin.

10. Cette précaution, quelque néceſſaire qu'elle ſoit, n'eſt pas du goût de la plûpart de nos Artiſtes, parce qu'elle exige un tems beaucoup plus long pour polir les verres. La machine dont ils ſe ſervent ordinairement en faiſant tourner le baſſin avec la plus grande rapidité, eſt abſolument contraire à ce deſſein, en ce qu'on eſt obligé d'y preſſer le verre avec beaucoup de force, & que la matiere qui ſert à polir, attaque aiſément les petites cavités, & les rend polies. Auſſi m'a-t-on aſſuré que M. Dollond polit tous ſes verres, qui ſont généralement admirés, ſimplement à la main, le baſſin reſtant en repos & encore à ſec: ces circonſtances n'aboutiſſent ouvertement, qu'à empêcher que les cavités & l'intérieur des pores du verre n'en reçoivent aucune politure. Cependant je doute fort que nos Artiſtes s'accommodent jamais de cette méthode, de peur d'y employer trop de tems.

11. Si je pouvois obtenir des verres travaillés avec cette précaution, je ne douterois plus du ſuccès des verres objectifs compoſés de deux lentilles, l'une convexe & l'autre concave: mais, pour y mieux réuſſir, il me reſte encore une recherche toute particuliere ſur les limites entre leſquelles la pratique doit être renfermée. Les meſures que j'ai preſcrites ſur la conſtruction de ces verres, ſont déterminées à un tel point d'exactitude, qu'on ne ſauroit jamais y atteindre dans l'exécution: on s'en écartera toujours, tantôt plus tantôt moins, & il eſt très

 im-

important de déterminer les limites, qu'on ne sauroit passer; sans que l'ouvrage devienne tout à fait inutile. Cette recherche aura d'autant moins de difficulté, que j'ai déjà établi dans le XIII Volume de nos Mémoires tous les élémens sur lesquels elle doit être fondée, & partant je n'aurai qu'à en tirer les formules, qui expriment en général la confusion d'une lunette composée d'autant de verres qu'on voudra.

12. Or, en conservant les mêmes dénominations que j'ai établies dans le dit volume, le demi-diametre de la confusion est exprimé par cette formule:

$$\frac{\mu x^3}{4\alpha^3}\left(\lambda m + \frac{m\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{B^3(\mathfrak{B}\pi-\Phi)} + \&c. \right),$$

où j'omets les autres termes provenant des autres verres après les deux premiers, puisqu'ils sont ordinairement fort petits, en remarquant seulement que le dernier terme, qui répond à l'oculaire, dont la distance de foyer soit $= v$, sera $= \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^3\,v^3}$, Or, pour que cette confusion soit encore supportable, il faut qu'elle soit moindre que cette formule $\frac{4\mu}{x^3}$, où x est un nombre dont la valeur est entre 40 & 50.

13. Le premier verre est ici supposé convexe, dont la distance de foyer est $= \alpha$, & x exprime le demi-diametre de son ouverture, de sorte que si m marque le grossissement, la clarté nécessaire exige qu'on prenne $x = \frac{m}{50}$ pouces. Ensuite, posant l'intervalle entre les deux premiers verres $= d$, & la distance de foyer du second verre $= -q$, puisque je le suppose concave, mes formules donnent

$$d = \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha \;\&\; q = \frac{-\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}\alpha, \text{ donc } \frac{d}{q} = \frac{-\pi}{\Phi}, \text{ \& partant } d = \frac{\mathfrak{B}d}{\mathfrak{B}d+q}\alpha \text{ ou } \mathfrak{B} = \frac{q}{\alpha-d} \;\&\; B = \frac{\mathfrak{B}}{1-\mathfrak{B}} = \frac{q}{\alpha-d-q}.$$

De là

De là la condition requise pour rendre insensible la confusion, sera contenue dans cette formule:

$$\frac{x^3}{\alpha^3}\left(\lambda m - \frac{m(\alpha-d)^2(\lambda'(\alpha-d)^2 + \nu q(\alpha-d-q))}{\alpha q^3} \cdots + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^3 v^3}\right) < \frac{1}{x^3}.$$

Or le foyer commun de ces deux verres tombera après le second verre à la distance $= \frac{-q(\alpha-d)}{\alpha-d-q}$, laquelle devant être positive, il faut qu'il soit $q > \alpha - d$.

14. Donc, puisque $x = \frac{m}{50}$ pouces, en exprimant toutes les mesures en pouces, & prenant $x = 50$, nous aurons

$$\lambda m - \frac{m(\alpha-d)^2}{\alpha q^3}(\lambda'(\alpha-d)^2 - \nu q(q-\alpha+d)) + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^3 v^3} < \frac{\alpha^8}{m^3},$$

d'où l'on voit que la confusion causée par le seul verre oculaire, devient déjà insupportable dès que $\frac{\lambda^{(n)}}{v^3} > 1$, & puisque $\lambda^{(n)}$ est à peu près $= 1,63$, dès que la distance de foyer de l'oculaire v est moindre que $\sqrt[3]{1,63}$ pouce, ou $v < 1\frac{1}{6}$ pouce; d'où je tire cette conclusion bien importante, que quand même on seroit parvenu à construire un objectif délivré de toute confusion, dès qu'on le joindroit avec un oculaire au dessous d'un pouce de foyer, il en résulteroit une confusion tout à fait insupportable. Mais aussi réciproquement, dès que le foyer de l'oculaire surpasse deux pouces, la confusion qui en résulte est insensible, puisqu'elle décroît en raison du cube de la distance de foyer.

15. Pour les verres moyens, quand il y en a, à moins qu'ils ne soient fort mal arrangés, leur effet sur la confusion est ordinairement beaucoup plus petit que celui du seul oculaire. Cependant mettons la lettre M pour la partie qui en résulte; & puisqu'il est bon d'introduire dans le calcul la distance de foyer du verre objectif composé,

 soit

ſoit p cette diſtance derriere le ſecond verre concave, de ſorte que $p = \frac{q(\alpha - d)}{q - \alpha + d}$ & $q = \frac{p(\alpha - d)}{p - \alpha + d}$; d'où notre formule ſera

$$\lambda m - \frac{m(\alpha - d)(p - \alpha + d)}{\alpha p^3}(\lambda'(p - \alpha + d)^2 - \nu p(\alpha - d)) + M + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^3 \nu^3} < \frac{\alpha^3}{m^3}.$$

Il n'importe qu'on prenne la valeur $\frac{\alpha^3}{m^3}$ négative ou poſitive; & partant, en la prenant tantôt poſitive tantôt négative, & changeant le ſigne $<$ en $=$, on aura les deux limites, entre leſquelles la conſtruction de notre verre objectif doit être contenue.

16. Voilà donc les deux limites que nous cherchons, & par rapport auxquelles le nombre λ' doit être déterminé:

$$\lambda' = \frac{\nu p(\alpha - d)}{(p - \alpha + d)^2} + \frac{\alpha p^3}{(\alpha - d)(p - \alpha + d)^3}\left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{\lambda^{(n)}\alpha^3}{m^4 \nu^3} \pm \frac{\alpha^3}{m^4}\right),$$

d'où l'on voit d'abord, que pour les grands groſſiſſemens ces limites s'approchent d'autant plus, que le terme $\frac{\alpha^3}{m^4}$ devient petit, ce qui arrive quand le cube α^3 croît dans une moindre raiſon que le quarré-quarré m^4. Pour cet effet, ſuppoſons $\alpha = \frac{1}{\delta} m \sqrt[3]{m}$; & ſoit pour abréger nos formules $q = np$, $d = \frac{kp}{n + 1}$, & nous aurons $\alpha = \frac{n + k}{n + 1} p$; donc $p = \frac{n + 1}{\delta(n + k)} m \sqrt[3]{m}$ & $\mathfrak{B} = n + 1$, $B = \frac{-(n + 1)}{n}$, & nous arriverons à cette équation:

$$\lambda' = \nu n(n + 1) + \left(1 + \frac{k}{n}\right)(n + 1)^3 \left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{1,6^3}{\delta^3 \nu^3} \pm \frac{1}{\delta^3}\right),$$

où

où le terme $\frac{1}{\delta^3}$ ne doit pas être trop petit par rapport au nombre λ, puiſqu'alors l'exécution ne ſauroit réuſſir.

17. Mais, d'un autre côté, ſi l'on vouloit prendre δ très petit, comme $\delta = 1$, on n'y gagneroit rien, & la confuſion du ſeul premier verre ſeroit déjà ſi petite, qu'on n'auroit plus beſoin du verre concave pour en diminuer l'effet. La compoſition de l'objectif ne nous procure donc des avantages réels, qu'entant qu'on peut donner à δ une valeur aſſez conſidérable. D'ailleurs, ayant pris ci-deſſus $x = 50$, cette valeur eſt un peu trop grande, & on peut bien ſe contenter de $x = 45$; & dans ce cas, au lieu du dernier terme $\frac{1}{\delta^3}$, nous aurions $\frac{1000}{729\delta^3}$ ou $\frac{4}{3\delta^3}$, d'où pour le même nombre δ les limites embraſſeront un plus grand intervalle, & ſouffriront dans la pratique une plus grande aberration. Or, plus on eſt en état d'exécuter les meſures preſcrites, plus on pourra prendre le nombre δ grand, & l'objectif compoſé pourra être employé à des groſſiſſemens plus conſidérables. Outre cela, puiſque le verre concave allonge la lunette, la compoſition de l'objectif ne ſera d'aucun avantage, à moins qu'on ne puiſſe prendre $\delta > \frac{10}{9} \cdot \frac{n+k+1}{n+k}$, puiſque cette valeur répond aux objectifs ſimples ordinaires.

18. Cette circonſtance ne nous permet pas de donner au nombre n des valeurs très petites, qui ſeroient d'ailleurs à l'égard de la conſtruction du verre concave les plus convenables, puiſque la moindre valeur de la lettre δ, qui nous procureroit quelque avantage réel, deviendroit déjà trop conſidérable, pour qu'on pût eſpérer de ne pas paſſer dans l'exécution les limites preſcrites. Je ſuppoſe ici que le nombre k, qui détermine la diſtance des verres d, ſoit une fraction très petite, pour ne pas diminuer le champ apparent; car, ſi l'on vouloit donner à k une valeur aſſez conſidérable, on pourroit bien prendre n

 d'au-

d'autant plus petit: mais il vaudra toujours mieux prendre le nombre n plus grand, & donner à k la plus petite valeur que l'épaisseur des verres puisse souffrir. On sera bien obligé d'admettre de si grandes distances de foyer par rapport au grossissement, qu'on pourra prendre $k = \frac{1}{100}$, & encore plus petit.

19. Si l'on n'emploie qu'un seul oculaire, pour produire le grossissement m, il faut prendre $v = \frac{p}{m}$, d'où l'on aura $v^3 = \frac{m(n+1)^3}{\delta^3(n+k)^3}$, & partant notre équation sera:

$$\lambda' = vn(n+1) + \left(1 + \frac{k}{n}\right)(n+1)^3\left(\lambda + \frac{M}{m} + \frac{1{,}63(n+k)^3}{m(n+1)^3} \pm \frac{4}{3\delta^3}\right);$$

d'où l'on voit que, pour les grands grossissemens, la confusion causée par l'oculaire est très petite par rapport à celle de l'objectif, qui doit être détruite par le verre concave. Il s'agit donc de voir, à quel degré de précision on peut porter la pratique, de sorte que les limites actuelles étant connues, on en puisse ensuite conclure la valeur de δ, d'où l'on conclura enfin la distance de foyer du premier verre $\alpha = \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, & de là les autres mesures p & q exprimées en pouces. Cette recherche se fera le plus commodément, en donnant au nombre n des valeurs déterminées: où je remarque en général qu'il convient de poser $\lambda = 1$, puisque ce nombre ne sauroit recevoir une valeur plus petite. Or, pour le nombre k, je le supposerai toujours $= \frac{n}{100}$, pour réduire l'intervalle entre les deux premiers verres à une quantité assez petite.

I Hypothese $n = 1$.

20. On a donc $q = p$, $\alpha = \frac{101}{100}p$, & $d = \frac{1}{100}p$, & partant pour le verre concave $\mathfrak{B} = 2$, & $B = -2$. Or le grossissement m étant proposé, il faut prendre $p = \frac{100}{101} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$,

où

où l'adresse de l'Artiste déterminera le nombre δ. On a donc pour le nombre λ':

$$\lambda' = 2\nu + \tfrac{101}{100} \cdot 8 \left(1 + \frac{1,63 \cdot 101^3}{200^3 \cdot m} \pm \frac{4}{3\delta^3}\right).$$

Maintenant il faut se souvenir, que connoissant pour le verre concave sa distance de foyer $-q$, avec les nombres $\mathfrak{B}$ & λ', sa construction est déterminée de cette sorte:

le rayon de sa face de devant $= \dfrac{-q}{\varrho\mathfrak{B} - \sigma(\mathfrak{B}-1) + \tau\sqrt{(\lambda'-1)}}$,

le rayon de sa face de derriere $= \dfrac{-q}{\sigma\mathfrak{B} - \varrho(\mathfrak{B}-1) - \tau\sqrt{(\lambda'-1)}}$,

où les nombres ϱ, σ, τ avec ν dépendent de telle sorte de la nature du verre, que si la raison de réfraction est 1,55 à 1, on a

$$\varrho = 0,19078;\ \sigma = 1,62740;\ \tau = 0,90513\ \&\ \nu = 0,23269.$$

Or la valeur de λ' se développe en ces trois parties:

$$\lambda' = 8,54538 + \frac{1,6961}{m} \pm \frac{10,77}{\delta^3};$$

d'où l'on tire $\sqrt{(\lambda'-1)} = 2,7469 + \dfrac{0,3087}{m} \pm \dfrac{1,9610}{\delta^3}$,

& $\tau\sqrt{(\lambda'-1)} = 2,4862 + \dfrac{0,2793}{m} \pm \dfrac{1,7747}{\delta^3}$.

Or $\varrho\mathfrak{B} - \sigma(\mathfrak{B}-1) = -1,24584$ & $\sigma\mathfrak{B} - \varrho(\mathfrak{B}-1) = 3,06402$; donc les deux rayons des faces du verre concaves sont:

de devant $= \dfrac{-q}{1,2404 + \dfrac{0,2793}{m} \pm \dfrac{1,7747}{\delta^3}}$,

de derriere $= \dfrac{-q}{0,5778 - \dfrac{0,2793}{m} \pm \dfrac{1,7747}{\delta^3}}$.

21. Pour juger maintenant du nombre δ, ſuppoſons que, quand il faut travailler la face d'un verre ſur une ſphéricité dont le rayon eſt $= \mathfrak{r}$, l'Artiſte ſoit ſi habile, qu'il ſe trompe moins que de la partie $\frac{1}{N}$ de ce rayon $\mathfrak{r}$. Donc, ſi le rayon d'une face doit être $= \frac{q}{P \pm \frac{Q}{\delta^3}}$, ou $= \frac{q}{P} : \left(1 \pm \frac{Q}{P\delta^3}\right)$, il faut ſuppoſer $\frac{1}{N} = \frac{Q}{P\delta^3}$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{\frac{NQ}{P}}$; & pour en faire l'application, il eſt clair qu'il faut prendre la face qui donne pour δ la moindre valeur, comme la plus difficile à exécuter; ce ſera donc celle où P eſt plus grand. Puiſque c'eſt la face de devant, nous aurons $P = 1,2404 + \frac{0,2793}{m}$, & $Q = 1,7747$; d'où nous tirons aſſez exactement $\delta = \sqrt[3]{\frac{10}{7}N}$; ce qui nous fournit les concluſions ſuivantes:

I. Si l'Artiſte n'eſt capable de travailler la face d'un verre qu'à une 50me partie près du rayon, nous aurons $\delta = \sqrt[3]{71}$, ou $\delta = 4\frac{1}{7}$, & partant, pour un groſſiſſement quelconque m, la diſtance de foyer de notre objectif, comptée depuis le premier verre, $d + p = \frac{201}{101} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta} = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,07}$. Or, en employant un verre objectif ſimple, on peut prendre ſa diſtance de foyer $= \frac{m\sqrt[3]{m}}{1,33}$; donc par ce moyen la longueur de la lunette n'eſt pas encore réduite à la moitié.

II. Si l'Artiſte eſt ſi habile qu'il ne ſe trompe pas de la partie $\frac{1}{100}$ du rayon d'une face, à cauſe de $N = 100$, nous aurons $\delta = \sqrt[3]{143}$, ou bien $\delta = 5,23$; d'où pour le groſſiſſement m la diſtance de foyer de notre objectif compoſé ſera $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,61}$, qui n'eſt que la moitié de celle d'un objectif ſimple.

III.

III. Donc, s'il falloit réduire la distance de foyer à la quatrieme partie, il faudroit qu'il fût $\frac{1}{4}\delta = 5,33$, ou $\delta = 10,66$; donc $N = \frac{7}{10}\delta^3 = 849$; c'est à dire qu'il y est requis un tel degré d'adresse, qu'on ne se trompe point dans l'exécution de la $\frac{1}{849}$ partie du rayon: or je doute fort qu'on puisse jamais atteindre ce degré d'adresse.

II Hypothese $n = 2$, & $k = \frac{2}{100}$.

22. Ayant donc $q = 2p$; $\alpha = \frac{202}{300}p$; $d = \frac{2}{300}p$ & $p = \frac{300}{202} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$; donc la distance $d + p = \frac{302}{202} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, cette distance étant dans le cas d'un objectif simple $= \frac{m\sqrt[3]{m}}{1,33}$. Or, pour la construction du verre concave, nous aurons $\mathfrak{B} = 3$, &

$$\lambda' = 1,3962 + \frac{101}{100} \cdot 27\left(1 + \frac{1,63}{m}\left(\frac{202}{300}\right)^3 \pm \frac{4}{3\delta^3}\right), \text{ ou}$$

$$\lambda' = 38,666 + \frac{13}{m} \pm \frac{36,36}{\delta^3}, \text{ \& partant}$$

$$\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 5,5550 + \frac{0,958}{m} \pm \frac{2,6810}{\delta^3};$$

or $3\varrho - 2\sigma = -2,6825$, & $3\sigma - 2\varrho = +4,5006$; donc les rayons des deux faces de nos verres

$$\text{de devant} = \frac{-q}{2,8735 + \frac{0,958}{m} \pm \frac{2,6810}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-1,0544 - \frac{0,958}{m} \mp \frac{2,6810}{\delta^3}}.$$

Ici donc, pour juger de la valeur de δ, il faut s'en tenir à la premiere face, qui nous donne $P = 2,8735 + \frac{0,958}{m}$ & $Q = 2,6810$, & partant $\delta = \sqrt[3]{0,923\,N}$: dont voici les conclusions.

I. Si l'Artiste ne peut répondre que de la 50me partie du rayon, de sorte que $N = 50$, nous aurons $\delta = 3,58$, & partant la distance de foyer de notre objectif composé $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{2,39}$, qui est en effet presque deux fois plus petite qu'en se servant d'un oculaire simple.

II. Si l'Artiste est sûr de ne pas se tromper d'une 100me partie, de sorte que $N = 100$, nous aurons $\delta = 4,52$; donc la distance de foyer de l'objectif composé $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,01}$, qui est à celle d'un objectif simple comme 9 à 4.

III. Pour réduire donc la longueur à la quatrieme partie, il faudroit qu'il fût $\delta = 8$, & partant $N = \frac{512}{0,923} = 555$; d'où l'on voit que cette hypothese est préférable à la précédente.

III Hypothese $n = 3$, & $k = \frac{3}{100}$.

23. Ayant $q = 3p$; $d = \frac{3}{400}p$ & $\alpha = \frac{303}{400}p$, nous aurons: $p = \frac{400}{303} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, & $d + p = \frac{403}{303} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$. Or, pour la construction du verre concave $\mathfrak{B} = 4$, &

$$\lambda' = 12\nu + \tfrac{101}{100} \cdot 64 \left(1 + \frac{1,63}{m}\left(\tfrac{303}{400}\right)^2 \pm \frac{4}{3\delta^3}\right); \text{ donc}$$

$$\lambda' = 67,4324 + \frac{45,7967}{m} \pm \frac{86,19}{\delta^3}; \text{ \& partant}$$

+ν

$$r\sqrt{\pi}\,(\lambda' - 1) = 7{,}3773 + \frac{2{,}5418}{m} \pm \frac{4{,}7857}{\delta^3}.$$

Or $4\varrho - 3\sigma = -4{,}1191$ & $4\sigma - 3\varrho = +5{,}9372$; & partant les rayons des deux faces de notre verre concave

$$\text{de devant} = \frac{-q}{+3{,}2582 + \frac{2{,}5418}{m} \pm \frac{4{,}7857}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-1{,}4401 - \frac{2{,}5418}{m} \mp \frac{4{,}7857}{\delta^3}}.$$

Il faut donc s'en tenir à la premiere, qui donne $P = 3{,}2582 + \frac{2{,}5413}{m} = 3{,}342$, en prenant $m = 30$; & $Q = 4{,}7857$; donc $\delta = \sqrt[3]{1{,}431\,N}$; d'où je conclus:

I. Si l'Artiste dans son travail n'est assuré que de la 50me partie du rayon, de sorte que $N = 50$, nous aurons $\delta = 4{,}15$, & partant la longueur $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3{,}11}$, qui est à celle d'un objectif simple comme 3 à 7.

II. Si l'Artiste pouvoit répondre de la 100me partie, nous aurions $\delta = 5{,}23$ & partant $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3{,}92}$, qui seroit à peu près trois fois plus courte qu'en employant un objectif simple.

III. Enfin, si l'on souhaitoit une longueur quatre fois plus petite, à cause de $\frac{3}{4}\delta = 4 \cdot \frac{4}{3}$, ou $\delta = 7{,}11$, l'adresse de l'Artiste devroit être au point qu'il fût $N = 251$, & partant cette hypothese est encore bien préférable à la précédente.

IV Hypothese $n = 4$, & $k = \frac{4}{100}$.

24. Ayant $q = 4p$, $d = \frac{4}{500}p$, & $\alpha = \frac{404}{500}p$, il faut poser $p = \frac{500}{404} \cdot \frac{m\sqrt{m}}{\delta}$, & partant $d + p = \frac{504}{404} \cdot \frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$; or, pour la construction du verre concave $\mathfrak{B} = 5$, &

$$\lambda' = 20\nu + \frac{101}{100} \cdot 125 \left(1 + \frac{1,63}{m} \left(\frac{404}{500}\right)^3 \pm \frac{4}{3\delta^3}\right);$$

ou, puisque nous pouvons aisément négliger la partie 100me,

$$\lambda' = 125 + 20\nu + \frac{1,63}{m} . 64 \pm \frac{500}{3\delta^3} = 129,654 + \frac{104}{m} \pm \frac{167}{\delta^3};$$

donc $\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 10,2660 + \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}$; & puisque

$$5\varrho - 4\sigma = -5,5557, \quad \& \quad 5\sigma - 4\varrho = 7,3738,$$

nous aurons les rayons des faces de notre verre concave

$$\text{de devant} = \frac{-q}{4,7103 + \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}},$$

$$\text{de derriere} = \frac{-q}{-2,8922 - \frac{4,15}{m} \pm \frac{6,66}{\delta^3}}.$$

Tenons-nous en donc à la premiere, qui donne $P = 4,7103 + \frac{4,15}{m}$, ou $P = 4,85$, & $Q = \frac{6,66}{\delta^3}$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{1,373\, N}$; d'où je conclus:

I. Si l'Artiste est sûr de la 50me partie du rayon dont il travaille une face, à cause de $N = 50$, nous aurons $\delta = 4,095$, & partant la

la longueur $\delta + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{3,276}$, qui est à celle d'un objectif simple comme 2 à 5.

II. Or, si l'Artiste pouvoit répondre de la 100me partie du rayon, on auroit $\delta = 5,16$, & la longueur $d + p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{4,13}$, qui est $3\frac{1}{10}$ fois plus grande qu'en n'employant qu'un objectif simple.

III. Pour réduire la longueur du foyer à la quatrieme partie, à cause de $\frac{4}{5}\delta = \frac{16}{5}$, & $\delta = \frac{20}{5}$, l'adresse de l'Artiste doit répondre au nombre N = 216, ou il faut qu'il puisse être sûr de la 216 partie du rayon: cette hypothese est donc encore plus avantageuse que la précédente.

V Hypothese $n = 5$.

25. Je négligerai ici la distance d, puisqu'il ne s'agit que de déterminer à peu près, & ayant $q = 5p$, $\alpha = \frac{4}{5}p$, & $p = \frac{4}{5}\cdot\frac{m\sqrt[3]{m}}{\delta}$, nous aurons pour le verre concave $\mathfrak{B} = 6$, &

$$\lambda' = 30\nu + 216 + 125 \cdot \frac{1,63}{m} + \frac{288}{\delta^3}, \text{ ou bien}$$

$$\lambda' = 222,981 + \frac{204}{m} + \frac{288}{\delta^3}; \text{ donc}$$

$$\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = 13,4850 + \frac{6,20}{m} \pm \frac{8,75}{\delta^3}. \text{ Or}$$

$$6\varrho - 5\sigma = -6,9923, \quad \& \ 6\sigma - 5\varrho = +8,8104;$$

donc les rayons des faces du verre concave seront

$$\text{de devant} = \frac{-q}{6,4927 + \frac{6,20}{m} \pm \frac{8,75}{\delta^3}},$$

 de

de derriere $= \dfrac{-q}{4,6746 - \dfrac{6,20}{m} + \dfrac{8,75}{\delta^3}}$,

dont celle-là donne $P = 6,7$, & $Q = 8,75$; d'où nous tirons $\delta = \sqrt[3]{1,306\, N}$; d'où je conclus:

I. Si l'adresse de l'Artiste se borne à sa 50me partie du rayon, de sorte que $N = 50$, on aura $\delta = 4,03$, & partant la distance de foyer de notre objectif composé $p = \dfrac{m\sqrt[3]{m}}{3,36}$, qui est un peu plus petite que dans l'hypothese précédente.

II. Si l'Artiste est sûr de la 100me partie de son rayon, la valeur $N = 100$ donne $\delta = 5,07$, & la distance de foyer $p = \dfrac{m\sqrt[3]{m}}{4,23}$.

III. Mais, si l'on demandoit une adresse capable de raccourcir la distance de foyer à sa quatrieme partie, à cause de $\frac{4}{5}\delta = \frac{16}{3}$, ou $\delta = \frac{32}{5}$, nous aurons $N = 201$, ou bien l'Artiste doit être en état de ne pas se tromper de la 200 partie du rayon sur lequel il travaille.

26. Je ne continue pas ces hypotheses plus loin, quoiqu'en augmentant le nombre n les avantages deviennent toujours plus grands, & qu'en supposant $n = \infty$, une adresse de la part de l'Artiste, qui pourroit répondre de la centieme partie du rayon, seroit suffisante pour raccourcir la distance de foyer de l'objectif à la quatrieme partie. Mais, depuis cette hypothese, les avantages augmentent presque insensiblement, de sorte qu'il ne vaudroit pas la peine de pousser plus loin ces hypotheses. Mais il faut ici principalement avoir égard à cette circonstance, que plus on augmente le nombre n, plus les rayons des deux faces de notre second verre ménisque deviennent égaux entr'eux; & l'on sait que la construction de tels ménisques est sujette à de grands inconvéniens.

27.

27. De là je tire donc cette conclusion, que pour faire de tels objectifs composés, il est bon de donner au nombre n la plus grande valeur que les autres circonstances permettent; & puisque les avantages qu'on retireroit en donnant à n une plus grande valeur que 5, ne croissent plus sensiblement, je m'arrêterai à cette hypothese $n = 5$, & j'en déduirai plus soigneusement les regles pour la construction de ces objectifs composés, qui puissent servir pour toutes les especes de lunettes. Or, quelque grand que soit le nombre des verres, pour que la confusion évanouisse entierement, l'expression suivante doit être réduite à zéro:

$$\lambda + \frac{\Phi(B+1)(\lambda'(B+1)^2+\nu B)}{B^3(\mathfrak{B}\pi - \Phi)} + \frac{\Phi(C+1)(\lambda''(C+1)^2+\nu C)}{B^3C^3(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}$$

$$+ \frac{\Phi(D+1)(\lambda'''(D+1)^2+\nu D)}{B^3C^3D^3(\mathfrak{D}\pi''' - \pi'' + \pi' - \Phi)} \text{ \&c.}$$

chaque verre fournissant un membre dans cette expression, dont la signification est expliquée dans mon Mémoire du XIII Volume.

28. Si la distance de foyer du premier verre en A est posée $= \alpha$, celle du second verre en B $= \frac{\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\alpha$, & l'intervalle entre ces deux verres AB est $= \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\alpha$, & le foyer commun de ces deux verres tombe après le second à la distance $= \frac{B\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\alpha$, que je regarderai comme la distance de foyer du verre objectif composé, en la posant $= p$, de sorte que $\alpha = \frac{\mathfrak{B}\pi - \Phi}{B\Phi}p$. Soit ensuite la distance de foyer négatif du second verre concave $= -np$, pour avoir $\frac{\mathfrak{B}\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}\alpha = \frac{\mathfrak{B}}{B}p = -np$, & partant $\mathfrak{B} = \frac{B}{1+B} = -nB$;

d'où

d'où nous tirons $1 + B = -\frac{1}{n}$ & $B = -\frac{(n+1)}{n}$; donc $\mathfrak{B} = n + 1$, comme ci-dessus. Or, pour l'intervalle des verres, posons-le $= \frac{k}{n+1}p$, & de là nous aurons $\frac{k}{n+1}p = \frac{\mathfrak{B}\pi}{B\phi}p = \frac{-n\pi}{\phi}p$, donc $\pi = \frac{-k\phi}{n(n+1)}$.

29. Donc, puisque $\frac{\phi}{\mathfrak{B}\pi - \phi} = \frac{-n}{n+k}$, & partant $\alpha = \frac{n+k}{n+1}p$, la distance de foyer du second verre concave étant $= -np$, & l'intervalle entre les verres $AB = \frac{k}{n+1}p$, les deux premiers membres de notre formule, qui doit être réduite à rien, seront

$$\lambda - \frac{n}{(n+k)(n+1)^3}(\lambda' - \nu n(n+1));$$

& pour tous les autres membres fournis par les verres suivans, écrivons la lettre M, dont la valeur sera toujours très petite par rapport aux premiers, & il s'agit de satisfaire à cette équation:

$$\lambda - \frac{n}{(n+k)(n+1)^3}(\lambda' - \nu n(n+1)) + M = o,$$

qui nous fournit la valeur du nombre λ' exprimée de cette sorte:

$$\lambda' = \nu n(n+1) + \left(1 + \frac{k}{n}\right)(n+1)^3(\lambda + M).$$

30. Posons donc $n = 5$, & soit k une fraction très petite, que je laisserai encore indéterminée, puisqu'on peut aisément la joindre avec la petite quantité M; & par la distance de foyer du verre composé p, nous aurons la distance de foyer du premier verre $\alpha =$

$\alpha = \frac{5+k}{6}p$, & du ſecond $= -5p$, avec leur intervalle AB $= \frac{k}{6}p$. Enſuite, pour le premier verre en A, prenons $\lambda = 1$, afin que ſa confuſion devienne la plus petite, & nous aurons pour le verre concave: $\lambda' = 30\nu + 216\left(1+\frac{k}{5}\right)(1+M)$. Cependant pour la fraction k, qu'on ne ſauroit prendre plus petite que l'épaiſſeur des verres ne le permet, ſi l'on réuſſiſſoit à détruire toute la confuſion, & qu'on voulût prendre $x = \frac{1}{8}\alpha$, la valeur de k devroit être au moins $= \frac{3}{40}$. Poſons donc $k = \frac{3}{40}$, & nous aurons $\alpha = \frac{203}{240}p$, & l'intervalle AB $= \frac{1}{80}p$, & enfin:

$$\lambda' = 30\nu + 216 \cdot \tfrac{203}{200}(1+M) = 219,24 + 30\nu + 219,24M.$$

31. Maintenant il faut ſe ſouvenir, que la lettre ν, de même que les lettres ϱ, σ, τ, qui entrent dans la détermination des faces des verres, dépendent de la réfraction des rayons en entrant de l'air dans le verre, laquelle n'étant pas aſſez fixe, conſidérons-en les principaux cas:

Réfraction

$1,50:1$; $\nu = 0,20000$; $\varrho = 0,28571$; $\sigma = 1,71429$; $\tau = 0,95832$,

$1,51:1$; $\nu = 0,20643$; $\varrho = 0,26529$; $\sigma = 1,69549$; $\tau = 0,94686$,

$1,52:1$; $\nu = 0,21291$; $\varrho = 0,24563$; $\sigma = 1,67745$; $\tau = 0,93584$,

$1,53:1$; $\nu = 0,21945$; $\varrho = 0,22668$; $\sigma = 1,66011$; $\tau = 0,92522$,

$1,54:1$; $\nu = 0,22605$; $\varrho = 0,20841$; $\sigma = 1,64344$; $\tau = 0,91499$,

$1,55:1$; $\nu = 0,23269$; $\varrho = 0,19078$; $\sigma = 1,62740$; $\tau = 0,90513$;

& pour chacun de ces cas, développons la conſtruction de notre objectif compoſé.

32. Or d'abord, pour le premier verre convexe, puiſque $\lambda = 1$, & ſa diſtance de foyer $\alpha = \frac{203}{240}p$, les rayons de ſes deux faces ſeront de

de devant $= \frac{203p}{240\sigma}$, & de derriere $= \frac{203p}{240\varrho}$;

& pour le ſecond verre concave, dont la diſtance de foyer eſt $= -5p$, les rayons de ces deux faces, dont je nommerai pour abréger celui de la face de devant $= f$, & celui de la face de derriere $= g$, ſeront

$$f = \frac{-5p}{6\varrho - 5\sigma + \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}}, \quad \& \quad g = \frac{-5p}{6\sigma - 5\varrho - \tau\sqrt{(\lambda' - 1)}}.$$

C'eſt donc de ces quatre formules qu'il faut calculer les valeurs pour chaque cas de réfraction.

Pour le premier verre convexe.

33. Comme les rayons des faces de ce verre ne dépendent que des deux lettres ϱ & σ, le calcul ſe fera aiſément, & on trouvera ces deux rayons exprimés de la maniere ſuivante:

	Raiſon de réfraction,	Rayon de la face de devant,	Rayon de la face de derriere,
Si l'on vouloit que AB fût $\frac{1}{30}p$, il faudroit ajouter à ces valeurs leur partie $\frac{1}{40}$.	1,50 : 1	0,49341p	2,96046p
	1,51 : 1	0,49887p	3,18834p
	1,52 : 1	0,50424p	3,44353p
	1,53 : 1	0,50950p	3,73140p
	1,54 : 1	0,51467p	4,05851p
	1,55 : 1	0,51975p	4,43355p.

Pour le ſecond verre concave ou méniſque.

34. Cette détermination demande plus de calcul. D'abord, ſi $\lambda' - 1 = L + 219,24M$, puiſque M eſt une fraction très petite, on aura aſſez exactement $\sqrt{(\lambda' - 1)} = \sqrt{L} + \frac{109,62\,M}{\sqrt{L}}$, & partant $\tau\sqrt{(\lambda' - 1)} = \tau\sqrt{L} + \frac{109,62\,\tau}{\sqrt{L}}M$, qu'il faut combiner

avec

avec les valeurs des formules $6\varrho - 5\sigma$ & $6\sigma - 5\varrho$; ces trois valeurs sont exprimées pour chaque cas de réfraction de cette sorte:

Raison de réfraction	valeur de $6\varrho - 5\sigma$,	valeur de $6\sigma - 5\varrho$,	valeur de $\tau \sqrt{L} + \frac{109,62\tau}{\sqrt{L}} M$
1,50 : 1	−6,85719	8,85719	14,35050 + 7,0153 M
1,51 : 1	−6,88571	8,84649	14,18469 + 6,9282 M
1,52 : 1	−6,91347	8,83655	14,02596 + 6,8448 M
1,53 : 1	−6,94047	8,82726	13,87284 + 6,7642 M
1,54 : 1	−6,96674	8,81859	13,72552 + 6,6864 M
1,55 : 1	−6,99232	8,81050	13,58361 + 6,6114 M.

35. De là formons premierement les dénominateurs des fractions données pour les rayons des faces du second verre, qui seront exprimés ainsi:

Raison de réfraction	I. Dénominateur $6\varrho - 5\sigma + \tau \sqrt{(\lambda' - 1)}$	II. Denominateur $6\sigma - 5\varrho - \tau \sqrt{(\lambda' - 1)}$
1,50 : 1	+7,49331 + 7,0153 M	−5,49331 − 7,0153 M
1,51 : 1	+7,29898 + 6,9282 M	−5,33820 − 6,9282 M
1,52 : 1	+7,11249 + 6,8448 M	−5,18941 − 6,8448 M
1,53 : 1	+6,93237 + 6,7642 M	−5,04558 − 6,7642 M
1,54 : 1	+6,75878 + 6,6864 M	−4,90693 − 6,6864 M
1,55 : 1	+6,59129 + 6,6114 M	−4,77311 − 6,6114 M;

tous les deux dénominateurs sont rapportés au même numérateur $-5p$.

36. Maintenant, pour en tirer les rayons mêmes, remarquons que cette fraction $\frac{-5p}{\mathfrak{r} + s M}$, donne assez exactement $\frac{-5}{\mathfrak{r}} p + \frac{5s}{\mathfrak{r}\mathfrak{r}} M p$; d'où nous tirons pour les rayons de chaque face les valeurs suivantes:

 pour

	raison de réfraction,	pour le second verre, Rayon de la face de devant,	rayon de la face de derriere,
Si l'on vouloit	1,50 : 1	$-0,66726p + 0,6247\,Mp$	$+ 0,91020p - 1,1624\,Mp$
que AB $= \frac{1}{30}p$,	1,51 : 1	$-0,68503p + 0,6502\,Mp$	$+ 0,93665p - 1,2156\,Mp$
il faudroit pren-	1,52 : 1	$-0,70299p + 0,6765\,Mp$	$+ 0,96350p - 1,2708\,Mp$
dre M $= \frac{1}{40} + $ M.	1,53 : 1	$-0,72126p + 0,7038\,Mp$	$+ 0,99096p - 1,3285\,Mp$
	1,54 : 1	$-0,73978p + 0,7319\,Mp$	$+ 1,01897p - 1,3885\,Mp$
	1,55 : 1	$-0,75858p + 0,7609\,Mp$	$+ 1,04754p - 1,4510\,Mp$;

d'où l'on voit que la face de devant de ce verre est toujours concave, & celle de derriere convexe. Or la distance entre ces deux verres est AB $= \frac{1}{10}p$.

37. Pour la lettre M, elle marque la partie de la confusion qui résulte des autres verres de la lunette, & partant elle dépend aussi du grossissement, que j'exprime par le nombre m. Si l'on n'emploie qu'un seul oculaire, cette partie de confusion sera fort à peu près $= \frac{1}{m}$, qu'il faudra écrire à la place de M. Or cette même lettre M admet une certaine latitude, que les limites de la confusion admettent, en vertu de laquelle on peut ajouter ou soustraire de M la particule $\frac{a^3}{mx^3\, x^3}$, prenant $v = 45$, & x marque le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif; & l'on sait qu'il faut prendre $x = \frac{m}{50}$ pouces, de sorte que cette particule devient $= \frac{4a^3}{3m^4}$. Ou bien, si l'on suppose $a = \frac{m\sqrt{m}}{\delta}$, au lieu de M, on peut écrire M $\pm \frac{4}{3\delta^3}$; d'où l'on peut juger du point de précision qu'on attend de l'adresse de l'Artiste.

38. Mais, quand même l'Artiste passeroit ces limites, pourvu que l'erreur ne fût pas très grossiere, on pourra toujours se servir d'un

d'un tel objectif pour des grossissemens plus petits qu'on ne se sera proposé. Or, comme cet objectif a été construit sur une certaine distance entre les deux verres, on comprend aisément qu'un tel objectif composé, où l'Artiste se sera écarté tant soit peu des mesures prescrites, pourra néanmoins être parfait par rapport à une autre distance entre les verres; & l'on pourra trouver des valeurs pour les nombres *a* & *k*, qui conduiroient précisément à l'objectif exécuté. On n'a donc qu'à joindre les deux verres de telle sorte, moyennant une vis, qu'on les puisse éloigner ou approcher tant soit peu, & par ce moyen on découvrira aisément la petite distance où toute la confusion doit disparoitre. C'est sans doute le plus sûr moyen de porter les lunettes au plus haut degré de perfection, lequel ne sauroit manquer, pourvu que les verres ne soient pas assujettis à une confusion irréguliere dont j'ai parlé au commencement.

39. En cas qu'on voulût construire de tels objectifs, où la distance entre les verres seroit plus grande, afin qu'on fût mieux en état d'y apporter les corrections nécessaires, en les rapprochant davantage, il ne seroit pas nécessaire de refondre tout ce calcul. On n'a qu'à remarquer, qu'en augmentant la valeur de *k*, d'où dépend l'intervalle entre les verres, la lettre M en recevra un plus grand coëfficient. Par conséquent nous arriverons à ce but, quand nous donnerons à la lettre M une valeur tant soit peu plus grande, qu'elle n'auroit en effet dans les formules qui expriment les rayons des faces du second verre; car alors l'intervalle entre les verres sera augmenté dans la même raison, & partant susceptible d'une plus grande diminution, en cas que les circonstances l'exigent.

40. Puisque l'intervalle entre les deux verres qui constituent ces objectifs, est si petit, dans la combinaison avec d'autres verres on peut regarder ces objectifs comme des lentilles simples, dont la distance de foyer est $= p$, par laquelle les rayons des quatre faces sont déterminés. Mais ces objectifs composés ont ce grand avantage sur les simples, qu'ils ne produisent non seulement aucune confusion, mais

qu'un léger changement dans leur distance est même capable de détruire la confusion qui résulteroit des autres verres. Donc, pourvu que l'Artiste trouve moyen de surmonter toutes les difficultés qui s'opposent à leur exécution, on peut espérer de porter par ce moyen les lunettes au plus haut degré de perfection dont elles soient susceptibles; & cela d'autant plus, que j'ai déjà découvert les moyens d'augmenter le champ apparent, autant qu'on peut le souhaiter, en multipliant le nombre des verres oculaires.

41. Mais, quand la confusion qui résulte des autres verres, est si grande, que la lettre M approche fort de l'unité, on ne sauroit plus se servir des formules que j'ai données pour le ménisque. Pour ces cas j'ajoute ici une table, qui montre les véritables valeurs des rayons des deux faces de notre ménisque, pour la raison de réfraction de 1,54 : 1.

Pour le Ménisque,

	rayon de sa face de devant,	rayon de sa face de derriere,
si M $= 1$ - - - - -	$-0,40588p$	$+0,47769p$
si M $= \frac{1}{2}$ - - - - - -	$-0,51170p$	$+0,63135p$
si M $= \frac{1}{4}$ - - - - - -	$-0,59961p$	$+0,77079p$
si M $= \frac{1}{6}$ - - - - - -	$-0,63847p$	$+0,83620p$
si M $= \frac{1}{8}$ - - - - - -	$-0,66039p$	$+0,87422p$
si M $= \frac{1}{10}$ - - - - - -	$-0,67460p$	$+0,89930p$
si M $= \frac{1}{12}$ - - - - - -	$-0,68446p$	$+0,91691p$.

RE-

RECHERCHES
SUR LES
TÉLESCOPES A RÉFLEXION ET LES MOYENS DE LES PERFECTIONNER. (*)

PAR M. L. EULER.

1.

Quelque grands que ſoient les avantages que ces Téleſcopes ont procurés à l'Aſtronomie & pour les autres beſoins de la vie, on a pourtant raiſon de ſe plaindre du trop petit champ qu'ils découvrent; ce qui rend auſſi leur uſage fort pénible, en nous obligeant de les tenir ſi fixes, qu'il eſt impoſſible de s'en ſervir ſur la mer, où des lunettes ordinaires peuvent ſouvent être employées avec ſuccès, pourvu qu'elles ne ſoient pas trop longues. On s'imagine communément, que ce petit champ eſt une ſuite néceſſaire de l'uſage des miroirs, & le préjugé eſt preſque général, qu'il eſt impoſſible de remédier à ce défaut. Il faut bien que les Anglois, qui ont d'ailleurs parfaitement bien réuſſi dans la conſtruction de ces Téleſcopes, ſoient dans ce ſentiment, puiſqu'il ne paroit pas qu'ils ayent travaillé à les délivrer de ce grand inconvénient.

2. Or, nonobſtant cette grande autorité, je ſuis perſuadé que l'uſage des miroirs n'eſt pas néceſſairement aſſujetti à ce défaut, mais que c'eſt uniquement à l'arrangement peu avantageux des verres oculaires avec les miroirs, qu'il faut attribuer la cauſe du petit champ apparent; & ſi l'on vouloit s'arrêter à un ſemblable arrangement dans les lunettes, on tomberoit dans le même défaut. On trouve dans tous les téleſcopes preſque la même diſpoſition des verres oculaires, & on n'en

(*) Lu le 25 Février 1762.

n'en découvre aucune autre raison, si ce n'est que les objets sont par ce moyen représentés sans les couleurs d'iris. Mais il y a une infinité d'autres arrangemens qui produisent le même effet, parmi lesquels il y en aura sans doute qui découvrent un plus grand champ; & j'ose même assurer, qu'il seroit possible de pousser l'augmentation du champ aussi loin qu'on voudra, tout comme j'en ai fait voir la possibilité dans les lunettes.

3. D'ailleurs il est clair, au premier coup d'œil, que la disposition des oculaires dans les meilleurs télescopes d'Angleterre est fort peu propre à fournir un champ raisonnable. On n'a qu'à examiner le dernier oculaire, qui est pour la plupart un ménisque tournant sa face concave vers l'œil: je ne saurois deviner, quel préjugé a pu conduire à cette figure, qui est certainement la moins propre à tous égards, & principalement par rapport au champ apparent, qui demande sans aucun doute des oculaires également convexes des deux côtés, afin qu'ils soient susceptibles de la plus grande ouverture, d'où le champ apparent dépend principalement. Dans les verres oculaires, il ne s'agit plus de remédier à la confusion, mais aussi à cet égard un ménisque seroit fort peu propre.

4. Comme il est impossible que l'expérience ait décidé pour l'usage d'un ménisque au lieu de l'oculaire, à moins qu'un hazard n'en soit la cause, je crois plutôt que quelques raisonnemens illusoires ont donné naissance à ce préjugé: ce qui est d'autant plus vraisemblable, que les véritables principes de la Dioptrique, sur lesquels la construction de ces sortes d'instrumens devroit être fondée, ne sont pas encore suffisamment développés, & qu'on s'est souvent laissé séduire par des raisonnemens tout à fait équivoques. Si je puis me flatter d'avoir établi la vraie Théorie, d'où la perfection de tous les télescopes & microscopes doit être puisée; je me propose d'entreprendre ici les mêmes recherches pour la perfection des Télescopes à réflexion, que j'ai déjà exposées à l'égard des Lunettes & des Microscopes.

5. Or

5. Or je remarque d'abord que la construction des télescopes à réflexion est fondée sur les mêmes principes que celle des lunettes ordinaires, & qu'on y peut appliquer les mêmes formules générales que j'ai données dans le XIII Volume de nos Mémoires pour perfectionner les Lunettes & les Microscopes, pourvu qu'on ait égard à quelques circonstances, que la nature des miroirs & leur disposition exige. Les miroirs concaves répondent aux verres convexes, & leurs distances de foyer, qui sont égales à la moitié de leurs rayons de courbure, entrent de la même maniere dans le calcul que celles des verres: & pour les miroirs convexes, ils font le même service que les verres concaves, & leur distance de foyer doit être considérée comme négative. La seule différence à laquelle il faut réfléchir dans l'application de mes regles, est que les miroirs n'ont aucune part à l'engendrement des couleurs d'iris.

7. Je commencerai donc par examiner en général la disposition des miroirs & des verres dont on se sert ordinairement, pour voir à quel point il est possible d'augmenter le champ apparent; & ensuite je chercherai d'autres arrangemens, qui peuvent fournir encore un plus grand champ. Or la disposition ordinaire convient avec celle des lunettes à quatre verres, qui représentent les objets debout: & comme ces lunettes découvrent un assez grand champ, lorsque les verres sont bien arrangés, il semble qne les télescopes devroient produire le même effet. Mais la circonstance des miroirs exige nécessairement une certaine limitation dans l'arrangement des verres, qui n'est pas favorable au champ; & une lunette à quatre verres, dont l'arrangement seroit semblable à celui qui a lieu dans les télescopes, n'en découvriroit pas un plus grand. Il est donc bien important de considérer soigneusement cette limitation que l'usage des miroirs exige dans la disposition des verres.

7. Or, dans les télescopes, au lieu de l'objectif, on se sert d'un miroir concave PAP, dont la distance de foyer soit $= p$, qui est égale à la moitié du rayon du bassin convexe sur lequel il est formé: Planche VI. Fig. 1.

ce miroir est au milieu percé d'un trou *o o*, qui ne doit pas être trop grand, afin que la surface polie réfléchisse assez de rayons pour représenter en *a* l'image *ap*, la distance A*a* étant $= p$. Mais, au delà de cette image en B, on dispose encore un miroir concave QBQ, dont la distance de foyer soit $= q$, & partant le rayon de sa courbure $= 2q$; la distance *a*B est ordinairement un peu plus grande que *q*, de sorte que ce miroir transporte l'image *ap* par le trou du grand miroir quelque part en *bq*. Or, derriere le trou en C, est un verre convexe RCR, dont la distance de foyer soit $= r$, qui rapproche l'image *bq* en *cr*: & enfin, au delà se trouve l'oculaire SDS, dont la distance de foyer soit $= s$, qui est à peu près égale à la distance *c*D, & derriere ce verre le point O marque le lieu de l'œil.

Fig. 2. 8. Maintenant la seconde figure représente une lunette à quatre verres, qui répond parfaitement à ce télescope; où premierement, au lieu des miroirs, on a les verres convexes PP & QQ également éloignés par l'intervalle AB, dont les distances de foyer sont aussi *p* & *q*. Les autres verres RR & SS sont aussi les mêmes que ceux du télescope, & disposés par les mêmes intervalles BC & CD. Supposons outre cela que les ouvertures des verres & miroirs soient aussi les mêmes de part & d'autre; & puisque les images *ap*, *bq* & *cr*, dont la premiere est renversée & les autres debout, sont également situées, non seulement le grossissement sera le même de part & d'autre, mais aussi le lieu de l'œil O sera également éloigné du dernier oculaire SS, & la lunette découvrira le même champ que le télescope. Ce n'est qu'à l'égard de ces trois articles que la lunette produit le même effet que le télescope; mais ils constituent presque aussi l'essence de la construction.

9. Considérons donc aussi la différence qui regne entre ces deux instrumens; & d'abord il est évident, que le télescope est considérablement plus court que la lunette, & cela de la distance AB, de sorte que dans les grands instrumens la longueur du télescope se trouve presque réduite à la moitié. Ensuite, quoique la grandeur des miroirs

roirs soit aussi grande que l'ouverture des verres qui leur répondent, le télescope fournira beaucoup moins de clarté; puisque d'un côté les miroirs ne réfléchissent pas tant de lumiere, que les verres n'en transmettent, & que de l'autre côté la lumiere est diminuée par le trou dans le grand miroir, aussi bien que par l'interception des rayons causée par le petit miroir; & c'est la raison pourquoi les télescopes ne fournissent jamais tant de clarté que les lunettes, à moins qu'on ne veuille renoncer au grossissement.

10. Mais il n'y a aucun doute que le télescope n'ait un très grand avantage sur la lunette, parce que les miroirs ne sont pas assujettis à la différente réfrangibilité des rayons: & c'est à cet égard qu'ils sont très préférables aux lunettes ordinaires. Cependant, pour ce qui regarde les couleurs d'iris, dont les objets paroissent environnés, elles ne manquent pas d'être causées par les verres oculaires; & l'objectif, quoiqu'il soit de verre, n'y a aucune part. Pour délivrer la représentation des objets de ces couleurs d'iris, les verres oculaires doivent être arrangés d'une certaine maniere, que j'ai enseignée dans ma Théorie insérée au XIII Volume de nos Mémoires: & il faut prendre à cet égard la même précaution dans la construction des Télescopes, que des Lunettes, avec cette différence, que dans le télescope il n'y a que les deux verres RR & SS qui engendrent les couleurs d'iris, pendant que dans la lunette le second verre QQ y concourt aussi. Et partant, si l'on veut appliquer mes regles aux télescopes, il faut considérer le second verre QQ, comme ne contribuant rien à la production des couleurs d'iris.

11. Comme tout télescope peut être transformé dans une lunette de la maniere que je viens d'expliquer, si l'on pouvoit réciproquement transformer une lunette donnée dans un télescope, on lui procureroit aussi le même champ apparent que la lunette découvre, & on n'auroit aucune raison de se plaindre d'un champ trop étroit. Mais il est très évident que cette derniere transformation ne sauroit avoir lieu, à moins que la distance BC entre le second & le troisieme verre ne soit,

 ou

ou égale à la distance AB, ou plus grande, puisque dans le télescope aucun verre ne sauroit être placé entre entre les points A & B. Ensuite, l'ouverture du second verre QQ, qui répond au petit miroir QQ, doit être très petite, pour ne pas intercepter trop de rayons: & enfin, l'ouverture du troisieme verre RR ne sauroit être plus grande que le trou dont le grand miroir est percé, qu'il est bon de faire aussi petit qu'il est possible.

12. Il semble qu'on pourroit remédier à cet inconvénient, en donnant au miroir une plus grande étendue, pour qu'une assez grande quantité de lumiere en puisse être réfléchie, quoiqu'on y fasse un trou très considérable; & alors on ne seroit plus astreint, ni à faire le second miroir QQ si petit, ni à donner au verre RR une trop petite ouverture. Mais il n'y a aucun doute que l'expérience n'ait fait abandonner cet expédient, qui n'est pas certainement échappé à l'attention de ceux qui ont travaillé sur cette matiere; & on s'est aussi convaincu par la Théorie, que vers le centre d'un miroir la réflexion est beaucoup plus réguliere pour former une image distincte, que vers les bords; de sorte qu'une figure annulaire ne produit jamais un aussi bon effet qu'une circulaire de la même aire. Par cette raison, je suivrai dans ces recherches la même regle, de percer le grand miroir d'un très petit trou, & de ne faire le petit miroir que tant soit peu plus grand, comme cela se pratique dans tous les télescopes d'Angleterre.

13. Voilà donc bien des limitations pour la lunette, que je substitue ici à la place du télescope. D'abord la distance BC ne sauroit être plus petite que AB, & ensuite l'ouverture des verres QQ & RR doit être très petite. Si nous consultons la pratique des meilleurs Artistes Anglois, le diametre du trou *oo* n'est qu'un quart du diametre du miroir PP; & dans les grands instrumens il en est une partie encore plus petite, comme $\frac{1}{5}$, ou même $\frac{1}{6}$: mais toujours le diametre du petit miroir QQ est un peu plus grand en raison de 2 : 3 ou de 3 : 4. Or, en observant ces limitations dans la construction de la lunette, on comprend aisément, qu'elle ne sauroit plus découvrir un si grand champ,

champ, que si nous avions la pleine liberté d'arranger les verres à notre gré. C'est aussi la raison pourquoi les télescopes découvrent un si petit champ, qui est principalement borné par la trop petite ouverture du verre RR; ce qu'il sera bon de prouver par l'exemple d'un tel télescope, qui est d'ailleurs très excellent.

14. Ayant examiné ce télescope, j'ai trouvé les mesures suivantes en pouces.

Dist. de foyer $p = 18$; $q = 3$; $r = 4$; $s = 1\frac{1}{3}$.

Ouvertures $AP = 1\frac{5}{8}$; $BQ = \frac{1}{2}$; $CR = \frac{1}{3}$; $DS = \frac{1}{4}$.

Distances $AB = 21\frac{2}{5}$; $BC = 21\frac{1}{2}$; $CD = 3$; environ.

De là cherchons d'abord les images pour juger par-là du grossissement, & posant le demi-diametre du champ apparent $= \Phi$, nous trouverons:

Distances $Aa = 18$; $Ba = 3\frac{2}{5}$; $Bb = 25\frac{1}{2}$; $Cb = 4$; $Cc = 2$;

Images $ap = 18\Phi$; $bq = 135\Phi$; $cr = 67\frac{1}{2}\Phi$.

Donc, puisque la distance cD est $1\frac{1}{3}$, cette image sera vue sous un angle $= 50\Phi$, & partant 50 fois plus grande que l'objet même, de sorte que le grossissement peut être estimé $m = 50$; ce qui semble assez bien d'accord avec l'expérience, quoique le plus léger changement dans le lieu du petit miroir, en changeant ensuite convenablement la distance CD, puisse très considérablement varier le grossissement.

15. Pour juger maintenant du champ apparent même, considérons dans la lunette la route d'un rayon qui, venant de l'extrémité visible de l'objet, passe par le centre de l'objectif A, puisque l'ouverture de l'objectif ne contribue rien au champ. Ce rayon donc passera par le point Q du second verre, de sorte que $BQ = 21\frac{2}{5}\Phi$, où il sera rompu, & passera l'axe en M, de sorte que $BM = 3\frac{1}{2}$ & $CM = 18$; donc $CR = 110\Phi$. Or en R se fait une nouvelle réfraction, qui dirige le rayon en N, en sorte que $CN = 5\frac{1}{7}$ & $DN = 2\frac{1}{7}$, donc $DS = 46\Phi$. Enfin en S le rayon est rompu pour aller en O, de Fig. 3.

de ſorte que DO $= \frac{50}{73}$, & en O eſt le lieu de l'œil. A préſent il ne reſte qu'à comparer ces valeurs BQ, CR, & DS, avec les réelles, & la moindre valeur qui en réſulte pour ϕ donnera le demi-diametre du champ apparent.

16. Le ſecond verre, ou le petit miroir QQ, donne $21\frac{2}{5}\phi = \frac{1}{2}$, & partant $\phi = \frac{5}{214}$, ou bien $\phi = \frac{1}{43}$: de la même maniere le verre RR donnne $110\phi = \frac{1}{3}$; donc $\phi = \frac{1}{330}$: & enfin l'oculaire SS donne $46\phi = \frac{1}{4}$; donc $\phi = \frac{1}{184}$. C'eſt donc le verre RR qui borne le champ apparent, & ſi les circonſtances permettoient de donner au verre RR une plus grande ouverture, le champ apparent en recevroit une augmentation proportionelle. Mais il ſeroit bien inutile de vouloir donner dans cette vue à l'oculaire SS une plus grande ouverture, puiſque maintenant ce n'eſt qu'environ la moitié qui y concourt, & le reſte eſt tout à fait ſuperflu. On en pourroit reſſerrer l'ouverture preſque juſqu'à la moitié, ſans diminuer le champ; & partant il eſt fort indifférent, quelle figure on donne à ce verre; mais je ne ſaurois croire, que celle d'un méniſque ait la moindre préférence. Je regarde plutôt comme un grand défaut de cet arrangement des verres, que l'ouverture de l'oculaire SS n'entre point dans la détermination du champ, qui par un autre arrangement pourroit être porté preſqu'au double.

17. Comparons maintenant ce champ apparent, dont le demi-diametre eſt $\phi = \frac{1}{330}$, avec celui que les lunettes ordinaires découvrent pour le même groſſiſſement $m = 50$. Or celles qui ſont compoſées de deux verres convexes, en donnant à l'oculaire une ouverture dont le diametre eſt égal à la moitié de ſa diſtance de foyer, donnent pour ce groſſiſſement $\phi = \frac{1}{214}$; & une bonne lunette à quatre verres peut bien donner le double $\phi = \frac{1}{107}$, de ſorte que le diametre du champ ſeroit trois fois plus grand que dans le téleſcope, & partant le champ même 9 fois plus grand. Par là il eſt clair qu'on a bien raiſon de ſe plaindre, que ces téleſcopes découvrent un trop petit champ; & j'en ai trouvé auſſi des devis, qui donnent encore un moindre champ.

18.

18. Rien ne feroit plus aisé que de procurer à ce télescope un plus grand champ, & de le porter même au double; on n'auroit qu'à faire le trou du grand miroir deux fois plus grand, & augmenter également l'ouverture du verre RR. Il est vrai qu'on perdroit quelque chose sur la clarté; mais ce qu'on gagneroit dans le champ ne seroit pas à mépriser; d'ailleurs, une petite augmentation dans la grandeur des miroirs pourroit réparer ce défaut. Mais je ne disconviens pas, que ce remede ne puisse être sujet à d'autres inconvéniens; & partant, sans augmenter le trou du miroir, ne seroit-il pas possible de trouver une autre disposition dans les verres, tant à l'égard de leurs distances de foyer, que de leurs distances entr'eux, qui produisît un plus grand champ? On n'en sauroit douter, & quelques essais nous découvriroient bien d'autres dispositions. Mais on ne manqueroit pas de tomber dans un autre inconvénient, celui des couleurs d'iris; & c'est peut-être la raison pourquoi l'on n'ose presque rien changer dans l'arrangement une fois établi. Voici donc mes recherches, où je tiens compte de toutes les conditions qu'on doit remplir dans la construction de ces télescopes.

19. Après avoir nommé les distances de foyer de nos quatre verres p, q, r, s, soient les demi-diametres de leurs ouvertures:

$$AP = x; \quad BQ = \pi' q; \quad CR\ \pi'' r \quad \& \quad DS = \pi''' s,$$

& ensuite les nombres exposans pour les lieux des images:

$$B = \frac{b}{1 - b}; \quad C = \frac{-c}{1 + c}; \quad D = \infty, \quad \& \text{ de là}$$

$$\mathfrak{B} = b; \qquad \mathfrak{C} = -c \quad \& \quad \mathfrak{D} = 1.$$

Cela posé, que m signifie le grossissement, & Φ le demi-diametre du champ apparent, & on aura $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$. Que ω soit la plus grande valeur que les fractions π, π', π'' puissent recevoir, & posons $\pi = \mathfrak{b}\omega$; $\pi' = \gamma\omega$ & $\pi'' = -\omega$, où l'on peut prendre $\frac{1}{4}$ pour

pour ω, si le verre est également convexe des deux côtés; or β & γ sont des fractions plus petites que 1. Alors, posant pour abréger $M = \frac{1+\gamma-\beta}{m-1}$, nous aurons $\Phi = M\omega$, où il est clair que, pour augmenter le champ apparent, il seroit bon de prendre $\gamma = 1$, & de diminuer β autant qu'il est possible. Mais, puisque nous sommes gênés par les circonstances exposées ci-dessus, nous sommes obligés de prendre $\gamma < 1$; mais l'oculaire SS influera toujours par toute son ouverture sur le champ apparent, d'où il doit être fait également convexe des deux côtés.

20. En faisant maintenant l'application de mes regles générales, on trouve les déterminations suivantes pour la construction de ces lunettes.

$q = \frac{bM}{\beta b - M}p$	$AP = x$	$AB = \frac{\beta b}{\beta b - M}p$,
	$BQ = \frac{M}{\beta b - M}x + \beta\omega q$	$BC = \frac{b}{1-b}\cdot\frac{M(\beta(1-b)+\gamma c)}{(\beta b - M)(\gamma c+\beta-M)}p$,
$r = \frac{bc}{1-b}\cdot\frac{M}{\gamma c+\beta-M}p$	$CR = \gamma\omega r$	$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{M(1+\gamma(1+c))}{(\gamma c+\beta-M)(1-\beta+\gamma+M)}p$,
$s = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{M}{1-\beta+\gamma+M}p$	$DS = \omega s$	& $DO = \frac{s}{Mm}$.

Mais, pour détruire les couleurs d'iris, puisque le second verre QQ, comme tenant lieu d'un miroir, ne doit pas entrer en compte, nous aurons cette équation à remplir:

$$\frac{\gamma}{\gamma c+\beta-M} = \frac{1}{1-\beta+\gamma+M},$$ doù nous tirons $\gamma c+\beta-M = \gamma(1-\beta+\gamma+M)$.

Ensuite il faut observer que BC ne sauroit être plus petit que AB, & que tant BQ que CR doivent être très petits.

21.

21. Posons, pour abréger, $\beta - \gamma - M = \nu M$, & partant $Mm = 1 - \nu M$; donc $M = \frac{1}{m + \nu}$ & $\phi = \frac{\omega}{m + \nu}$. Soit de plus $\beta = M$, & partant $\gamma = (\mu - \nu)M$, de sorte que $\mu > \nu\,(\mu + 1)$; alors la destruction des couleurs d'iris donne $(\mu - \nu)\,c + \mu = (\mu - \nu)\,(1 - \nu M) = (\mu - \nu)\,\frac{m}{m + \nu}$; donc $c = \frac{m}{m + \nu} - \frac{\mu}{\mu - \nu}$, & $1 + c = \frac{m}{m + \nu} - \frac{\nu}{\mu - \nu}$; & de là

$q = \frac{b}{(\mu + 1)\,b - 1}\,p$	$AP = x$	$AB = \frac{(\mu + 1)\,b}{(\mu + 1)\,b - 1}\,p$,
	$BQ = \frac{1}{(\mu + 1)\,b - 1}\,x + \frac{\mu + 1}{m + \nu}\,\omega\, q$	$BC = \frac{b}{1 - b} \cdot \frac{(\mu + 1)(1 - b) + (\mu - \nu)\,c}{(\mu + 1)\,b - 1} \cdot \frac{(\mu + \nu)\,p}{m(\mu - \nu)}$,
$r = \frac{bc}{1 - b} \cdot \frac{m + \nu}{\mu - \nu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{\mu - \nu}{m + \nu}\,\omega\, r$	$CD = \frac{bc}{(1 - b)(1 + c)} \cdot \frac{m + \mu}{\mu - \nu} \cdot \frac{p}{m}$,
$s = \frac{bc}{(1 - b)(1 + c)} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \omega\, s$	$DO = \frac{m + \nu}{m}\,s$;

où il est clair, puisque c doit être un nombre positif, qu'il faut prendre ν négativement, ce qui est fort avantageux, parce que le champ apparent en devient plus grand.

22. Remplissons maintenant la condition par laquelle l'intervalle BC ne sauroit être plus petit que AB; & posons pour cet effet $BC = AB$, puisque rien n'empêche qu'on ne mette le verre RR dans le trou même du miroir, ou qu'on n'en puisse considérer la distance comme nulle. Alors on aura

$$(\mu + 1)(1 - b)\,m(\mu - \nu) = (\mu + 1)(1 - b)(m + \nu) + (\mu - \nu)(m + \nu)\,c,$$

& partant $\frac{c}{1 - b} = \frac{(\mu + 1)\,((\mu - \nu - 1)\,m - \nu)}{(\mu - \nu)\,(m + \nu)}$;

 où

où, si nous substituons la valeur de $c = \frac{-\nu(m+\mu)}{(\mu-\nu)(m+\nu)}$, nous aurons $1-b = \frac{-\nu(m+\mu)}{(\mu+1)((\mu-\nu-1)m-\nu)}$, d'où nous tirons aussi valeur de b.

23. Posons donc $-n$ au lieu de ν, pour avoir $\phi = \frac{\omega}{m-n}$, & nous aurons

$$c=\frac{n(m+\mu)}{(\mu+n)(m-n)};\quad 1-b=\frac{n(m+\mu)}{(\mu+1)((\mu+n-1)m+n)}.$$

Soit ensuite, pour abréger,

$$(\mu+1)b-1=\zeta=\frac{m(\mu-1)(\mu+n)}{(\mu+n-1)m+n},\quad \&$$

$$\frac{c}{1-b}=\theta=\frac{(\mu+1)((\mu+n-1)m+n)}{(\mu+n)(m+n)},$$

& les déterminations pour la construction du télescope seront

$q=\frac{b}{\zeta}p$	$AP=x$	$AB=\frac{(\mu+1)b}{\zeta}p,$
$r=b\theta\cdot\frac{m-n}{\mu+n}\cdot\frac{p}{m}$	$BQ=\frac{x}{\zeta}+\frac{\mu+1}{m-n}\omega q$	$BC=\frac{(\mu+1)b}{\zeta}p,$
	$CR=b\theta\omega\cdot\frac{p}{m}$	$CD=\frac{b\theta}{1+c}\cdot\frac{m+\mu}{\mu+n}\cdot\frac{p}{m},$
$s=\frac{b\theta}{1+c}\cdot\frac{p}{m}$	$DS=\omega s$	$DO=\frac{m-n}{m}s;$

où CR marquant le demi-diametre du trou, doit être une certaine partie comme $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de x, & alors la lettre ζ doit aussi être ou 4 ou 5. Le demi-diametre du trou à l'œil doit être plus petit que

$$\frac{m\mu + 2mn - nn}{m(\mu + n)}s \text{ . ang. BCQ},$$

pour écarter les rayons étrangers. Or

$$\text{ang. BCQ} = \frac{\zeta}{1 + \zeta} : \frac{BQ}{p},$$

d'où la dite formule devient $= \frac{\mu - 1}{m}$. BQ.

24. Posant $n = o$, on aura pour le champ $\Phi = \frac{\omega}{m}$, ou bien prenant $\omega = \frac{1}{4}$ en minutes $\Phi = \frac{859}{m}$ minutes, qui est déjà plus grand que dans les lunettes astronomiques ordinaires. Or alors nous aurons $c = o$, $1 - b = o$, donc $b = 1$, &

$$\zeta = \mu \quad \& \ \theta = \frac{\mu\mu - 1}{\mu}.$$

Par conséquent, prenant $\omega = \frac{1}{4}$, nous obtiendrons les déterminations suivantes:

$q = \frac{p}{\mu}$	$AP = x$	$AB = \frac{\mu + 1}{\mu}p,$
	$BQ = \frac{x}{\mu} + \frac{(\mu + 1)p}{4m\mu}$	$BC = \frac{\mu + 1}{\mu}p,$
$r = \frac{\mu\mu - 1}{\mu\mu}p$	$CR = \frac{(\mu\mu - 1)p}{4m\mu}$	$CD = \frac{\mu\mu - 1}{\mu\mu} \cdot \frac{(m + \mu)}{\mu}p,$
$s = \frac{\mu\mu - 1}{\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{s}{4}$.	$DO = s.$

Il faut donc prendre $\mu = 4$, ou plus grand, & puisque l'ouverture du miroir doit être proportionelle au grossissement, supposons en général $x = \frac{m}{\eta}$ pouces, & soit $CR = \frac{x}{\mu}$; par conséquent $\frac{(\mu\mu - 1)p}{4m\mu} = \frac{m}{\mu\eta}$; donc $p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu - 1)}$ pouces.

25. Donnons donc ces valeurs aux quantités x & p, & nos mesures seront exprimées en pouces de cette sorte:

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu - 1)}$	$AP = \frac{m}{\eta}$	$AB = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu - 1)}$,
$q = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu\mu - 1)}$	$BQ = \frac{m}{\eta(\mu - 1)}$	$BC = \frac{4mm}{\eta\mu(\mu - 1)}$,
$r = \frac{4mm}{\eta\mu\mu}$	$CR = \frac{m}{\eta\mu}$	$CD = \frac{4m(m+\mu)}{\eta\mu\mu}$,
$s = \frac{4m}{\eta\mu}$	$DS = \frac{m}{\eta\mu}$	$DO = \frac{4m}{\eta\mu}$;

où CR exprime en même tems le demi-diametre du trou dont il faut percer le grand miroir PP; & BQ devient un peu plus grand que CR. Or le demi-diametre du champ apparent sera $\Phi = \frac{859}{m}$ minutes.

26. Dans les lunettes on prend communément, selon la regle de Huygens, $\eta = 60$; mais, puisqu'ici le miroir PP est percé d'un trou, & qu'il réfléchit moins de rayons qu'un verre n'en transmet, il faut bien prendre $\eta = 40$. Supposons donc $\mu = 4$, & nous aurons les mesures suivantes pour la construction des Télescopes:

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{150}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{120}$,
$q = \frac{mm}{600}$	$BQ = \frac{m}{120}$	$BC = \frac{mm}{120}$,
$r = \frac{mm}{160}$	$CR = \frac{m}{160}$	$CD = \frac{m(m+4)}{160}$,
$s = \frac{m}{40}$	$DS = \frac{m}{160}$	$DO = \frac{m}{40}$.

Or,

Or, posant $\mu = 5$, on aura

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{240}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{200}$,
$q = \frac{mm}{1200}$	$BQ = \frac{m}{160}$	$BC = \frac{mm}{200}$,
$r = \frac{mm}{250}$	$CR = \frac{m}{200}$	$CD = \frac{m(m+5)}{250}$,
$s = \frac{m}{50}$	$DS = \frac{m}{200}$	$DO = \frac{m}{50}$.

Posons aussi $\mu = 6$ pour avoir

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{350}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{300}$,
$q = \frac{mm}{2100}$	$BQ = \frac{m}{200}$	$BC = \frac{mm}{300}$,
$r = \frac{mm}{360}$	$CR = \frac{m}{240}$	$CD = \frac{m(m+6)}{360}$,
$s = \frac{m}{60}$	$DS = \frac{m}{240}$	$DO = \frac{m}{60}$.

27. Or, pour rendre insensible la confusion causée par l'ouverture du miroir, il faut prendre à peu près $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces; d'où l'on devroit prendre à peu près $\mu = \sqrt[3]{m}$; mais rien n'empêche de prendre μ plus petit; la confusion deviendra encore moins sensible. Donc la premiere forme aura lieu tant que $m > 64$, la seconde tant que $m > 125$, & la troisieme tant que $m > 216$. Donc, pour de moindres grossissemens, il faut encore ajouter cette forme $\mu = 3$:

Dist. de foyer,	Ouvertures,	Intervalles,
$p = \frac{mm}{80}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = \frac{mm}{60}$,
$q = \frac{mm}{240}$	$BQ = \frac{m}{80}$	$BC = \frac{mm}{60}$,
$r = \frac{mm}{90}$	$CR = \frac{m}{120}$	$CD = \frac{m(m+3)}{90}$,
$s = \frac{m}{30}$	$DS = \frac{m}{120}$	$DO = \frac{m}{30}$;

où le grossissement doit être plus grand que 27. Mais, en général prenant $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces, & $x = \frac{m}{40}$ pouce, on détermine la valeur du nombre μ ainsi: $\mu\mu = 1 + \sqrt[3]{mm}$, ayant posé $\eta = 40$; mais laissant le nombre η indéterminé, il faut prendre $\mu\mu = 1 + \frac{40\sqrt[3]{mm}}{\eta}$.

28. Commençons donc plutôt par la valeur de p, qui doit être $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces, & de là nous tirons $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{\mu\mu - 1}$. Or cette valeur doit être tout au plus 40, & si elle est plus petite, on jouira d'une lumiere d'autant plus grande. Par cette raison, posons $\eta < 40$, & nous aurons $\sqrt[3]{mm} < \mu\mu - 1$; donc $m < (\mu\mu - 1)\sqrt{(\mu\mu - 1)}$. Par conséquent, prenant successivement pour μ les nombres 3, 4, 5, 6, on n'aura qu'à observer les conditions suivantes:

si $\mu = 3$; $m < 23$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{8} = 5\sqrt[3]{mm}$,

si $\mu = 4$; $m < 58$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{15} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{mm}$,

si μ

si $\mu = 5$; $m < 118$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{24} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{mm}$,

si $\mu = 6$; $m < 207$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{35} = \frac{8}{7}\sqrt[3]{mm}$,

si $\mu = 7$; $m < 333$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{48} = \frac{5}{6}\sqrt[3]{mm}$,

si $\mu = 8$; $m < 500$; & $\eta = \frac{40\sqrt[3]{mm}}{63} = \frac{40}{63}\sqrt[3]{mm}$.

Mais, ayant trouvé ces valeurs, & pris p ou égal ou plus grand que $\frac{1}{10}m\sqrt[3]{m}$, les autres mesures seront:

$p = \frac{4mm}{\eta(\mu\mu - 1)}$	$AP = \frac{m}{\eta} = x$	$AB = \frac{\mu+1}{\mu}p = p + q$.
$q = \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{x}{\mu - 1}$	$BC = \frac{\mu+1}{\mu}p = p + q$.
$r = \frac{\mu\mu - 1}{\mu\mu}p$	$CR = \frac{x}{\mu} = \frac{1}{4}s$	$CD = r + s$.
$s = \frac{\mu}{m}r$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DO = s$.

Or pour le champ apparent on a toujours $\Phi = \frac{859}{m}$ minutes.

29. Mais tenons-nous-en aux formules du §. 25, & prenons $\mu\mu = 1 + \sqrt[3]{mm}$, posant $\eta = 40$, afin que $p = \frac{1}{10}m\sqrt[3]{m}$, & nos mesures seront:

$p =$

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$	$AP = \frac{m}{40}$	$AB = p + q,$
$q = \frac{p}{\mu}$	$BQ = \frac{m}{40(\mu-1)}$	$BC = p + q,$
$r = \frac{mm}{10\mu\mu}$	$CR = \frac{m}{40\mu}$	$CD = r + s,$
$s = \frac{m}{10\mu}$	$DS = \frac{m}{40\mu}$	$DO = s;$

d'où l'on voit que plus le grossissement m est grand, plus aussi sera augmenté le nombre μ, de sorte que le trou devient de plus en plus petit par rapport au miroir même. En voici quelques exemples.

I. Exemple $m = 10$, où $\mu = 2,3752$:

$p = 2,1544$	$AP = 0,2500$	$AB = 2,8749,$
$q = 0,7205$	$BQ = 0,1818$	$BC = 2,8749,$
$r = 1,7725$	$CR = 0,1053$	$CD = 2,1935,$
$s = 0,4210$	$DS = 0,1052$	$DO = 0,4210,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 86' = 1^\circ, 26'$.

II. Exemple $m = 20$, où $\mu = 2,8928$:

$p = 5,4288$	$AP = 0,5000$	$AB = 7,3059,$
$q = 1,8771$	$BQ = 0,2642$	$BC = 7,3059,$
$r = 4,7800$	$CR = 0,1729$	$CD = 5,4714,$
$s = 0,6914$	$DS = 0,1729$	$DO = 0,6914,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 43'$.

III. Exemple $m = 30$, où $\mu = 3,2642$:

$p = 9,3217$	$AP = 0,7500$	$AB = 12,1774,$
$q = 2,8557$	$BQ = 0,3313$	$BC = 12,1774,$
$r = 8,4468$	$CR = 0,2298$	$CD = 9,3659,$
$s = 0,9191$	$DS = 0,2298$	$DO = 0,9191,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 29'$.

IV. Exemple $m = 50$, où $\mu = 3{,}8173$:

$p = 18{,}4201$	$AP = 1{,}2500$	$AB = 23{,}2455$,
$q = 4{,}8254$	$BQ = 0{,}4437$	$BC = 23{,}2455$,
$r = 17{,}1561$	$CR = 0{,}3274$	$CD = 18{,}4659$,
$s = 1{,}3098$	$DS = 0{,}3274$	$DO = 1{,}3098$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 17'$.

V. Exemple $m = 75$, où $\mu = 4{,}3341$:

$p = 31{,}6287$	$AP = 1{,}8750$	$AB = 38{,}9263$,
$q = 7{,}2976$	$BQ = 0{,}5624$	$BC = 38{,}9263$,
$r = 29{,}9449$	$CR = 0{,}4326$	$CD = 31{,}6754$,
$s = 1{,}7305$	$DS = 0{,}4326$	$DO = 1{,}7305$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 11\frac{1}{2}'$.

VI. Exemple $m = 100$, où $\mu = 4{,}7481$:

$p = 46{,}4159$	$AP = 2{,}5000$	$AB = 56{,}1916$,
$q = 9{,}7757$	$BQ = 0{,}6670$	$BC = 56{,}1916$,
$r = 44{,}3571$	$CR = 0{,}5261$	$CD = 46{,}4615$,
$s = 2{,}1044$	$DS = 0{,}5261$	$DO = 2{,}1044$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 8\frac{1}{2}'$.

30. Quoique le champ que cet arrangement découvre ſoit déjà aſſez conſidérable, voyons s'il n'eſt pas poſſible de le porter à un plus haut degré encore, Dans cette vue, poſons dans les formules du §. 20, $\gamma = 1$, & ſoit $\mathfrak{C} = (\mu + 1)M$, pour avoir $M(m-1) = 2 - (\mu + 1)M$, donc $M \frac{2}{m+\mu}$; & $\Phi = \frac{1718}{m+\mu}$ minutes, prenant $\omega = \frac{1}{4}$. Or la deſtruction des couleurs d'iris donne $c + \mu M = 2 - \mu M$, ou $c = 2 - 2\mu M = \frac{2(m-\mu)}{m+\mu}$. De là nous aurons:

$\beta b - M = M((\mu+1)b-1)$; $\gamma c + \beta - M = 2 - \mu M$; $1 - \beta + \gamma + M = 2 - \mu M = mM$;

$\beta(1-b) + \gamma c = M(m+1-(\mu+1)b)$; $1 + \gamma(1+c) = 2mM$,

& partant ces meſures pour la conſtruction des téleſcopes :

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{40}$ pouces	$AB = \frac{(\mu+1)b}{(\mu+1)b-1} p$
$q = \frac{b}{(\mu+1)b-1} \cdot p$	$BQ = \frac{x}{(\mu+1)b-1} + \frac{\mu+1}{2(\mu+\mu)} q$	$BC = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{m+1-(\mu+1)b}{(\mu+1)b-1} \cdot \frac{p}{m}$,
$r = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{2(m-\mu)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{4} r$	$CD = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{4(m-\mu)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m} = 2s$
$s = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{2(m-\mu)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{m+\mu}{2m} s$;

où il faut faire $BC = AB$, ce qui fournit $b = \frac{\mu m - 1}{(\mu+1)(m-1)}$, &

$1 - b = \frac{m-\mu}{(\mu+1)(m-1)}$, & $(\mu+1)b - 1 = \frac{(\mu-1)m}{m-1}$;

d'où réſultent les meſures ſuivantes :

$p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{40}$ pouces	$AB = \frac{\mu m - 1}{(\mu-1)m} p$
$q = \frac{\mu m - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-1}{(\mu-1)m} x + \frac{m+1}{2(m+\mu)} q$	$BC = \frac{\mu m - 1}{(\mu-1)m} p$
$r = \frac{2(\mu m - 1)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{4} r$	$CD = 2s$
$s = \frac{2(\mu m - 1)}{3m-\mu} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DO = \frac{m+\mu}{2m} s$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{1718}{m+\mu}$ minutes.

31. Mais ici, à moins que le grossissement m ne soit très grand, on ne sauroit satisfaire aux conditions prescrites. Car, prenant pour μ un nombre petit, afin que CR ou le demi-diametre du trou devienne petit, le petit miroir devient trop grand, & intercepte une trop grande portion de lumiere: mais, si l'on augmente le nombre μ, il faut faire le trou trop grand, d'où la clarté souffre encore une perte considérable. Pour mieux éclaircir cela, considérons le cas où $m = 50$, & prenons $p = 18$, comme nous avons trouvé ci-dessus, & nous aurons:

$p = 18$	$AP = 1,25 = \frac{5}{4}$	$AB = \frac{50\mu - 1}{50(\mu - 1)} \cdot 18$
$q = \frac{50\mu - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{18}{50}$	$BQ = \frac{49}{40(\mu - 1)} + \frac{\mu + 1}{2(50 + \mu)} q$	$BC = \frac{50\mu - 1}{50(\mu - 1)} \cdot 18$
$r = \frac{2(50\mu - 1)}{50 + \mu} \cdot \frac{18}{50}$	$CR = \frac{50\mu - 1}{50 + \mu} \cdot \frac{9}{50}$	$CD = 2s$
$s = \frac{2(50\mu - 1)}{150 - \mu} \cdot \frac{18}{50}$	$DS = \frac{5}{4} s$	$DO = \frac{50 + \mu}{100} s$.

Maintenant posons $\mu = 3\frac{1}{2}$, afin que CR devienne égal à peu près à la premiere partie de BQ, & nous trouverons les mesures suivantes:

$p = 18$ pouces	$AP = 1,25$	$AB = 25,056$
$q = 5,568$	$BQ = 0,724$	$BC = 25,056$
$r = 2,341$	$CR = 0,585$	$CD = 1,710$
$s = 0,855$	$DS = 0,214$	$DO = 0,457$,

& le demi-diametre du champ $\Phi = 32'$,

qui dans le premier cas n'étoit que de $17'$. Mais c'est ici un grand inconvénient, que le diametre du petit miroir surpasse la moitié de celui du grand, & que le diametre du trou lui est presque égal.

32. Développons aussi le cas où $m = 100$; il faudra prendre $\mu = 4$, pour remplir les conditions prescrites. Or pour p je mettrai 45 pouces, d'où nous tirons les mesures suivantes:

$p = 45$ pouces	$AP = 2,500$	$AB = 59,850$
$q = 11,970$	$BQ = 1,113$	$BC = 59,850$
$r = 3,453$	$CR = 0,863$	$CD = 2,426$
$s = 1,213$	$DS = 0,303$	$DO = 0,630,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 16\frac{1}{2}$ minutes.

Si nous comparons cet arrangement avec celui du premier cas, le demi-diametre du champ eſt preſque ici le double, mais le petit miroir eſt preſque deux fois plus grand ſelon le diametre, & le diametre du trou eſt au précédent comme 5 à 3. Or déjà auparavant le trou eſt plus grand qu'on ne le fait ordinairement. Cependant il ſemble que ce cas où $m = 100$ pourroit bien être exécuté dans la pratique, puiſque la grandeur du champ compenſeroit la diminution de la clarté, quand même il ne ſeroit pas poſſible de donner au grand miroir une plus grande ouverture, que la grandeur du trou ſemble pourtant bien admettre. Auſſi n'eſt-il pas abſolument néceſſaire, que le petit miroir ſoit auſſi grand qu'il eſt marqué ici; & il ſuffit que BQ ſurpaſſe un peu CR.

33. Pour remédier à cet inconvénient du trop grand trou dans les moindres groſſiſſemens, il faut rabattre quelque choſe du champ apparent, qui reſtera néanmoins plus grand que le premier cas, & par conſéquent beaucoup plus grand que dans les téleſcopes ordinaires. Il faut donc donner à γ une moindre valeur que 1, que je laiſſerai indéterminée, & poſant comme auparavant $\mathfrak{C} = (\mu + 1)M$, nous aurons $M = \frac{1+\gamma}{m+\mu}$; & la deſtruction des couleurs d'iris fournit $c = \frac{(1+\gamma)(\gamma m - \mu)}{\gamma(m+\mu)}$. Or l'égalité entre les intervalles AB & BC donne $1 - b = \frac{\gamma m - \mu}{(1+\mu)(\gamma m - 1)}$, & $b = \frac{\gamma\mu m - 1}{(1+\mu)(\gamma m - 1)}$. De là nous tirons les meſures ſuivantes:

$p =$

$$p = \alpha m \sqrt[3]{m} \text{ pouces}$$

$$q = \frac{\gamma\mu m - 1}{\gamma(\mu\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m}$$

$$r = \frac{(1+\gamma)(\gamma\mu m - 1)}{\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{\gamma m}$$

$$s = \frac{(\text{[illegible]})(\gamma\mu m - 1)}{\gamma(\gamma+2)m - \mu} \cdot \frac{p}{m}$$

$$AP = x = \tfrac{1}{4}\alpha m$$

$$BQ = \frac{\gamma m - 1}{(\mu - 1)\gamma m}x + \frac{(\mu+1)(1+\gamma)}{4(m+\mu)}q$$

$$CR = \frac{\gamma}{4}r$$

$$DS = \tfrac{1}{4}s$$

$$AB = \frac{\gamma\mu m - 1}{(\mu-1)\gamma m}p$$

$$BC = \frac{\gamma\mu m - 1}{(\mu-1)\gamma m}p$$

$$CD = \frac{1+\gamma}{\gamma}s$$

$$DO = \frac{m+\mu}{(1+\gamma)m}s$$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \dfrac{3437'(1+\gamma)}{4(m+\mu)}$ minutes;

où α est écrit pour $\frac{1}{10}$, afin que les formules soient plus générales, en cas qu'on veuille prendre $AP = x$ plus grand ou plus petit.

34. Avant que de faire l'application, je remarque que, dans la valeur de BQ, la derniere partie, qui est plus petite que la premiere, y est ajoutée, afin que le même degré de clarté regne par tout le champ apparent; & si on négligeoit cette partie, il n'en résulteroit d'autre inconvénient, sinon que les extrémités du champ paroitroient moins lumineuses que le milieu. Donc, puisque cet inconvénient est peu considérable, il suffit de donner à BQ une étendue tant soit peu plus grande que la premiere partie; mais à celle-ci il faut égaler le demi-diametre du trou CR, ce qui nous donne cette équation:

$$\frac{(1+\gamma)(\gamma\mu m - 1)}{(m+\mu)} \cdot \frac{\alpha\sqrt[3]{m}}{4\gamma} = \frac{\gamma m - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{\alpha}{4\gamma},$$

ou bien $(1+\gamma)(\mu - 1)(\gamma\mu m - 1)\sqrt[3]{m} = (m+\mu)(\gamma m - 1)$.

Maintenant on peut donner à μ une valeur, qu'on jugera convenable pour rendre le trou assez petit, & ensuite il faut chercher par cette équation la valeur de γ.

35. Il se présente ici une solution particuliere fort commode en posant $\gamma = \frac{1}{\mu}$, qui donne

$$(\mu\mu - 1)(m - 1)\sqrt[3]{m} = mm - \mu\mu, \text{ \& partant}$$

$$\mu\mu = \frac{mm + (m-1)\sqrt[3]{m}}{1 + (m-1)\sqrt[3]{m}},$$

d'où l'on tire à peu près $\mu = \sqrt[3]{m} + \frac{1}{2\sqrt[3]{m}}$;

où je remarque que la valeur de μ ne sauroit être rendue beaucoup plus grande; car, posant $\mu = \sqrt[3]{m} + 1$, la valeur de γ en résulteroit négative. Par cette raison je m'arrête à cette solution particuliere, puisqu'on ne sauroit espérer d'augmenter μ beaucoup au delà: & dès que le grossissement monte à 50 & au delà, le trou ne devient plus trop grand, & pourtant le champ apparent est encore très considérable. Cependant il n'est pas nécessaire d'observer si soigneusement ces valeurs de γ & μ, puisqu'il suffit que les ouvertures BQ & CR deviennent assez petites.

36. Je considérerai donc le grossissement $m = 50$, où je prends $p = 18$ pouces & $x = 1\frac{1}{4}$ pouce; mais, pour faire le petit miroir plus petit que ci-dessus (§. 31), je poserai $\mu = 4$, & j'aurai

$p = 18$ pouces	$AP = 1\frac{1}{4}$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{3(200\gamma - 1)}{25\gamma}$
$q = \frac{3(200\gamma - 1)}{125\gamma}$	$BQ = \frac{50\gamma - 1}{120\gamma} + \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{1800\gamma}$	$CD = \frac{1+\gamma}{\gamma} s$
$r = \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{150\gamma\gamma}$	$CR = \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{600\gamma}$	$DO = \frac{27}{25(1+\gamma)} s$
$s = \frac{9(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{1250\gamma(\gamma+2) - 100}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$\Phi = 16(1+\gamma)$ min.

Main-

Maintenant, puisque $BQ = \frac{50\gamma - 1}{120\gamma} + \frac{1}{2}CR$, & $CR = \frac{(1+\gamma)(200\gamma - 1)}{600\gamma}$, développons ces valeurs pour plusieurs hypothèses de γ.

Si	$\frac{50\gamma - 1}{120\gamma}$	$\frac{(1+\gamma)(200\gamma-1)}{600\gamma}$
$\gamma = 1$	$\frac{49}{120} = 0,408$	$\frac{2.199}{600} = 0,663$
$\gamma = \frac{1}{2}$	$\frac{48}{120} = 0,400$	$\frac{3.198}{2.600} = 0,495$
$\gamma = \frac{1}{3}$	$\frac{47}{120} = 0,392$	$\frac{4.197}{3.600} = 0,438$
$\gamma = \frac{1}{4}$	$\frac{46}{120} = 0,383$	$\frac{5.196}{4.600} = 0,408$
$\gamma = \frac{1}{5}$	$\frac{45}{120} = 0,375$	$\frac{6}{5}.\frac{195}{600} = 0,390$
$\gamma = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{120} = 0,333$	$\frac{11}{10}.\frac{190}{600} = 0,348$;

d'où l'on voit, qu'en diminuant γ, ces nombres vont en décroissant, mais aussi le champ apparent en devient plus petit. Posons donc $\gamma = \frac{1}{2}$, & nous aurons les déterminations suivantes:

$p = 18$ pouces	$AP = 1,250$	$AB = 23,760$
$q = 4,752$	$BQ = 0,565$	$BC = 23,760$
$r = 3,960$	$CR = 0,495$	$CD = 2,741$
$s = 0,901$	$DS = 0,225$	$DO = 0,720$,

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = 24'$,

où

où les valeurs de BQ & CR peuvent bien être admises dans la pratique. Mais considérons aussi le cas $\gamma = \frac{1}{4}$, qui donne

$p = 18$ pouces	AP $= 1{,}250$	AB $= 23{,}520$
$q = 4{,}704$	BQ $= 0{,}519$	BC $= 23{,}520$
$r = 6{,}533$	CR $= 0{,}408$	CD $= 4{,}570$
$s = 0{,}914$	DS $= 0{,}229$	DO $= 0{,}790$,

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = 20'$.

37. Pour la pratique il ne reste donc que d'exposer ici les mesures trouvées pour quelques valeurs du nombre γ:

I. $\gamma = 1$; $\Phi = \frac{1718}{m+\mu}$ min:

$p = am\sqrt[3]{m}$	AP $= x = \frac{1}{4}am$	AB, BC $= \frac{\mu m - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 1}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	BQ $= \frac{m-1}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{\mu+1}{2(m+\mu)}q$	
$r = \frac{2(\mu m - 1)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	CR $= \frac{1}{4}r$	CD $= 2s$
$s = \frac{2(\mu m - 1)}{3m - \mu} \cdot \frac{p}{m}$	DS $= \frac{1}{4}s$	DO $= \frac{m+\mu}{2m}s$

II. $\gamma = \frac{1}{2}$; $\Phi = \frac{1289}{m+\mu}$ min:

$p = am\sqrt[3]{m}$	AP $= x = \frac{1}{4}am$	AB, BC $= \frac{\mu m - 2}{\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 2}{\mu\mu - 1} \cdot \frac{p}{m}$	BQ $= \frac{m-2}{\mu-1} \cdot \frac{x}{m} + \frac{3(\mu+1)}{8(m+\mu)}q$	
$r = \frac{3(\mu m - 2)}{m+\mu} \cdot \frac{p}{m}$	CR $= \frac{1}{8}r$	CD $= 3s$
$s = \frac{3(\mu m - 2)}{5m - 4\mu} \cdot \frac{p}{m}$	DS $= \frac{1}{4}s$	DO $= \frac{2(m+\mu)}{3m}s$.

III. γ

$$\text{III.}\ \gamma = \tfrac{1}{3};\quad \varphi = \frac{1146}{m+\mu}\ \text{min:}$$

$p = am\sqrt[3]{m}$	$AP = x = \frac{1}{4}am$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{\mu m - 3}{\mu - 1}\cdot\frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 3}{\mu\mu - 1}\cdot\frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-3}{\mu-1}\cdot\frac{x}{m} + \frac{\mu+1}{3(m+\mu)}q$	
$r = \frac{4(\mu m - 3)}{m+\mu}\cdot\frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{12}r$	$CD = 4s$
$s = \frac{4(\mu m - 3)}{7m - 9\mu}\cdot\frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DO = \frac{3(m+\mu)}{4m}s.$

$$\text{IV.}\ \gamma = \tfrac{1}{4};\quad \varphi = \frac{1074}{m+\mu}\ \text{min:}$$

$p = am\sqrt[3]{m}$	$AP = x = \frac{1}{4}am$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{\mu m - 4}{\mu - 1}\cdot\frac{p}{m}$
$q = \frac{\mu m - 4}{\mu\mu - 1}\cdot\frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-4}{\mu-1}\cdot\frac{x}{m} + \frac{5(\mu+1)}{16(m+\mu)}q$	
$r = \frac{5(\mu m - 4)}{m+\mu}\cdot\frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{16}r$	$CD = 5s$
$s = \frac{5(\mu m - 4)}{9m - 16\mu}\cdot\frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DO = \frac{4(m+\mu)}{5m}s.$

38. De ces différens arrangemens on peut choisir, pour chaque cas proposé, celui qui conviendra le mieux avec les circonſtances qu'on aura en vue. Pour en faire mieux voir l'application, choiſiſſons le III cas, & ſuppoſons $\mu = 5$, pour avoir ces meſures:

$p =$

$p = am\sqrt[3]{m}$	$AP = x = \frac{1}{4}am$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{5m-3}{4m}p = 6q$
$q = \frac{5m-3}{24m}p$	$BQ = \frac{m-3}{4m}x + \frac{2q}{m+5}$	
$r = \frac{4(5m-3)}{(m+5)m}p$	$CR = \frac{1}{12}r = \frac{8q}{m+5}$	$CD = 4s$
$s = \frac{4(5m-3)}{7m-45} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4}s$	$DO = \frac{3(m+5)}{4m}s$,

& le demi-diametre du champ apparent $\Phi = \frac{1146}{m+5}$ min., d'où je tirerai les devis suivans, en supposant $p = \frac{1}{12}m\sqrt[3]{m}$ pouce, & $x = \frac{m}{36}$ pouces, conformément à quelques constructions angloises, qui paroissent fort bonnes.

I. Devis $m = 10.$ $\Phi = 76'.$

$p = 1,795$	$AP = 0,278$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 2,112$
$q = 0,352$	$BQ = 0,095$	
$r = 2,250$	$CR = 0,187$	$CD = 4,400$
$s = 1,350$	$DS = 0,338$	$DO = 1,519$

II. Devis $m = 15.$ $\Phi = 57'.$

$p = 3,083$	$AP = 0,417$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 3,702$
$q = 0,617$	$BQ = 0,145$	
$r = 2,959$	$CR = 0,247$	$CD = 3,944$
$s = 0,986$	$DS = 0,247$	$DO = 0,986.$

III. Devis $m = 20.$ $\Phi = 46'.$

$p = 4,524$	$AP = 0,556$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 5,484$
$q = 0,914$	$BQ = 0,192$	
$r = 3,511$	$CR = 0,276$	$CD = 3,696$
$s = 0,924$	$DS = 0,231$	$DO = 0,866.$

Cet

Cet arrangement ne convient donc point aux petits grossissemens, puisque le trou du miroir devient trop grand; il faut pour ces cas donner à μ une plus petite valeur. Mais, pour les grands grossissemens, cette forme y paroit fort propre.

39. Or, en considérant bien toutes les circonstances, & en particulier que le petit miroir devienne un peu plus grand que le trou, afin qu'aucun rayon direct n'y puisse passer, je trouve que la quatrieme hypothese peut être appliquée à tous les grossissemens, en supposant $\mu = 1 + \sqrt[3]{m}$. Donc, pour ôter les irrationalités, je pose

$$\gamma = \tfrac{1}{4};\ m = n^3;\ \mu = n+1, \text{ de sorte que } \Phi = \frac{1074}{n^3+n+1} \text{ min:},$$

& je trouve ces mesures:

$$p = \frac{n^4}{12}$$

$$q = \frac{n^3(n+1)-4}{12(n+2)}$$

$$r = \frac{n^3(n+1)-4}{n^3+n+1} \cdot \frac{5n}{12}$$

$$s = \frac{n^3(n+1)-4}{9n^3-16(n+1)} \cdot \frac{5n}{12}$$

$$AP = \frac{n^3}{36}$$

$$BQ = \frac{n^3-4}{36n} + \frac{r}{16n}$$

$$CR = \frac{r}{16}$$

$$DS = \frac{s}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \\ BC \end{array}\right\} = \frac{n^3(n+1)-4}{12}$$

$$CD = 5s$$

$$DO = \tfrac{4}{5}\left(1+\frac{n+1}{n^3}\right)s.$$

Le demi-diametre du trou auquel on applique l'œil, doit être plus petit que $\frac{BQ}{nn}$, afin que les rayons étrangers en soient exclus:

Mais, puisqu'il n'est pas nécessaire d'observer ces mesures avec une exactitude scrupuleuse, il suffit de prendre des valeurs approchantes pour la commodité du calcul: d'où l'on aura

$$p = \frac{n^4}{12} \qquad AP = \frac{n^3}{36} \qquad \left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{n^3(n+1)}{12} - \tfrac{1}{3}$$

$$q = \frac{n^3 - nn + 2n - 3}{12} \qquad BQ = \frac{nn}{36} + \frac{5(n+1)}{192}, \qquad CD = 5s$$

$$r = \frac{5(nn + n - 3)}{12} \qquad CR = \frac{5(nn+n-3)}{192} \qquad DO = \frac{nn+n+2}{27};$$

$$s = \frac{5(nn + n + 2)}{108} \qquad DS = \tfrac{1}{4}s$$

d'où je tire les devis ſuivans:

I. Devis $n = 2\frac{1}{2}$; donc $m = 15\frac{1}{2}$, $\phi = 56'$.

p	=	$3\frac{1}{4}$	AP	=	0,43	AB, BC	=	4,22
q	=	1	BQ	=	0,25			
r	=	$2\frac{1}{2}$	CR	=	0,16	CD	=	1,25
s	=	$\frac{1}{4}$	DS	=	0,06	DO	=	0,20.

II. Devis $n = 3$; donc $m = 27$ & $\phi = 36'$.

p	=	6,750	AP	=	0,750	AB, BC	=	8.667
q	=	1,733	BQ	=	0,316			
r	=	4,194	CR	=	0,262	CD	=	3,630
s	=	0,726	DS	=	0,182	DO	=	0,581,

III. Devis $n = 3\frac{1}{2}$; donc $m = 43$ & $\phi = 21'$.

p	=	12,505	AP	=	1,196	AB, BC	=	15,752
q	=	2,864	BQ	=	0,412			
r	=	5,818	CR	=	0,364	CD	=	4,390
s	=	0,878	DS	=	0,220	DO	=	0,702.

IV. Devis $n = 4$; donc $m = 64$ & $\phi = 15\frac{1}{2}$ min.

 $p =$

$p = 21,333$	$AP = 1,778$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 26,333$
$q = 4,389$	$BQ = 0,536$	
$r = 7,632$	$CR = 0,477$	$CD = 5,310$
$s = 1,062$	$DS = 0,265$	$DO = 0,850.$

V. Devis $n = 4\frac{1}{2}$; donc $m = 91$ & $\Phi = 11'$.

$p = 34,172$	$AP = 2,531$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 41.432$
$q = 6,374$	$BQ = 0,672$	
$r = 9,648$	$CR = 0,603$	$CD = 6,365$
$s = 1,273$	$DS = 0,318$	$DO = 1,018.$

VI. Devis $n = 5$; donc $m = 125$ & $\Phi = 8\frac{1}{2}'$.

$p = 52,083$	$AP = 3,472$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 62,167$
$q = 8,881$	$BQ = 0,816$	
$r = 11,864$	$CR = 0,742$	$CD = 7,550$
$s = 1,510$	$DS = 0,378$	$DO = 1,208.$

VII. Devis $n = 6$; donc $m = 216$ & $\Phi = 4\frac{1}{2}$ min.

$p = 108,000$	$AP = 6,000$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 125,667$
$q = 15,708$	$BQ = 1,157$	
$r = 16,906$	$CR = 1,057$	$CD = 10,290$
$s = 2,058$	$DS = 0,512$	$DO = 1,646.$

40. Or j'ai déjà remarqué ci-dessus, que pour les grands grossissemens on peut même poser $y = 1$, d'où le champ apparent devient d'autant plus considérable. Et partant on peut établir les especes suivantes.

I. Espece,

depuis $m = 8$ jusqu'à $m = 27$; $\Phi = \frac{1074}{m+3}$ min:

 $p =$

$$p = \ldots\ldots \qquad AP = x = \ldots \qquad \left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{3m-4}{2}\cdot\frac{p}{m}$$

$$q = \frac{3m-4}{8}\cdot\frac{p}{m} \qquad BQ = \frac{m-4}{2}\cdot\frac{x}{m} + \tfrac{1}{2}\,CR$$

$$r = \frac{5(3m-4)}{m+3}\cdot\frac{p}{m} \qquad CR = \tfrac{1}{16}\,r \qquad CD = 5s$$

$$s = \frac{5(3m-4)}{9m-48}\cdot\frac{p}{m} \qquad DS = \tfrac{1}{4}\,s \qquad DO = \frac{4(m+3)}{5m}\,s.$$

II. Espece,

depuis $m = 27$ jusqu'à $m = 64$; $\Phi = \frac{1146}{m+4}$ min:

$$p = \ldots\ldots \qquad AP = x = \ldots \qquad \left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{4m-3}{3}\cdot\frac{p}{m}$$

$$q = \frac{4m-3}{15}\cdot\frac{p}{m} \qquad BQ = \frac{m-3}{3}\cdot\frac{x}{m} + \tfrac{1}{3}\,CR$$

$$r = \frac{4(4m-3)}{m+4}\cdot\frac{p}{m} \qquad CR = \tfrac{1}{12}\,r \qquad CD = 4s$$

$$s = \frac{4(4m-3)}{7m-36}\cdot\frac{p}{m} \qquad DS = \tfrac{1}{4}\,s \qquad DO = \frac{3(m+4)}{4m}\,s.$$

III. Espece,

depuis $m = 64$ jusqu'à $m = 125$; $\Phi = \frac{1289}{m+5}$ min:

$$p = \ldots\ldots \qquad AP = x = \ldots\ldots \qquad \left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{5m-2}{4}\cdot\frac{p}{m}$$

$$q = \frac{5m-2}{24}\cdot\frac{p}{m} \qquad BQ = \frac{m-2}{4}\cdot\frac{x}{m} + \tfrac{1}{4}\,CR$$

$$r = \frac{3(5m-2)}{m+5}\cdot\frac{p}{m} \qquad CR = \tfrac{1}{8}\,r \qquad CD = 3s$$

$$s = \frac{3(5m-2)}{5m-20}\cdot\frac{p}{m} \qquad DS = \tfrac{1}{4}\,s \qquad DO = \frac{2(m+5)}{3m}\,s.$$

IV.

IV. Espece,

depuis $m = 125$ jusqu'à 216; $\Phi = \frac{1718}{m+6}$ minutes:

$p = \ldots\ldots$	$AP = x = \ldots\ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{6m-1}{5} \cdot \frac{p}{m}$
$q = \frac{6m-1}{35} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{m-1}{5} \cdot \frac{x}{m} + \frac{1}{5} CR$	$CD = 2s$
$r = \frac{2(6m-1)}{m+6} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{4} r$	$DO = \frac{m+6}{2m} s.$
$s = \frac{2(6m-1)}{3m-6} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	

41. De là il sera aisé de corriger la construction du télescope dont j'ai parlé ci-dessus, en sorte que le champ devienne considérablement plus grand. On y avoit

$$p = 18 \text{ pouces}, \quad x = 1\tfrac{1}{2} \quad \& \quad m = 50,$$

& le demi-diametre du champ Φ n'étoit que $10'$: or maintenant la seconde espece nous fournit cette construction:

$p = 18$ pouces	$AP = 1,5$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 23,64$
$q = 4,73$	$BQ = 0,61$	$CD = 3,64$
$r = 5,25$	$CR = 0,44$	$DO = 0,68,$
$s = 0,91$	$DS = 0,23$	

& le demi-diametre du champ $\Phi = 21'$.

Outre cela il n'y a aucun doute, que de cette façon la représentation ne soit plus nette, & entierement délivrée des couleurs d'iris, au lieu que la construction ordinaire ne remplit qu'à peu près cette condition.



MOYENS

MOYENS

de procurer aux Téleſcopes à réflexion un plus grand champ encore.

42. Pour augmenter d'avantage le champ apparent de ces téleſcopes, on n'a qu'à ajouter encore un verre oculaire. On pourroit bien le placer dans le foyer même du dernier oculaire, où tombe l'image cr; mais, comme ce verre deviendroit alors lui-même un objet de la viſion, entant qu'il n'eſt pas parfaitement tranſparent, & que ſes parties viſibles ſe confondroient avec la véritable image, il vaudra mieux placer ce nouveau verre avant le foyer, plus près du verre RCR. Ayant donc à conſidérer, après avoir fait la réduction à une lunette ordinaire, cinq verres, ſoient p, q, r, s, t leurs diſtances de foyer, & les demi-diametres de leurs ouvertures x, πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, $\pi''' t$, Cela poſé, nommant le groſſiſſement $= m$ & le demi-diametre du champ Φ, on aura $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$. Maintenant poſons $\pi = \beta\omega$; $\pi' = \gamma\omega$; $\pi'' = -\omega$ & $\pi''' = \omega$; & ſoit, pour abréger, $M = \frac{2 + \gamma - \beta}{m - 1}$, afinque nous ayons $\Phi = M\omega$, laquelle valeur eſt conſidérablement plus grande qu'auparavant.

43. Soient de plus les nombres qui déterminent tant les diſtances de foyer des verres, que leurs intervalles,

$$B = \frac{+b}{1-b};\quad C = \frac{-c}{1+c};\quad D = \frac{-d}{1+d};\quad E = \infty$$

$$\mathfrak{B} = +b;\quad \mathfrak{C} = -c;\quad \mathfrak{D} = -d;\quad \mathfrak{E} = 1;$$

& de là nous aurons:

$$\mathfrak{B}\pi - \Phi = +(\beta b - M)\omega$$
$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi = -(\gamma c + \beta - M)\omega$$
$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = +(d - \gamma + \beta - M)\omega$$
$$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = +(2 + \gamma + \beta + M)\omega,$$

d'où

d'où nous tirons les formules ſuivantes:

$$p = \ldots\ldots$$

$$q = \frac{bM}{\beta b - M}p$$

$$r = \frac{bc}{1-b} \cdot \frac{M}{\gamma c + \beta - M}p$$

$$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M}{d - \gamma + \beta - M}p$$

$$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{M}{2 + \gamma - \beta + M}p$$

$$AB = \frac{\beta b}{\beta b - M}p$$

$$BC = \frac{b}{1-b} \cdot \frac{M(\gamma c + \beta(1-b))}{(\beta b - M)(\gamma c + \beta - M)}p$$

$$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{M(d - \gamma(1+c))}{(\gamma c + \beta - M)(d - \gamma + \beta - M)}p$$

$$DE = \frac{bdc}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{M(2+d)}{(d - \gamma + \beta - M)(2 + \gamma - \beta + M)}p$$

$$EO = \frac{s}{2 + \gamma - \beta + M}.$$

Or, pour les ouvertures des verres, en tenant compte tant du champ apparent que de la clarté dans tous les verres, nous aurons, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$,

$$AP = x$$

$$BQ = \frac{M}{\beta b - M}x + \tfrac{1}{4}\beta q$$

$$CR = \frac{M}{\gamma c + \beta - M}x + \tfrac{1}{4}\gamma r$$

$$DS = \frac{M}{d - \gamma + \beta - M}x + \tfrac{1}{4}s$$

$$ET = \frac{M}{2 + \gamma - \beta + M}x + \tfrac{1}{4}t.$$

où pour les trois derniers verres la premiere partie eſt ſi petite, qu'on peut aiſément la négliger par rapport à l'autre.

44. Maintenant la deſtruction des couleurs d'iris exige cette équation:

$$\frac{\gamma}{\gamma c + \beta - M} + \frac{1}{d - \gamma + \beta - M} = \frac{1}{2 + \gamma - \beta + M}.$$

Pour

Pour cet effet nous pourrions égaler chaque partie du premier membre à la moitié de l'autre, pour avoir:

$$\gamma c + \beta - M = 2\gamma (2 + \gamma - \beta + M) \quad \&$$
$$d - \gamma + \beta - M = 2 (2 + \gamma - \beta + M).$$

Mais, pour arriver à une solution plus générale, posons

$$\gamma c + \beta - M = \frac{\gamma}{1 - \zeta} (2 + \gamma - \beta + M) \quad \&$$

$$d - \gamma + \beta - M = \frac{1}{\zeta} (2 + \gamma - \beta + M).$$

Or mettons comme ci-dessus $\beta = (\mu + 1) M$, & nous aurons:

$$M = \frac{2 + \gamma}{m + \mu}; \quad \& \ \beta = \frac{(\mu + 1)(2 + \gamma)}{m + \mu};$$

ensuite $2 + \gamma - \beta + M = \frac{(2 + \gamma) m}{m + \mu}$, & $\frac{M}{2 + \gamma - \beta + M} = \frac{1}{m}$;

& partant

$$\gamma c + \mu M = \frac{\gamma (2 + \gamma) m}{(1 - \zeta)(m + \mu)}, \ \& \ c = \frac{2 + \gamma}{\gamma} \cdot \frac{\gamma m - (1 - \zeta)\mu}{(1 - \zeta)(m + \mu)}$$

$$d - \gamma + \mu M = \frac{(2 + \gamma) m}{\zeta (m + \mu)}, \quad \& \ d = \frac{(2 + \gamma + \gamma\zeta) m - 2\zeta\mu}{\zeta (m + \mu)};$$

outre cela

$$d - \gamma (1 + c) = \frac{1 - \zeta + \gamma\zeta}{\zeta (1 - \zeta)} \cdot \frac{(2 + \gamma) m}{m + \mu} \ \& \ 2 + d = \frac{(2 + \gamma)(1 + \zeta) m}{\zeta (m + \mu)}.$$

45. Ayant donc trouvé les justes valeurs pour les lettres c & d, si nous faisons ces substitutions, nous aurons d'abord pour le champ apparent: $\Phi = \frac{2 + \gamma}{4 (m + \mu)}$, ou bien $\Phi = \frac{859 (2 + \gamma)}{m + \mu}$ minutes, & ensuite les mesures suivantes:

$p =$

$p = \ldots\ldots$	$AP = x$	$AB = \frac{(\mu+1)b}{(\mu+1)b-1}p$
$q = \frac{b}{(\mu+1)b-1}p$	$BQ = \frac{x}{(\mu+1)b-1} + \frac{(\mu+1)(2+\gamma)q}{4(m+\mu)}$	$BC = \frac{b}{1-b}\cdot\frac{\gamma c+\beta(1-b)}{\beta b-M}\cdot\frac{(1-\zeta)p}{\gamma m}$
$r = \frac{bc}{1-b}\cdot\frac{(1-\zeta)p}{\gamma m}$	$CR = \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m} + \frac{1}{4}\gamma r$	$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{1-\zeta+\gamma\zeta}{\gamma}\cdot\frac{p}{m}$
$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)}\cdot\frac{\zeta p}{m}$	$DS = \frac{\zeta x}{m} + \frac{1}{4}s$	$DE = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)}\cdot(1+\zeta)\frac{p}{m}$
$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)}\cdot\frac{p}{m}$	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)m}s.$

Mais la nature du téleſcope exige, qu'il ſoit $BC = AB$, ce qui donne $\beta(1-b) = \frac{M(\gamma c+\beta(1-b))}{\gamma c+\beta+M} = \frac{1-\zeta}{\gamma m}(\gamma c+\beta(1-b))$, & partant $\beta(1-b)(\gamma m-1+\zeta) = (1-\zeta)\gamma c = \frac{(2+\gamma)(\gamma m-(1+\zeta)\mu)}{m+\mu}$; donc: $(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)(1-b) = \gamma m-(1-\zeta)\mu$; par conſéquent

$$1-b = \frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)},\quad \& \quad b = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)},$$

d'où $(\mu+1)b-1 = \frac{\gamma(\mu-1)m}{\gamma m-1+\zeta}$, & $\frac{b}{(\mu+1)b-1} = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{\gamma(\mu\mu-1)m}$.

46. Il faut donc prendre les lettres b, c, d de la maniere ſuivante:

$$b = \frac{\gamma\mu m-1+\zeta}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)};\quad 1-b = \frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{(\mu+1)(\gamma m-1+\zeta)};$$

$$c = \frac{2+\gamma}{m+\mu}\cdot\frac{\gamma m-(1-\zeta)\mu}{\gamma(1-\zeta)};\quad 1+c = \frac{\gamma(3+\gamma-\zeta(m-2(1-\zeta)\mu}{\gamma(1-\zeta)(m+\mu)};$$

 $d =$

$$d = \frac{(2+\gamma+\zeta\gamma)m - 2\zeta\mu}{\zeta(m+\mu)}; \quad 1+d = \frac{(2+\gamma+\zeta+\gamma\zeta)m - \zeta\mu}{\zeta(m+\mu)};$$

$$\& \; \mathfrak{C} = \frac{(\mu+1)(2+\gamma)}{m+\mu};$$ d'où nous aurons:

$p = \ldots.$	$AP = x$	
$q = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BQ = \frac{\gamma m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)m} x + \frac{1}{4}\mathfrak{C}q$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m}$
$r = \frac{bc}{1-b} \cdot \frac{1-\zeta}{\gamma} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m} + \frac{1}{4}\gamma r$	$CD = \frac{bc}{(1-b)(1+c)} \cdot \frac{1-\zeta+\zeta\gamma}{\gamma} \cdot \frac{p}{m}$
$s = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)} \cdot \zeta \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{\zeta x}{m} + \frac{1}{4}s$	$DE = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot (1+\zeta) \cdot \frac{p}{m}$
$t = \frac{bcd}{(1-b)(1+c)(1+d)} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)m} t,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{859(2+\gamma)}{m+\mu}$ min.,

où il eſt évident qu'on peut omettre les termes affectés par $\frac{x}{m}$ comme extrêmement petit.

47. Il ſe préſente ici un cas bien remarquable, en poſant $\zeta = \frac{1}{1+\gamma}$, d'où ces formules deviennent beaucoup plus ſimples, que voici:

$p =$

$p = \ldots\ldots$	$AP = x$	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \dfrac{\mu m - \zeta}{\mu - 1} \cdot \dfrac{p}{m}$
$q = \dfrac{\mu m - \zeta}{\mu\mu - 1} \cdot \dfrac{p}{m}$	$BQ = \dfrac{-\zeta}{\mu - 1} \cdot \dfrac{x}{m} + \dfrac{\zeta}{\mu - 1} \cdot CR$	
$r = \dfrac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{\zeta(1+\zeta)(m+\mu)} \cdot \dfrac{p}{m}$	$CR = \dfrac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{4\zeta\zeta(m+\mu)} \cdot \dfrac{p}{m}$	$CD = \dfrac{2\zeta(1+\zeta)(\mu m + \zeta)}{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu} \cdot \dfrac{p}{m}$
$s = \dfrac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{\zeta(m+\mu)} \cdot \dfrac{p}{m}$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = (1+\zeta)\, t$
$t = \dfrac{(1+\zeta)(\mu m - \zeta)}{(1+2\zeta)m - \zeta\zeta\mu} \cdot \dfrac{p}{m}$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EO = \dfrac{\zeta(m+\mu)}{(1+\zeta)m}\, t.$

$$\& \; \Phi = \frac{859(1+\zeta)}{\zeta(m+\mu)} \text{ min:}$$

Car posant $\gamma = \dfrac{1-\zeta}{\zeta}$, on aura $\beta = \dfrac{(1+\zeta)(\mu+1)}{\zeta(m+\mu)}$, &

$$b = \frac{\mu m - \zeta}{(\mu+1)(m-\zeta)}; \quad c = \frac{(1+\zeta)(m-\zeta\mu)}{\zeta(1-\zeta)(m+\mu)}; \quad d = \frac{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu}{\zeta\zeta(m+\mu)};$$

$$1-b = \frac{m-\zeta\mu}{(\mu+1)(m-\zeta)}; \quad 1+c = \frac{(1+2\zeta-\zeta\zeta)m - 2\zeta\zeta\mu}{\zeta(1-\zeta)(m+\mu)}; \quad 1+d = \frac{(1+2\zeta)m - \zeta\zeta\mu}{\zeta\zeta(m+\mu)};$$

où il faut observer que, puisque $\gamma < 1$, il faut prendre $\zeta > \frac{1}{2}$, & pourtant $\zeta < 1$.

48. Mais, quoique ce cas rende les formules plus simples, il n'est pas propre à notre dessein, puisque le trou du miroir devient trop grand; & partant il s'en faut tenir aux formules générales, que je m'en vais développer, & premierement les distances de foyer:

$$p = \ldots\ldots$$

$$q = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu\mu + 1)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$r = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{\gamma\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$s = \frac{(2+\gamma)\gamma\mu m - 1 + \zeta)((2+\gamma+\gamma\zeta)m - 2\zeta\mu)}{(m+\mu)(\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu} \cdot \frac{p}{m},$$

$$t = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)((2+\gamma+\gamma\zeta)m - 2\zeta\mu)}{(\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu)((2+\gamma+\zeta+\gamma\zeta)m - \zeta\mu)} \cdot \frac{p}{m};$$

enſuite les demi-diametres des ouvertures:

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{\gamma m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)m} x + \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{4\gamma(\mu - 1)(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$CR = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta)}{4\gamma(m+\mu)} \cdot \frac{p}{m} + \frac{(1-\zeta)x}{\gamma m},$$

$$DS = \tfrac{1}{4}s,$$

$$ET = \tfrac{1}{4}t;$$

& enfin les intervalles:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(\mu - 1)} \cdot \frac{p}{m},$$

$$CD = \frac{(2+\gamma)(\gamma\mu m - 1 + \zeta}{\gamma(3+\gamma-\zeta)m - 2(1-\zeta)\mu} \cdot \frac{p}{m},$$

$$DE = (1+\zeta)t,$$

$$EO = \frac{m+\mu}{(2+\gamma)m} t, \quad \& \quad \Phi = \frac{859(2+\gamma)}{m+\mu} \text{ min.}$$

49. Maintenant le trou du miroir ne ſauroit devenir aſſez petit, à moins qu'on ne prenne γ très petit. Pour cet effet, poſons $\gamma m = \eta$, ou $\gamma = \frac{\eta}{m}$, & nous aurons:

$p = \ldots\ldots$ $q =$

$$q = \frac{\eta\mu - 1 + \zeta}{\eta(\mu\mu - 1)} p,$$

$$r = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{\eta\eta(m + \mu)} p,$$

$$s = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)(2m + (1 + \zeta)\eta - 2\zeta\mu)}{m(m + \mu)(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)m\mu)} p,$$

$$t = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)(2m + (1 + \zeta)\eta - 2\zeta\mu)}{m(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)m\mu)((2 + \zeta)m + (1 + \zeta)\eta - \zeta\mu)} p;$$

ensuite:

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{\eta - 1 + \zeta}{\eta(\mu - 1)} x + \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{4\eta m(\mu - 1)(m + \mu)} p,$$

$$CR = \frac{1 - \zeta}{\eta} x + \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{4\eta m(m + \mu)} p,$$

$$DS = \tfrac{1}{4} s,$$

$$ET = \tfrac{1}{4} t;$$

& enfin:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\eta\mu - 1 + \zeta}{\eta(\mu - 1)} p,$$

$$CD = \frac{(2m + \eta)(\eta\mu - 1 + \zeta)}{m(\eta(3 - \zeta)m + \eta\eta - 2(1 - \zeta)\mu m)} p,$$

$$DE = (1 + \zeta) t,$$

$$ED = \frac{m + \mu}{2m + \eta} t \quad \& \quad \phi = \frac{859(2m + \eta)}{m(m + \mu)} \text{ min:}$$

où il faut que $\eta(3 - \zeta) > 2(1 - \zeta)$, ou bien $\eta > \frac{2(1 - \zeta)}{3 - \zeta}$.

Or,

Or, afin que CR deviennne beaucoup plus petit que x, il faut bien que $\eta > 1 - \zeta$.

50. Pour éloigner le nouveau verre du lieu de la derniere image autant qu'il eſt poſſible, poſons $\zeta = 1$, & nous aurons les meſures ſuivantes:

$p = \ldots\ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{\mu}{\mu-1}p,$
$q = \frac{\mu}{\mu\mu-1}p,$	$BQ = \frac{x}{\mu-1} + \frac{\mu(2m+\mu)}{4m(\mu-1)(m+\mu)}p,$	
$r = \frac{\mu(2m+\eta)}{\eta(m+\mu)}p,$	$CR = \frac{\mu(2m+\eta)}{4m(m+\mu)}\cdot p,$	$CD = \frac{\mu}{m}p,$
$s = \frac{2\mu(m+\eta-\mu)}{m(m+\mu)}p,$	$DS = \frac{1}{4}s,$	$DE = 2t,$
$t = \frac{2\mu(m+\eta-\mu)}{m(3m+2\eta-\mu)}p,$	$ET = \frac{1}{4}t,$	$EO = \frac{m+\mu}{2m+\eta}t,$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{859(2m+\eta)}{m(m+\mu)}$ min:

Puiſque μ ne ſauroit être pris plus petit que 4, en ſuppoſant $p = \frac{m\sqrt[3]{m}}{10}$ & $x = \frac{m}{30}$; la valeur de CR ne ſauroit être égalée à $\frac{x}{\mu-1}$, à moins que m ne ſoit plus grand que 64. Mais, pour de ſemblables grands groſſiſſemens, on peut dans le cas précédent prendre $\gamma = 1$, & le champ apparent devient là auſſi grand qu'ici, de ſorte que le nouveau verre ne nous apporte aucun avantage.

RE-

RECHERCHES

SUR

UNE AUTRE CONSTRUCTION DES TÉLESCOPES À RÉFLEXION. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Comme l'arrangement ordinaire dans les télescopes à réflexion répond à celui dont on se sert dans les lunettes à quatre verres, où pourtant une mauvaise imitation est cause que le champ apparent est trop petit, comme je l'ai fait voir dans mon Mémoire précédent; je me propose ici d'appliquer aux télescopes le même arrangement dont on se sert dans la construction des nouvelles lunettes à 5 & 6 verres, dont l'un admet une si petite ouverture, qu'elle paroit très propre à arrêter tous les rayons étrangers. Mais, pour réduire ces lunettes aux télescopes, il y faut faire un petit changement, que la nature des télescopes exige, c'est à dire, que les deux intervalles entre les trois premiers verres AB & BG deviennent égaux entr'eux, & que tant le second QBQ, qui répond au petit miroir, que le troisieme RCR, qu'on met presque dans le trou du grand miroir objectif, ayent une très petite ouverture. Planche VI. Fig. 4.

2. Pour cet effet, je mets le second verre QBQ concave, afin qu'étant placé devant le foyer de l'objectif, il éloigne le foyer davantage jusqu'en C, où l'on met le troisieme verre RCR, afin d'avoir BC = AB. Comme ce verre concave contribue à diminuer la confusion,

(*) Lu le 25 Février 1762.

Fig. 1. fuſion cauſée par l'objectif à cauſe de ſa figure, le miroir convexe QBQ, qu'on lui ſubſtitue dans le téleſcope, produira un ſemblable effet, & l'inſtrument en ſera porté à un plus haut dégré de perfection.

3. Ayant donc ſix verres à conſidérer, ſoient p, q, r, s, t, u, leurs diſtances de foyer, & les demi-diametres de leurs ouvertures, x, πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, $\pi''' t$, & $\pi^{IV} u$, où, à l'exception de l'objectif, je ne conſidere que les parties qui contribuent au champ apparent. Soit donc Φ le demi-diametre du champ apparent, & poſant le groſſiſſement $= m$, on aura $\Phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV}}{m - 1}$. Maintenant, pour rendre ce champ auſſi grand qu'il eſt poſſible, poſons :

$$\pi = -\beta\omega; \quad \pi' = -\gamma\omega; \quad \pi'' = e\omega; \quad \pi''' = \omega \ \& \ \pi^{IV} = -\omega,$$

& ſoit, pour abréger, $M = \frac{2 + \beta - \gamma}{m - 1}$, pour avoir $\Phi = M\omega$.

4. Enſuite, pour les nombres qui déterminent tant les diſtances de foyer des verres que leurs intervalles, poſons :

$$B = \frac{-b}{b - 1}; \quad C = -1; \quad D = \frac{d}{1 - d}; \quad E = \frac{-e}{e + 1};$$

$$\mathfrak{B} = b; \quad \mathfrak{C} = \infty; \quad \mathfrak{D} = d; \quad \mathfrak{E} = -e;$$

d'où nous tirons les valeurs des formules ſuivantes :

$$\mathfrak{B}\pi - \Phi = -(\beta b + M)\omega,$$

$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi = \infty\gamma\omega,$$

$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = +(\gamma - \beta - M)\omega,$$

$$\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = -(e + \gamma - \beta + M)\omega,$$

$$\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi = -(2 - \gamma + \beta + M)\omega.$$

Or la deſtruction des couleurs d'iris demande cette équation :

$$e + \gamma - \beta - M = 2 - \gamma + \beta + M, \text{ ou bien } e = 2(1 - \gamma + \beta + M).$$

5. De

5. De là les distances de foyer des verres avec leurs intervalles sont exprimés ainsi:

$$p = \ldots\ldots$$

$$q = \frac{-bM}{\beta b + M}\,p, \qquad AB = \frac{\beta b}{\beta b + M}\,p,$$

$$r = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma}\cdot p, \qquad BC = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\beta b + M}\,p,$$

$$s = \frac{bd}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma - \beta - M}\,p, \qquad CD = \frac{b}{b-1}\cdot\frac{M}{\gamma - \beta - M}\,p,$$

$$t = \frac{bde}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{M}{e + \gamma - \beta - M}\,p, \qquad DE = \frac{bde}{(b-1)(1-d)}\cdot\frac{M}{(\gamma-\beta-M)(e+\gamma-\beta-M)}\,p,$$

$$u = \frac{bde}{(b-1)(1-d)(1+e)}\cdot\frac{M}{2-\gamma+\beta+M}\,p, \qquad EF = \frac{bde}{(b-1)(1-d)(1+e)}\cdot\frac{M(e+2)}{(e+\gamma-\beta-M)(2-\gamma+\beta+M)}\,p,$$

$$FO = \frac{u}{2-\gamma+\beta+M}.$$

Or, pour les ouvertures complettes, nous avons, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$,

$$AP = x = \ldots\ldots$$

$$BQ = \frac{M}{\beta b + M}\,x + \tfrac{1}{4}\beta q,$$

$$CR = 0x + \tfrac{1}{4}\gamma r,$$

$$DS = \frac{M}{\gamma - \beta - M}\,x + 0s,$$

$$ET = \frac{M}{e + \gamma - \beta - M}\,x + \tfrac{1}{4}t,$$

$$FV = \frac{M}{2 - \gamma + \beta + M}\,x + \tfrac{1}{4}u.$$

6. Pour abréger ces formules, posons $\gamma - \beta - M = nM$, ou $\gamma = \beta + (n+1)M$; & de là nous aurons $M = \frac{2}{m+n}$, & $e + \gamma - \beta - M = 2 - \gamma + \beta + M = 2 - nM = \frac{2m}{m+n}$; donc $e = 2 - 2nM = \frac{2(m-n)}{m+n}$, & $\gamma = \beta + \frac{2(n+1)}{m+n}$. Or, en supposant BC = AB, nous trouvons $\beta = \frac{M}{b-1}$, ou $\beta = \frac{2}{(b-1)(m+n)}$; donc $\gamma = \frac{2(bn+b-n)}{(b-1)(m+n)}$; d'où nous tirons les mesures suivantes:

$p = \ldots$	$AP = x = \ldots$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = \frac{b}{2b-1}p$,
$q = \frac{-b(b-1)}{2b-1}p$,	$BQ = \frac{b-1}{2b-1}x + \frac{bp}{2(2b-1)(m+n)}$,	
$r = \frac{b}{b(n+1)-n}p$,	$CR = \frac{bp}{2(b-1)(m+n)}$,	$CD = \frac{b}{b-1} \cdot \frac{p}{n}$,
$s = \frac{bd}{(b-1)} \cdot \frac{p}{n}$,	$DS = \frac{x}{n}$,	$DE = \frac{bd}{(b-1)(1-d)} \cdot \frac{m-n}{mn}p$,
$t = \frac{bd}{(b-1)(1-d)} \cdot \frac{2(m-n)}{m+n} \cdot \frac{p}{m}$,	$ET = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}t$,	$EF = 2u$;
$u = \frac{bd}{(b-1)(1-d)} \cdot \frac{2(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}$,	$FV = \frac{x}{m} + \frac{1}{4}u$.	$FO = \frac{m+n}{2m}u$;

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{1718}{m+n}$ minutes.

7. Maintenant il faut donner à b une valeur telle que $\frac{b-1}{2b-1}x$ devienne une partie de x, d'autant plus petite que le grossissement m est

eſt grand. Pour cet effet, poſons $\frac{b-1}{2b-1} = \frac{1}{\mu}$, d'où réſulte $b = \frac{\mu-1}{\mu-2}$. Enſuite il faut remarquer que, pour un groſſiſſement m donné, on prend $p = \frac{1}{10} m \sqrt[3]{m}$ & $x = \frac{m}{30}$. De là nous aurons:

$$BQ = \frac{m}{30\mu} + \frac{(\mu-1)\, m\sqrt[3]{m}}{20\mu\,(m+n)} \ \& \ CR = \frac{(\mu-1)\, m\sqrt[3]{m}}{20\,(m+n)}.$$

Or les circonſtances de ces téleſcopes demandent, que BQ ſoit un peu plus grand que CR; & par cette raiſon poſons $\frac{m}{30\,\mu} = \frac{(\mu-1)\, m\sqrt[3]{m}}{20\,(m+n)}$, & partant $m + n = \frac{3}{2}\mu\,(\mu-1)\sqrt[3]{m}$, ou bien $\mu(\mu-1) = \frac{2\,(m+n)}{3\sqrt[3]{m}}$, donc $\mu\mu - \mu > \frac{2}{3}\sqrt[3]{m^2}$, & $\mu > \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{m^2})}$, ou $\mu > \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\sqrt[3]{m}$. On pourra donc prendre $\mu = \sqrt[3]{m}$, ou à peu près, puiſqu'il ne s'agit pas ici de préciſion: & par ce moyen on ſatisfait à la condition preſcrite, que, pour les grands groſſiſſemens, le trou du miroir devient une partie de plus en plus petite de la ſurface entiere.

8. Or, poſant $b = \frac{\mu-1}{\mu-2}$, en prenant $\mu = \sqrt[3]{m}$ environ, ou tant ſoit peu plus grand, ou bien plus exactement $\mu = \frac{5}{6}\sqrt[3]{m} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6\sqrt[3]{m}}$, nos meſures pour la conſtruction du téleſcope ſe réduiſent aux formules ſuivantes:

$$p = \tfrac{1}{10}\, m \sqrt[3]{m} \text{ pouces},$$
$$q = \frac{-(\mu - 1)}{\mu(\mu - 2)} p,$$
$$r = \frac{\mu - 1}{n + \mu - 1} p,$$
$$s = d \,.\, (\mu - 1) \frac{p}{n},$$
$$t = \frac{d}{1-d} \,.\, \frac{2(\mu-1)(m-n)}{m+n} \,.\, \frac{p}{m},$$
$$u = \frac{d}{1-d} \,.\, \frac{2(\mu-1)(m-n)}{3m-n} \,.\, \frac{p}{m},$$

$$AP = x = \frac{m}{30} \text{ pouces}$$
$$BQ = \frac{x}{\mu} + \frac{\mu - 1}{2\mu(m+n)} p,$$
$$CR = \frac{\mu - 1}{2(m+n)} p,$$
$$DS = \frac{x}{n},$$
$$ET = \frac{x}{m} + \tfrac{1}{4} t,$$
$$FV = \frac{x}{m} + \tfrac{1}{4} u,$$

$$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = \frac{\mu - 1}{\mu} p,$$
$$CD = (\mu - 1) \frac{p}{n},$$
$$DE = \frac{d}{1-d} \,.\, \frac{(\mu-1)(m-n)}{n} \,.\, \frac{p}{m} = \frac{(m+n)t}{2n},$$
$$EF = 2u,$$
$$FO = \frac{m+n}{2m} u;$$

& le demi-diametre du champ $\Phi = \frac{1718}{m+n}$ minutes;

où il eſt clair que dans les dernieres ouvertures la partie $\frac{x}{m} = \frac{1}{30}$ pouce eſt ſi petite, qu'on la peut négliger ſans faute.

9. Ayant déterminé le nombre μ, il nous reſte encore deux nombres n & d, qui ſont laiſſés à notre choix. Pour le premier n, il eſt clair, que plus on le prend petit, plus auſſi le champ eſt augmenté; mais cet accroiſſement eſt peu ſenſible dans les grands groſſiſſemens. Il faut donc plutôt avoir égard à la longueur de la lunette, dont les parties CD & DE deviendroient exceſſives, ſi l'on prenoit le nombre n trop petit. Il ſemble même qu'on fera très bien de prendre $n > \mu$, non ſeulement pour rendre DS plus petit que BQ ou CR, mais pour y ménager une très petite ouverture. Pour l'autre nombre d, on le peut prendre en ſorte, que la diſtance de foyer du dernier oculaire u devienne d'une grandeur donnée, par exemple, d'un

d'un pouce: attendu que de trop petits oculaires causent une confusion très sensible.

I. Développement d'un tel Télescope qui grossit 25 fois.

10. Puisque $m = 25$, nous aurons pour la distance de foyer du grand miroir $p = 7\frac{1}{3}$ pouce, & $x = \frac{5}{6}$ pouce; donc $\frac{x}{\mu} = \frac{5}{6\mu}$, & $CR = \frac{\mu - 1}{25 + n} \cdot \frac{11}{3}$. Posons $n = 2\mu$, & pour rendre ces deux valeurs égales, il faut prendre $\mu = 3\frac{1}{3}$, & soit $n = 7$; d'où nous tirons les valeurs suivantes:

$p = 7,333$,	$AP = 0,833$,	$\left.\begin{matrix} AB \\ BC \end{matrix}\right\} = 5,133$,
$q = -3,850$,	$BQ = 0,330$,	
$r = 1,833$,	$CR = 0,267$,	$CD = 2,444$,
$s = \frac{22}{9} d$,	$DS = 0,119$,	$DE = \frac{44}{25} \cdot \frac{d}{1-d}$,
$t = \frac{77}{100} \cdot \frac{d}{1-d}$,	$ET = \frac{1}{4} t$,	$EF = 2u$,
$u = \frac{154}{425} \cdot \frac{d}{1-d}$;	$FV = \frac{1}{4} u$,	$FO = \frac{16}{25} u$;

& le demi-diametre du champ $\Phi = 54'$.

11. Posons maintenant $u = 1$ pouce, &, à cause de $\frac{d}{1-d} = \frac{425}{154}$, nous aurons $d = \frac{425}{579}$, d'où le télescope sera déterminé de cette sorte:

$p =$

$p = 7,333,$	$AP = 0,833,$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 5,133,$
$q = -3,850,$	$BQ = 0,330,$	
$r = 1,833,$	$CR = 0,267,$	$CD = 2,444,$
$s = 1,794,$	$DS = 0,119,$	$DE = 4,857,$
$t = 2,125,$	$ET = 0,531,$	$EF = 2,000,$
$u = 1,000,$	$FV = 0,250,$	$FO = 0,640.$

& le demi-diametre du champ $\Phi = 54'$.

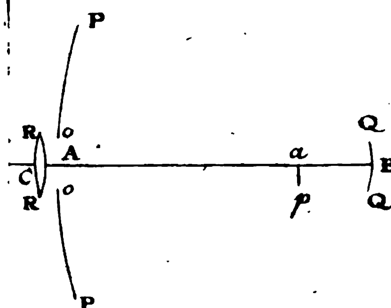
Ici la longueur du grand tuyau ſurpaſſera un peu 5 pouces, mais celle du petit qui contient les verres, devient preſque de 10 pouces.

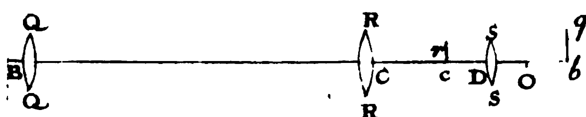
II. Développement d'un tel Téleſcope qui groſſit 50 fois.

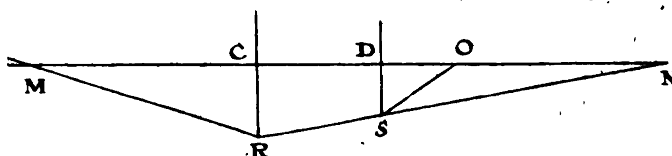
12. Puiſque $m = 50$, la diſtance de foyer du grand miroir devient $p = 18$ pouces, & ſon demi-diametre $x = 1\frac{2}{3}$. Prenons $\mu = 4$, & puiſque $\frac{x}{\mu} = \frac{5}{12}$, & $CR = \frac{3 \cdot 9}{50 + n}$, ces deux valeurs deviennent à peu près égales en prenant $n = 10$, & cette valeur ſert auſſi à diminuer le tuyau qui contient les verres, CO. Nous aurons donc:

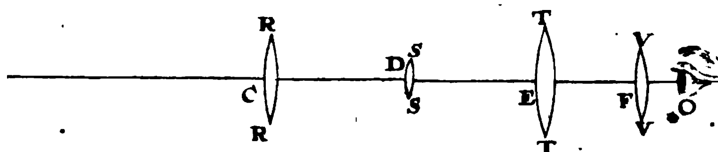
$p = 18$ pouces,	$AP = 1,667,$	$\left.\begin{matrix}AB\\BC\end{matrix}\right\} = 13,500,$
$q = -6,750,$	$BQ = 0,529,$	
$r = 4,154,$	$CR = 0,450,$	$CD = 5,400,$
$s = \frac{27}{5} d,$	$DS = 0,167,$	$DE = \frac{108}{25} \cdot \frac{d}{1-d},$
$t = \frac{36}{25} \cdot \frac{d}{1-d},$	$ET = \frac{1}{4} t,$	$EF = 2u,$
$u = \frac{108}{175} \cdot \frac{d}{1-d},$	$FV = \frac{1}{4} u,$	$FO = \frac{3}{5} u;$

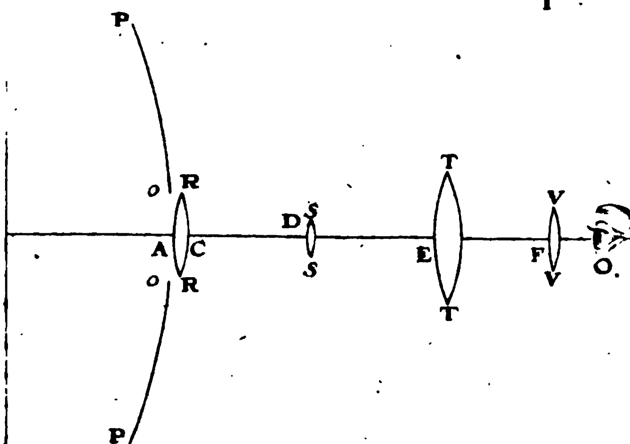
& le demi-diametre du champ $\Phi = 29'$.


P
R
o
A
C
R
o
a
p
Q
B
Q
P


Q
B
Q
R
C
R
r
c
S
D
S
O
q
b


C
D
O
M
N
S
R


R
C
R
D
S
S
T
E
T
V
F
V
O


P
o
R
A
C
o
R
D
S
S
T
E
T
V
F
V
O
P

15. Si nous posons maintenant $u = 1$, & partant $\frac{d}{1-d} = \frac{35}{36}$, & $d = \frac{35}{71}$, nous aurons le devis suivant:

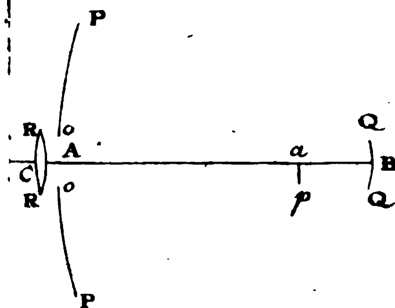
$p = 45,000$,	AP = 3,333,	AB, BC = 36,000,
$q = -12,000$,	BQ = 0,813,	
$r = 7,500$,	CR = 0,750,	CD = 9,000,
$s = 4,436$,	DS = 0,167,	DE = 7,000,
$t = 2,333$,	ET = 0,583,	EF = 2,000,
$u = 1,000$,	FV = 0,250,	FO = 0,600;

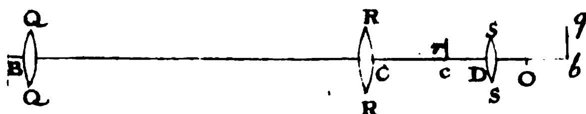
& le demi-diametre du champ $\Phi = 14'$.

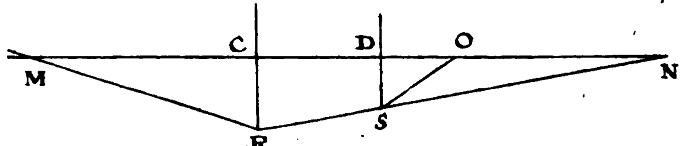
La longueur du grand tuyau AB sera donc de 36 pouces; or celle du tuyau CO, qui contient les verres, sera de $18\frac{3}{5}$ pouces.

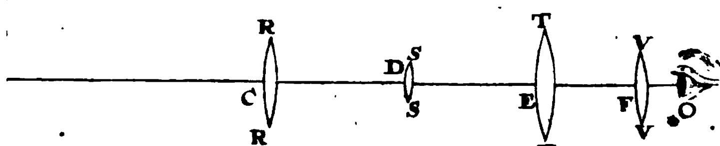


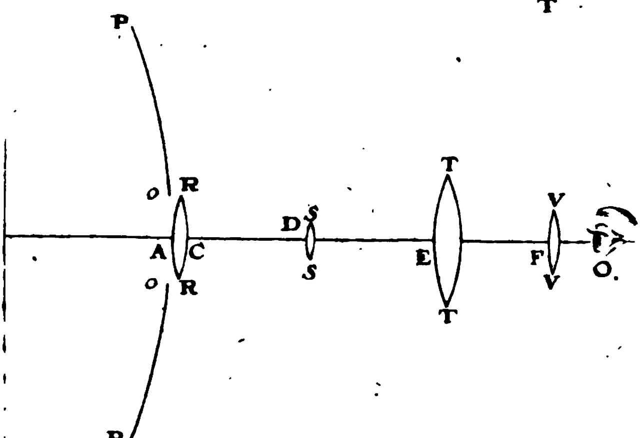
SUR


P
R
o
A
C
a
Q
B
R
o
p
Q
P


Q
B
Q
R
C
R
r
c
S
D
S
O
q
b


C
D
O
M
N
S
R


R
C
R
D
S
S
T
E
T
V
F
V
O


P
o
R
A
C
o
R
D
S
S
T
E
T
V
F
V
O
P

SUR

LA CONFUSION

QUE CAUSE DANS LES INSTRUMENS DIOPTRIQUES LA DIVERSE RÉFRANGIBILITÉ DES RAYONS. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Dans mon Mémoire ſur la conſtruction des Inſtrumens dioptriques, tant Téleſcopes que Microſcopes, qui ſe trouve dans le XIII Volume de notre Académie, j'ai exposé tout ce qui regarde ces Inſtrumens, & qui peut contribuer à leur perfection: je me flatte de n'y avoir omis aucune circonſtance rélative à ce but. Toutes les déterminations que j'y ai données, ſont le réſultat de calculs fort prolixes, & pour la plupart très embaraſſées, que j'ai enfin trouvé moyen de développer après pluſieurs efforts aſſez pénibles. Mais je fus obligé de me borner au ſimple rapport de toutes les formules qui renferment les vraies maximes pour la conſtruction de ces inſtrumens, ſans détailler les principes & les calculs ſur leſquels elles ſont fondées, ce qui fourniroit de la matiere pour un traité très conſidérable. Chaque article en particulier demande des recherches fort ſoigneuſes; & je me propoſe maintenant de développer celui qui regarde la différente réfrangibilité des rayons, pour faire voir plus clairement, combien elle influe ſur tous ces Inſtrumens.

II. Pour cet effet il faut conſidérer les diſtances de foyer de chaque verre comme des quantités variables, puiſque chaque eſpece des rayons y forme ſon propre foyer: ſur quoi je remarque dabord, que

(*) Lu le 2 de Sept. 1762.

que ces variations dans la diſtance de foyer ſont proportionelles à la diſtance même, en ſorte que ſi l'on connoit la diſtance de foyer d'un verre pour les rayons d'une réfrangibilité moyenne, on peut aiſément déterminer par-là celle qui convient aux rayons qui ſouffrent ou la plus grande ou la plus petite réfraction. On ſait que, ſi la diſtance de foyer d'un verre eſt $= p$ pour les rayons moyens, les rayons rouges auront leur foyer à la diſtance $(1 + \frac{1}{55})p$, & les violets à la diſtance $(1 - \frac{1}{55})p$. Cete différence de $\frac{1}{55}p$ étant aſſez petite, il ſera permis, dans le calcul, de la conſidérer comme le différentiel de p, de ſorte qu'en écrivant λ pour la fraction $\frac{1}{55}$, j'aurai $dp = \lambda p$, où λ ſe prendra & négatif & poſitif.

Planche VII. Fig. 1. III. Conſidérons donc une ſuite d'autant de verres qu'on voudra, diſpoſés ſur le même axe, pour y examiner tous les changemens que la diverſe réfrangibilité des rayons cauſe dans les images repréſentées par ces verres. J'appliquerai mes recherches au nombre de cinq verres, repréſentés par les barres PAP, QBQ, RCR, SDS & TET, puiſqu'il ſera auſſi aiſé de les étendre à un plus grand nombre, que de les reſtreindre à un plus petit. Que devant ces verres ſe trouve l'objet Oo, dont les images formées par les rayons moyens ſoient ſucceſſivement repréſentées en Ff, Gg, Hh, Kk & Ll. Poſons, tant pour marquer les lieux des verres que ceux de ces images, les diſtances

$$AO = a;\quad BF = b;\quad CG = c;\quad DH = d;\quad EK = e$$
$$AF = \alpha;\quad BG = \beta;\quad CH = \gamma;\quad DK = \delta;\quad EL = \varepsilon;$$

& ſoit, pour abréger le calcul dans la ſuite:

$$\alpha = \mathfrak{A}a;\quad \beta = \mathfrak{B}b;\quad \gamma = \mathfrak{C}c;\quad \delta = \mathfrak{D}d;\quad \varepsilon = \mathfrak{E}e.$$

IV. De là les diſtances entre les verres ſeront:

$$AB = \alpha + b;\quad BC = \beta + c;\quad CD = \gamma + d;\quad \&\ DE = \delta + e,$$

qui doivent reſter conſtantes, & même toujours poſitives, quoique les quantités α, b, β, c &c. varient ſelon la diverſe nature des rayons.

Or,

Or, puisque leur variabilité dépend de celle de la distance de foyer des verres, nommons la distance de foyer de chacun pour les rayons moyens: de PAP $= p$; QBQ $= q$; RCR $= r$; SDS $= s$; TET $= t$; que je regarde toutes comme positives, ou les verres mêmes comme convexes, la concavité se réduisant à une distance négative de foyer. Or ces distances de foyer sont déjà déterminées par les distances précédentes de la maniere suivante:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha};\quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta};\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma};\quad \frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta};$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{e} + \frac{1}{\varepsilon},\quad \text{ou bien}$$

$$p = \frac{Aa}{A+1};\ q = \frac{Bb}{B+1};\ r = \frac{Cc}{C+1};\ s = \frac{Dd}{D+1};\ t = \frac{Ee}{E+1}.$$

V. Voyons maintenant quel changement produira la variabilité de la réfraction dans le lieu de la derniere image Ll, qu'on doit regarder comme l'objet immédiat de la vue. Et puisque cette variabilité provient de celle des distances de foyer p, q, r, s, t, à cause de d$p = \lambda p$, d$q = \lambda q$, d$r = \lambda r$ &c., & parce que la distance de l'objet AO $= a$ n'en dépend point, la différentiation nous fournit les formules suivantes:

$$\frac{d\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{\lambda}{p} = \lambda\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\lambda\,(A+1)}{Aa},$$

$$\frac{db}{bb} + \frac{d\beta}{\beta\beta} = \frac{\lambda}{q} = \lambda\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{\lambda\,(B+1)}{Bb},$$

$$\frac{dc}{cc} + \frac{d\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{\lambda}{r} = \lambda\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{\lambda\,(C+1)}{Cc},$$

$$\frac{dd}{dd} + \frac{d\delta}{\delta\delta} = \frac{\lambda}{s} = \frac{\lambda\,(D+1)}{Dd},\quad \text{\& enfin}$$

$$\frac{de}{ee} + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\lambda}{t} = \frac{\lambda\,(E+1)}{Ee}.$$

VI. Or l'invariabilité des distances entre les verres donne

$db = -d\alpha$; $dc = -d\beta$; $dd = -d\gamma$; $de = -d\delta$;

d'où nous pouvons tirer les valeurs de tous nos différentiels, réduites à la fraction λ; & d'abord ayant:

$\frac{d\alpha}{\alpha\alpha} = \frac{\lambda\,(A+1)}{Aa}$ à cause de $\alpha = Aa$, nous aurons

$d\alpha = \lambda\alpha\,(A+1)$, & $db = -\lambda\alpha\,(A+1)$.

Ensuite, les autres équations se réduisent à celle-ci:

$\frac{d\beta}{\beta\beta} = \frac{d\alpha}{bb} + \frac{\lambda(B+1)}{Bb}$, ou $d\beta = BBd\alpha + \lambda\beta\,(B+1) = -dc$,

$\frac{d\gamma}{\gamma\gamma} = \frac{d\beta}{cc} + \frac{\lambda(C+1)}{Cc}$, ou $d\gamma = CCd\beta + \lambda\gamma\,(C+1) = -dd$,

$\frac{d\delta}{\delta\delta} = \frac{d\gamma}{dd} + \frac{\lambda(D+1)}{Dd}$, ou $d\delta = DDd\gamma + \lambda\delta\,(D+1) = -de$,

$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = \frac{d\delta}{ee} + \frac{\lambda(E+1)}{Ee}$, ou $d\varepsilon = EEd\delta + \lambda\varepsilon\,(E+1)$,

d'où nous concluons:

$d\alpha = -db = +\lambda\alpha\,(A+1)$,

$d\beta = -dc = \lambda\alpha\,(A+1)\,BB + \lambda\beta\,(B+1)$,

$d\gamma = -dd = \lambda\alpha\,(A+1)BBCC + \lambda\beta(B+1)CC + \lambda\gamma(C+1)$,

$d\delta = -de = \lambda\alpha\,(A+1)\,BBCCDD + \lambda\beta\,(B+1)\,CCDD + \lambda\gamma\,(C+1)\,DD + \lambda\delta\,(D+1)$,

$d\varepsilon = \lambda\alpha\,(A+1)\,B^2C^2D^2E^2 + \lambda\beta\,(B+1)\,C^2D^2E^2 + \lambda\gamma\,(C+1)\,D^2E^2 + \lambda\delta(D+1)\,E^2 + \lambda\varepsilon\,(E+1)$;

&

& cette derniere formule exprime le changement dans le lieu de la derniere image Ll, qui eſt cauſé par la différente réfrangibilité des rayons.

VII. Cherchons à préſent, par ces mêmes principes, combien la grandeur de l'image Ll doit être changée par la différente réfraction, ſuppoſant que Ll eſt l'image formée par les rayons d'une nature moyenne. Or, poſant la grandeur de l'objet Oo, ou de ſa partie dont les rayons ſont tranſmis par les verres, $= o$, & ſuivant les principes de la Dioptrique, nous aurons ſucceſſivement la grandeur de toutes les images exprimée de cette façon:

$$Ff = \frac{\alpha}{a}o; \quad Gg = \frac{\alpha\beta}{ab}o; \quad Hh = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc}o; \quad Kk = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd}o;$$

$$Ll = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{abcde}o.$$

Poſons maintenant, pour abréger, $\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{abcde} = V$, de ſorte que $V = ABCDE$, pour avoir $Ll = Vo$; & puiſque la différentiation nous fournit les changemens cauſés par la différente réfraction des rayons, nous aurons, pour l'image infiniment proche $L'l'$, la grandeur $L'l' = (V + dV)o$, & partant l'incrément $L'l' - Ll = o, dV$. Pour le changement dans le lieu, la valeur de $d\varepsilon$ que nous venons de trouver, exprime le petit intervalle LL', de ſorte que $LL' = d\varepsilon$.

VIII. Tout revient donc à trouver le différentiel de la quantité V: pour cet effet, cherchons ſon différentiel logarithmique, qui, à cauſe de a & o conſtantes, ſera

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\alpha}{\alpha} + \frac{d\beta}{\beta} - \frac{db}{b} + \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dc}{s} + \frac{d\delta}{\delta} - \frac{dd}{d} + \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{de}{e},$$

qui, à cauſe de $db = -d\alpha$, $dc = -d\beta$, $dd = -d\gamma$ & $de = -d\delta$, ſe change en

dV

$$\frac{dV}{V} = d\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b}\right) + d\beta\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{c}\right) + d\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{d}\right) + d\delta\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{e}\right) + \frac{d\epsilon}{\epsilon};$$

où, si nous substituons à $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$, $d\epsilon$, les valeurs trouvées ci-dessus, nous trouverons l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} = {} & \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{\alpha+b}{\alpha b} + \frac{BB(\beta+c)}{\beta c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{BBCCDDE}{e}\right) \\ & + \lambda\beta(B+1)\left(\frac{\beta+c}{\beta c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{CCDDE}{e}\right) \\ & + \lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e} + \frac{DDE}{e}\right) \\ & + \lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e} + \frac{E}{e}\right) \\ & + \lambda\epsilon(E+1).\end{aligned}$$

IX. Ayant trouvé ces valeurs différentielles, en donnant à λ toutes les valeurs comprises entre les limites $+\frac{1}{55}$ & $-\frac{1}{55}$, on connoitra l'arrangement de toutes les images formées par les rayons de toutes especes. Ces images seront disposées sur l'espace $LL' = d\epsilon$, de part & d'autre de l'image moyenne, & cet espace entier se trouvera en posant $\lambda = \frac{2}{55}$ dans l'expression de $d\epsilon$. Or il est clair que toutes ces images seront terminées par la ligne droite ll', qui étant prolongée coupera l'axe des verres en quelque point Ω, sous un angle dont la tangente est $= \frac{dV}{d\epsilon} \cdot o$: d'où l'on aura la distance $L\Omega = \frac{Vd\epsilon}{dV}$,

&

& partant la diſtance $E\,\text{ʌ} = \varepsilon - \frac{V d\varepsilon}{dV} = \frac{\varepsilon V}{dV}\left(\frac{dV}{V} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$.

Mais, retranchant la valeur de $\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{Ee}$ de celle de $\frac{dV}{V}$, on obtient:

$$\frac{dV}{V} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \lambda\alpha(A+1)\left(\frac{\alpha+b}{\alpha b} + \frac{BB(\mathcal{E}+c)}{\mathcal{E}c} + \frac{BBCC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{BBCCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\mathcal{E}(B+1)\left(\frac{\mathcal{E}+c}{\mathcal{E}c} + \frac{CC(\gamma+d)}{\gamma d} + \frac{CCDD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\gamma(C+1)\left(\frac{\gamma+d}{\gamma d} + \frac{DD(\delta+e)}{\delta e}\right)$$
$$+ \lambda\delta(D+1)\left(\frac{\delta+e}{\delta e}\right).$$

X. Dans ces formules j'ai tâché d'introduire les diſtances entre les verres $\alpha + b$, $\mathcal{E} + c$, $\gamma + d$, $\delta + e$, puiſqu'elles ſont néceſſairement poſitives. Mais cela ſe peut faire d'une autre maniere, qui s'étend auſſi à la valeur de $d\varepsilon$; un léger changement nous fournit ces expreſſions:

$$d\varepsilon = \lambda(aAABBCCDDEE + (\alpha+b)BBCCDDEE + (\mathcal{E}+c)CCDDEE$$
$$+ (\gamma+d)DDEE + (\delta+e)EE + \varepsilon),$$

& celle-ci:

$$\frac{dV}{V} = \frac{\lambda(E+1)}{e}(aAABBCCDD + (\alpha+b)BBCCDD + (\mathcal{E}+c)CCDD$$
$$+ (\gamma+d)DD + \delta + e)$$
$$+ \frac{\lambda(D+1)}{d}(aAABBCC + (\alpha+b)BBCC + (\mathcal{E}+c)CC + \gamma + d)$$
$$+ \frac{\lambda(C+1)}{c}(aAABB + (\alpha+b)BB + \mathcal{E} + c)$$

$$+\frac{\lambda(B+1)}{b}(\alpha AA+\alpha+b)$$

$$+\frac{\lambda(A+1)}{a}(a).$$

XI. Pour abréger ces formules posons:

$$\alpha+b+aAA=P$$
$$\beta+c+PBB=Q$$
$$\gamma+d+QCC=R$$
$$\delta+e+RDD=S$$

& nous aurons:

$$d\varepsilon=\lambda\varepsilon+\lambda SEE \quad \&$$

$$\frac{dV}{V}=\lambda\left(A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}\right);$$

donc:

$$\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}=\lambda\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right),$$

d'où l'on tire la distance $E\Omega=\frac{\varepsilon V}{dV}\left(\frac{dV}{V}-\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$;

or il faut se souvenir que $V=ABCDE$, & substituant ces valeurs on obtiendra

$$E\Omega=\frac{\varepsilon\left(A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}\right)}{A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}}.$$

XII. La premiere question qui se présente ici est, s'il ne seroit pas possible que toute cette diffusion des images fût réduite à rien, de

de ſorte que tant $d\epsilon$ que $\frac{dV}{V}$ devînt égal à zéro? Or d'abord je remarque, que pour le cas où la diſtance de la derniere image doit être infinie ou très grande, comme l'exige une bonne vue, l'intervalle LL' ne ſauroit jamais évanouir, ni même ſon rapport à la diſtance entiere EL $= \epsilon$. Car, puiſque $d\epsilon = \lambda(\epsilon + SEE) = \lambda\epsilon\left(1+\frac{S\epsilon}{ee}\right)$, à cauſe de $\epsilon = \infty$, la quantité S devroit être $= o$, ce qui eſt impoſſible, puiſque S eſt une quantité poſitive, néceſſairement plus grande que l'intervalle des deux derniers verres $\delta + e$. Et par cette raiſon il eſt clair, que non ſeulement $d\epsilon$, mais auſſi $\frac{d\epsilon}{\epsilon} = \lambda\left(1+\frac{S\epsilon}{ee}\right)$, ne ſauroit jamais évanouir. Il eſt auſſi évident qu'il eſt encore moins poſſible de remplir cette condition, lorſque ϵ doit avoir une valeur poſitive, ce qui eſt le cas des presbytes.

XIII. Mais pour les myopes, dont la vue demande une valeur négative de ϵ, qui n'eſt pas trop grande, rien n'empêche qu'on ne ſatisfaſſe à cette condition qui, à cauſe de $\epsilon = Ee$, donne $e = -SE$, ou $\epsilon = -SEE$: & enſuite il ſera auſſi poſſible de remplir l'autre condition que $\frac{dV}{V} = o$, pourvu que le nombre des verres ſoit plus grand que deux. Mais, ayant examiné le cas de trois verres, je trouve qu'en ſatisfaiſant aux deux conditions qui anéantiſſent toute confuſion, on tombe dans d'autres inconvéniens très conſidérables: c'eſt toujours, ou le groſſiſſement, qui importe peu, ou la lunette devient énormément longue, & le champ apparent évanouit preſque tout à fait. Pour les cas de pluſieurs verres, je ne ſaurois prononcer; le calcul devient trop embaraſſé, pour que j'aye pu me réſoudre à le développer; mais, puiſque $S = \delta + e + RDD$, il faudroit qu'il fût $e = -E(\delta + e + RDD)$, & partant E un nombre négatif

moindre que l'unité; ou $- \varepsilon < e$, ce qui suppose une vue si courte qu'on n'en rencontrera jamais de semblable.

XIV. Or, puisqu'il faut se régler principalement sur les bonnes vues, qui demandent une valeur presque infinie pour la distance ε, on ne sauroit remédier tout à fait à l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons, en sorte que l'intervalle LL' devienne évanouissant. Donc, renonçant à ce degré de perfection, il ne nous reste que de rendre la confusion qui naît de cette source, aussi peu sensible qu'il se pourra. Pour cet effet je remarque, que si l'on place l'œil dans le point Ω, la confusion deviendra très peu sensible; car, puisque les rayons, qui viennent des extrémités l & l' de toutes les images, se réunissent dans la même direction $l\Omega$, ils représenteront les bords des objets assez distinctement, & les couleurs d'iris n'en troubleront point l'apparence; ce qui est un avantage presque aussi grand, que si toutes les images étoient parfaitement réunies dans une seule. Tout revient donc à bien déterminer ce point Ω, & à faire en sorte que l'œil y puisse être placé; or nous venons de trouver la distance $E\Omega$ depuis le dernier oculaire TET

$$E\Omega = \frac{\varepsilon\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right)}{A + 1 + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S(E+1)}{e}},$$

laquelle expression pour le cas $\varepsilon = \infty$ & partant $E = \frac{\varepsilon}{e} = \infty$, se change en celle-ci:

$$E\Omega = \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e}\right),$$

ou bien

$$E\Omega = e + \frac{ee}{S}\left(A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d}\right);$$

où

où il faut remarquer que e exprime la distance de foyer du dernier verre TET.

XV. Mais le lieu de l'œil est déjà déterminé par d'autres circonstances, tant dans les lunettes que dans les microscopes; il faut toujours tenir l'œil là, d'où l'on découvre le plus grand champ; & partant il s'agit d'arranger les verres en sorte que ces deux points dans l'axe derriere les verres, où l'on découvre le plus grand champ, & où l'on voit les objets délivrés des couleurs d'iris, se réunissent dans un seul point, ou au moins à peu près. Pour cet effet, cherchons aussi le point d'où l'on voit le plus grand champ, & qui sera là où les rayons de l'extrémité o de l'objet, après avoir passé par tous les verres, se réunissent avec l'axe; & dans cette recherche il suffit de considérer les rayons qui passent par le centre A de l'objectif, puisque les autres rayons ne font qu'augmenter la clarté, sans rien changer dans le champ apparent. La 2[de] figure représente un tel rayon, qui vient de l'extrémité o de l'objet, & qui, après toutes les réfractions, coupe l'axe au point ω, qui sera par conséquent le lieu de l'œil, que nous cherchons. Planche VII. Fig. 2.

XVI. Le rayon passera bien par les extrémités de toutes les images f, g, h, k, d'où sa route pourroit être déterminée; mais les points q, r, s où il coupe successivement l'axe, nous fournissent un moyen plus aisé de la trouver. En effet, puisque le rayon AQ est rompu par le verre QQ en Qq, s'il y avoit en A un objet, son image tomberoit en q, dont les rayons passant par le verre RR donneront la seconde image en r, & ensuite de même maniere la troisieme en s, & la derniere en ω, qui est précisément le lieu de l'œil que nous cherchons, où l'angle EωT nous montre en même tems l'angle visuel, sous lequel la partie de l'objet Oo sera vue, & de là on pourra juger du grossissement que cet instrument produit. Il est aussi évident, que le champ apparent dépend principalement de l'ouverture de tous les verres oculaires, sans que celle de l'objectif y concoure.

XVII. Conservons les mêmes dénominations que nous avons établies ci-dessus §§. 3. & 4, & la considération des distances de foyer de tous les verres nous fournit ces équations:

$$\frac{1}{AB}+\frac{1}{Bq}=\frac{1}{q}=\frac{1}{b}+\frac{1}{\beta};\quad Cq=\beta+c-Bq$$

$$\frac{1}{Cq}+\frac{1}{Cr}=\frac{1}{r}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\gamma};\quad Dr=\gamma+d-Cr$$

$$\frac{1}{Dr}+\frac{1}{Ds}=\frac{1}{s}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta};\quad Es=\delta+e-Ds$$

$$\frac{1}{Es}+\frac{1}{E\omega}=\frac{1}{t}=\frac{1}{e}+\frac{1}{\varepsilon}.$$

Introduisons aussi dans le calcul l'angle OAo ou BAQ, qui soit $=\Phi$, & qui marque la même chose que ce qui est exprimé ci-dessus par $\frac{o}{a}$, où o marquoit la portion vue de l'objet Oo. De là nous aurons les images:

$$Ff=\alpha\Phi;\quad Gg=\frac{\alpha\beta}{b}\Phi;\quad Hh=\frac{\alpha\beta\gamma}{bc}\Phi;\quad Kk=\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd}\Phi.$$

& les angles

$$BqQ=CqR=\frac{AB}{Bq}\Phi;\quad CrR=Drs=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq\,.\,Cr}\Phi;$$

$$DsS=EsT=\frac{AB.Cq.Dr}{Bq.Cr.Ds}\Phi,\ \&\ E\omega T=\frac{AB.Cq.Dr.Es}{Bq.Cr.Ds.E\omega}\Phi;$$

& outre cela pour l'ouverture des verres:

$$BQ=AB\,.\,\Phi;\quad CR=\frac{AB\,.\,Cq}{Bq}\,.\,\Phi;\quad DS=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr}{Bq\,.\,Cr}\,.\,\Phi;$$

$$ET=\frac{AB\,.\,Cq\,.\,Dr\,.\,Es}{Bq\,.\,Cr\,.\,Ds}\Phi.$$

XVIII.

XVIII. Comme l'ouverture des verres entre si essentiellement dans ces déterminations, & qu'elle dépend principalement de la distance de foyer de chaque verre, en y tenant un certain rapport, posons:

$$BQ = \pi q;\ CR = \pi' r;\ DS = \pi'' s \ \&\ ET = \pi''' t;$$

de là nous aurons à cause de $AB = \alpha + b$ d'abord:

$$\pi q = (\alpha + b)\Phi, \text{ donc } \pi = \frac{(\alpha+b)\Phi}{q} = \Phi + \frac{(\alpha+b)\Phi}{Bq};$$

& partant $\frac{\alpha + b}{Bq} = \frac{AB}{Bq} = \frac{\pi - \Phi}{\Phi}$; d'où nous tirons

$$CR = \pi' r\ (\pi - \Phi)\, Cq;\ \&\ \pi' = \pi - \Phi + \frac{(\pi - \Phi)\, Cq}{Cr};$$

donc $\frac{Cq}{Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\pi - \Phi}$ & $\frac{AB.Cq}{Bq.Cr} = \frac{\pi' - \pi + \Phi}{\Phi}$.

Ensuite, $DS = \pi'' s = (\pi' - \pi + \Phi)\, Dr$, d'où, à cause de $\frac{Dr}{s} = 1 + \frac{Dr}{Ds}$, on aura $\pi'' = \pi' - \pi + \Phi + (\pi' - \pi + \Phi)\frac{Dr}{Ds}$,

partant

$$\frac{Dr}{Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\pi' - \pi + \Phi},\ \&\ \frac{AB.Cq.Dr}{Bq.Cr.Ds} = \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}{\Phi}.$$

De là on obtient

$$ET = \pi''' t = (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\, Es, \text{ \& depuis}$$

$$\pi''' = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi + (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)\frac{Es}{E\omega},$$

ou $\frac{Es}{E\omega} = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$, par conséquent

$$\frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi.$$

XIX.

XIX. Pour les angles donc, qu'on peut confondre avec leurs tangentes, il ſera bon de remarquer les formules ſuivantes:

$$OAo = BAQ = \frac{BQ}{AB} = \Phi,$$

$$BqQ = CqR = \frac{BQ}{Bq} = \pi - \Phi = \frac{CR}{Cq};$$

$$CrR = DrS = \frac{CR}{Cr} = \pi' - \pi + \Phi = \frac{DS}{Dr};$$

$$DsS = EsT = \frac{DS}{Ds} = \pi'' - \pi' + \pi - \Phi = \frac{ET}{Es},$$

$$\& \quad E\omega T = \frac{ET}{E\omega} = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi.$$

Donc, ſi nous poſons le groſſiſſement $= m$, ou que l'angle viſuel $E\omega T$ ſoit m fois plus grand que l'angle $OAo = \Phi$, nous aurons $\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi = m\Phi$, & de là, par les ouvertures de tous les verres oculaires enſemble, nous connoiſſons le champ apparent même, ou bien l'angle Φ, qui eſt

$$\Phi = \frac{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi}{m - 1};$$

d'où l'on comprend très évidemment, comment le champ apparent dépend, tant du groſſiſſement que de l'ouverture des verres, à l'exception de l'objectif.

XX. Ayant poſé ci-deſſus, pour abréger,

$$\alpha = Aa, \quad \beta = Bb, \quad \gamma = Cc, \quad \delta = Dd, \quad \epsilon = Ee;$$

poſons de plus, pour abréger davantage,

$$\frac{A}{A+1} = \mathfrak{A}; \quad \frac{B}{B+1} = \mathfrak{B}; \quad \frac{C}{C+1} = \mathfrak{C}; \quad \frac{D}{D+1} = \mathfrak{D}; \quad \frac{E}{E+1} = \mathfrak{E};$$

pour

pour avoir les distances de foyer de tous les verres:

$$p = \mathfrak{A}a; \quad q = \mathfrak{B}b; \quad r = \mathfrak{C}c; \quad s = \mathfrak{D}d; \quad t = \mathfrak{E}e.$$

Maintenant, puisque

$$BQ = \pi\mathfrak{B}b; \; CR = \pi'\mathfrak{C}c; \; DS = \pi''\mathfrak{D}d; \; ET = \pi'''\mathfrak{E}e;$$

à cause de $AB = \alpha + b = Aa + b$, nous aurons $\pi\mathfrak{B}b = \Phi Aa + \Phi b$,

donc $b = \frac{\Phi A a}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$. De plus, nous aurons

$$Bq = \frac{\pi\mathfrak{B}b}{\pi - \Phi}, \;\&\; Cq = \frac{\pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi}, \text{ donc}$$

$$\frac{\pi\mathfrak{B}b + \pi'\mathfrak{C}c}{\pi - \Phi} = Bb + c, \;\&\; \frac{c}{b} = \frac{\pi\mathfrak{B} - \pi B + \Phi B}{-\pi'\mathfrak{C} + \pi - \Phi}.$$

De la même maniere

$$Cr + Dr = \frac{\pi'\mathfrak{C}c + \pi''\mathfrak{D}d}{\pi' - \pi + \Phi} = Cc + d \;\&\; \frac{d}{c} = \frac{\pi'\mathfrak{C} - (\pi' - \pi + \Phi)C}{-\pi''\mathfrak{D} + \pi' - \pi + \Phi},$$

$$Ds + Es = \frac{\pi''\mathfrak{D}d + \pi'''\mathfrak{E}e}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = Dd + e \;\&\; \frac{e}{d} = \frac{\pi''\mathfrak{D} - (\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)D}{-\pi'''\mathfrak{E} + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi},$$

& enfin $E\omega = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = \frac{\pi'''\mathfrak{E}e}{m\Phi}$.

XXI. Ces formules admettent une belle réduction à cause de

$$\mathfrak{B} - B = \frac{-BB}{B + 1} = -\mathfrak{B}B, \text{ \& partant aussi}$$

$$\mathfrak{C} - C = -\mathfrak{C}C; \; \mathfrak{D} - D = -\mathfrak{D}D; \; \mathfrak{E} - E = -\mathfrak{E}E,$$

d'où nous trouvons:

$$b = \frac{\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} \cdot Aa; \qquad \alpha + b = \frac{\mathfrak{B}\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} Aa;$$

$c =$

$$c = \frac{+(\mathfrak{B}\pi - \phi)\,Bb}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}; \qquad \beta + c = \frac{\mathfrak{C}\pi' + (\mathfrak{B} - 1)\pi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}.\,Bb;$$

$$d = \frac{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}\,Cc; \quad \gamma + d = \frac{\mathfrak{D}\pi'' + (\mathfrak{C} - 1)\pi'}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}.\,Cc;$$

$$e = \frac{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}.\,Dd; \quad \delta + e = \frac{\mathfrak{E}\pi''' + (\mathfrak{D} - 1)\pi''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}\,Dd;$$

& substituant toutes ces valeurs:

$$b = \frac{Aa\phi}{\mathfrak{B}\pi - \phi}; \qquad \beta = Bb; \qquad q = \mathfrak{B}b;$$

$$c = \frac{ABa\phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi}; \qquad \gamma = Cc; \qquad r = \mathfrak{C}c;$$

$$d = \frac{ABCa\phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}; \qquad \delta = Dd; \qquad s = \mathfrak{D}d;$$

$$e = \frac{ABCDa\phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}; \qquad \varepsilon = Ee; \qquad t = \mathfrak{E}e.$$

XXII. Voyons maintenant de quelle maniere les quantités P, Q, R, S, employées ci-dessus, seront déterminées par ces nouveaux élémens; & d'abord, en substituant pour α, β, γ, δ, ε, les valeurs indiquées, nous aurons:

$$P = (A + 1)\,Aa + b,$$

$$Q = (A + 1)\,ABBa + (B + 1)\,Bb + c,$$

$$R = (A + 1)\,ABBCCa + (B + 1)\,BCCb + (C + 1)\,Cc + d,$$

$$S = (A + 1)\,ABBCCDDa + (B + 1)\,BCCDDb + (C + 1)\,CDDc + (D + 1)\,Dd + e,$$

où il ne s'agit plus que de substituer pour b, c, d, e, les valeurs indiquées ci-dessus. Or, pour la valeur de $E\omega$, nous aurons premierement:

A +

$$A + \frac{P(B+1)}{b} + \frac{Q(C+1)}{c} + \frac{R(D+1)}{d} + \frac{S}{e} =$$

$$A + \frac{(A+1)(B+1)Aa}{b}$$

$$B+1+\frac{(A+1)(C+1)ABBa}{c} + \frac{(B+1)(C+1)Bb}{c}$$

$$C+1+\frac{(A+1)(D+1)ABBCCa}{d} + \frac{(B+1)(D+1)BCCb}{d} + \frac{(C+1)(D+1)Cc}{d}$$

$$D+1+\frac{(A+1)ABBCCDDa}{e} + \frac{(B+1)BCCDDb}{e} + \frac{(C+1)CDDc}{e} + \frac{(D+1)Dd}{e}.$$

Ici la premiere colonne verticale fait

$$A + (B+1) + (C+1) + (D+1) + 1;$$

& la ſeconde, après avoir fait les ſubſtitutions, où la plupart des termes ſe détruiſent, donne

$$-(A+1) + (A+1)\,BCD\mathfrak{E}\,\frac{\pi'''}{\phi}.$$

La troiſieme colonne, qui eſt multipliée par b, ſe réduit à

$$\frac{(B+1)b}{Aa\phi}(\phi - \pi + CD\mathfrak{E}\pi''') = \frac{(B+1)(\phi - \pi + CD\mathfrak{E}\pi''')}{\mathfrak{B}\pi - \phi};$$

les termes affectés par c donnent

$$\frac{(C+1)c}{ABa\phi}(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \phi) = \frac{(C+1)(D\mathfrak{E}\pi''' - \pi' + \pi - \phi)}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi},$$

& enfin le dernier eſt

$$\frac{(D+1)d}{ABCa\phi}(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi) = \frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi)}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi}.$$

Joi-

Joignons à ces trois derniers les parties $(B+1)$, $(C+1)$, $(D+1)$ du premier membre, & toute l'expreſſion prendra cette forme:

$$\frac{(A+1)BCD\mathfrak{E}\pi'''}{\phi}+\frac{(B+1)CD(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{B}-1)\pi)}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)(D\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{C}-1)\pi')}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}$$
$$+\frac{(D+1)(\mathfrak{E}\pi'''+(\mathfrak{D}-1)\pi'')}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}.$$

XXIII. Cette expreſſion nous donne le numérateur de la fraction qui exprime la diſtance E♌; or, pour en avoir le dénominateur, nous n'avons qu'à y ajouter encore $1+\frac{SE}{\epsilon}$, dont la valeur ſe réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}+\frac{(B+1)CDE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{B}\pi-\phi}$$
$$+\frac{(C+1)DE(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)E(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+(E+1),$$

qui, étant multipliée par $\lambda\epsilon=\lambda E e$, donneroit l'intervalle $LL'=d\epsilon$. Mais, ſi nous ajoutons actuellement cette expreſſion à la précédente, à cauſe de $\mathfrak{E}+\mathfrak{E}E=E$, nous obtiendrons:

$$(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)\left(\frac{(A+1)BCDE}{\phi}+\frac{(B+1)CDE}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)DE}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}\right.$$
$$\left.+\frac{(D+1)E}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+\frac{(E+1)}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi}\right)$$
$$-\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}-\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi}.$$

Le numérateur ſe réduit auſſi à une forme preſque ſemblable:

$$\mathfrak{E}\pi'''\left(\frac{(A+1)BCD}{\phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}\right)$$

$-\pi$

$$\frac{-\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi};$$

& le dénominateur se peut aussi exprimer de cette sorte:

$$E(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)\left(\frac{(A+1)BCD}{\phi}+\frac{(B+1)CD}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}\right)$$

$$\frac{-\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}-\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}-\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}+E+1.$$

XXIV. Posons maintenant, pour abréger,

$$\frac{(A+1)BCD\phi}{\phi}+\frac{(B+1)CD\phi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{(C+1)D\phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{(D+1)\phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}=X,$$

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}=Y;$$

pour avoir les expressions suivantes:

$$A+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S}{e}=\frac{\mathfrak{E}X\pi'''}{\phi}-Y;$$

$$A+1+\frac{P(B+1)}{b}+\frac{Q(C+1)}{c}+\frac{R(D+1)}{d}+\frac{S(E+1)}{e}=\frac{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}$$

$$-Y+E+1,$$

$$\& \; de=\lambda e\left(1+\frac{SE}{e}\right)=\lambda e\left(\frac{EX(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)}{\phi}+E+1\right).$$

De là nous aurons pour le lieu de l'œil, où les couleurs d'iris évanouissent:

$$E\Omega=\frac{Ee\,(\mathfrak{E}X\pi'''-Y\phi)}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi)-Y\phi+(E+1)\phi}.$$

Or, pour le lieu de l'œil d'où l'on découvre le plus grand champ, nous avons trouvé, (§. 20)

$$E\omega = \frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}.$$

XXV. Donc, afin que ces deux lieux ſe réuniſſent dans un ſeul, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{E\mathfrak{E}X\pi''' - EY\phi}{EX(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi) - Y\phi + (E+1)\phi} = \frac{\mathfrak{E}\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi},$$

qui ſe change en celle-ci:

$$o = EY\phi(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi) - \mathfrak{E}Y\pi'''\phi + \mathfrak{E}(E+1)\pi'''\phi,$$

ou, à cauſe de $E - \mathfrak{E} = E\mathfrak{E}$, en celle-ci:

$$o = EY(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi) + E\pi''',$$

qui, étant diviſée par $E(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi)$, donne

$$o = Y + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi}.$$

Et partant ces deux lieux de l'œil ſe réuniſſent dans un ſeul, lorſqu'on arrange les verres en ſorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi} = o.$$

S'il étoit poſſible de faire évanouir en même tems l'intervalle LL' entre toutes les images colorées, on remédieroit parfaitement à l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons: pour cet effet il faudroit outre cela remplir cette équation:

$$\frac{(A+1)BCDE\phi}{\phi} + \frac{(B+1)CDE\phi}{\mathfrak{B}\pi-\phi} + \frac{(C+1)DE\phi}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\phi} + \frac{(D+1)E\phi}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\phi}$$
$$+ \frac{(E+1)\phi}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\phi} = o.$$

Or nous avons vu que cela ne ſauroit s'exécuter que pour les myopes, qui demandent pour la diſtance $\epsilon = Ee$ une valeur négative aſſez mê-

médiocre: or $\varepsilon = \dfrac{ABCDE\alpha\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; mais, pour toute autre vue, il sera toujours bon de rendre cette expression aussi petite qu'il est possible.

XXVI. S'il arrivoit que, pour le lieu d'où l'on voit le plus grand champ, la distance $E\omega$ devînt négative, comme dans les petites lunettes à deux verres dont l'oculaire est concave, on seroit obligé d'appliquer l'œil immédiatement au dernier verre oculaire. Dans ce cas donc, afin que les couleurs d'iris évanouissent également, il faut faire en sorte que cette quantité $\mathfrak{E}X\pi''' - Y\Phi$ évanouisse, ou bien il faut satisfaire à cette équation:

$$\frac{(A+1)ACD\mathfrak{E}\pi'''}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{E}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\pi'''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{E}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = 0;$$

& on remédieroit aussi tout à fait à l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons, s'il étoit possible de remplir l'équation précédente, qui, à cause de $\dfrac{E}{E+1} = \mathfrak{E}$, se réduit à celle-ci:

$$\frac{(A+1)BCD\mathfrak{E}\Phi}{\Phi} + \frac{(B+1)CD\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{(C+1)D\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{E}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{(D+1)\mathfrak{E}\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$$
$$+ \frac{\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} = 0.$$

En cas que cela soit impossible, qu'on tâche de rendre la valeur de cette expression aussi petite, que les autres circonstances le permettent.

XXVII. Mais retournons au cas précédent, où l'on n'est pas obligé d'appliquer l'œil immédiatement au verre oculaire, & quand on aura arrangé les verres en sorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=o,$$

le lieu de l'œil derriere le dernier verre ſe trouvera à la diſtance:

$$E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi},$$

d'où l'on découvrira en même tems le plus grand champ, & l'on verra les objets bien terminés ſans aucune confuſion de couleurs. Si l'on veut auſſi tenir compte du groſſiſſement, qui marque combien de fois l'angle $\Phi=OAo$ eſt multiplié par les verres, en poſant l'angle viſuel $E\omega T=m.OAo$; on aura $\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi=m\Phi$, & de là on aura pour le lieu de l'œil $E\omega=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi}$,

ou bien $E\omega=\frac{(m-1)\mathfrak{E}\pi'''}{m(\pi'''-\pi''+\pi'-\pi)}e$, à cauſe de $\Phi=\frac{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi}{m-1}$.

XXVIII. Voilà donc la démonſtration des formules que j'ai données dans le XIII Volume des Mémoires de l'Académie, pour délivrer tant les Téleſcopes que les Microſcopes des couleurs d'iris, dont les objets paroiſſent d'ailleurs environnés. Ce ſont préciſément les mêmes formules que j'ai produites alors; & il faut bien remarquer, que c'eſt uniquement l'introduction des lettres π, π', π'', π''', avec l'angle Φ, qui nous a conduits à des formules ſi ſimples, dont la progreſſion, pour quelque grand nombre de verres qu'on veuille l'employer, eſt tout à fait évidente; tandis que les autres quantités a, b, $\mathfrak{E}$, c, γ &c., quoiqu'elles paroiſſent plus naturelles à cette recherche, nous auroient conduits à des expreſſions extrêmement embaraſſées, qu'on ne ſauroit plus développer dès que le nombre des verres eſt tant ſoit peu conſidérable. Le cas de cinq verres, que j'ai ici ſuppoſé, ſuffit pour nous éclaircir parfaitement ſur cet important article, quelque grand que puiſſe être le nombre des verres.

XXIX. Donc, quelque grand que soit le nombre des verres, considérons les quantités, qui nous tiennent presque lieu des premiers élémens; & d'abord, par rapport au verre objectif, nous avons la distance de l'objet AO $= a$, avec l'angle OA$o = \phi$, duquel dépend le champ apparent, & outre cela le nombre A, duquel on forme $\mathfrak{A} = \frac{A}{A+1}$. Par rapport au second verre QQ, nous introduisons dans le calcul les nombres π, B & $\mathfrak{B} = \frac{B}{B+1}$;

le troisieme verre fournit π', C & $\mathfrak{C} = \frac{C}{C+1}$;

le quatrieme fournit ces nombres π'', D & $\mathfrak{D} = \frac{D}{D+1}$;

le cinquieme - - - π''', E & $\mathfrak{E} = \frac{E}{E+1}$;

le sixieme - - - - π^{IV}, F & $\mathfrak{F} = \frac{F}{F+1}$;

&c.

où π, π', π'', π''' &c. sont des fractions, qui marquent à la quantieme partie de la distance de foyer de chaque verre est pris égal le demi-diametre de son ouverture. Ces fractions dépendent donc de la courbure des faces du verre, & l'on convient, que pour les verres également convexes ou concaves des deux côtés, cette fraction ne sauroit surpasser $\frac{1}{4}$; mais elle doit être plus petite, quand les deux faces du verre sont inégales.

XXX. Voyons maintenant comment les autres quantités qui entrent dans la détermination de l'instrument, sont déterminées par ces élémens; & d'abord pour les distances de foyer, celle de l'objectif est $= \mathfrak{A}a = p$, & pour les autres de la maniere qui suit:

Distance de foyer			Demi-diametre de l'ouverture
du second verre	$= \frac{A\mathfrak{B}a\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$	$= q$;	$BQ = \pi q$
du troisieme	$= \frac{AB\mathfrak{C}a\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$	$= r$;	$CR = \pi' r$
du quatrieme	$= \frac{ABC\mathfrak{D}a\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$	$= s$;	$DS = \pi'' s$
du cinquieme	$= \frac{ABCD\mathfrak{E}a\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$	$= t$;	$ET = \pi''' t$
du sixieme	$= \frac{ABCDE\mathfrak{F}a\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$	$= u$;	$FV = \pi^{IV} u$
	&c.		&c.

Ensuite pour les lieux des images:

$AF = \alpha = Aa$; $\quad BF = b = \frac{Aa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$

$BG = \beta = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi}$; $\quad CG = c = \frac{ABa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$

$CH = \gamma = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi}$; $\quad DH = d = \frac{ABCa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$DK = \delta = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$; $\quad EK = e = \frac{ABCDa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$

$EL = \varepsilon = \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi}$; $\quad FL = f = \frac{ABCDEa\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$

$FM = \zeta = \frac{ABCDEFa\Phi}{\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \Phi}$.

Et

Et pour les images mêmes, la partie vue de l'objet étant $Oo = a\phi$, on a

$$Ff = Aa\phi;\ Gg = ABa\phi;\ Hh = ABCa\phi;\ Kk = ABCDa\phi;$$
$$Ll = ABCDEa\phi;\quad Mm = ABCDEFa\phi.$$

XXXI. Pour les distances entre les verres on tirera de là

$$AB = a + b = \frac{A\mathfrak{B}a\pi}{\mathfrak{B}\pi - \phi};$$

$$BC = \mathfrak{b} + c = \frac{Aa\phi\,(B\mathfrak{C}\pi' - \mathfrak{B}\pi)}{(\mathfrak{B}\pi - \phi)\,(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi)};$$

$$CD = \gamma + d = \frac{ABa\phi\,(C\mathfrak{D}\pi'' - \mathfrak{C}\pi')}{(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi)\,(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi)};$$

$$DE = \delta + e = \frac{ABCa\phi\,(D\mathfrak{E}\pi''' - \mathfrak{D}\pi'')}{(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi)\,(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi)};$$

$$EF = \varepsilon + f = \frac{ABCDa\phi\,(E\mathfrak{F}\pi^{IV} - \mathfrak{E}\pi''')}{(\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi)\,(\mathfrak{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi)},$$

&c.

auxquelles expressions il faut apporter d'autant plus d'attention, qu'elles doivent absolument être positives.

Ensuite, pour les angles dans la 2de figure, d'où l'on juge du grossissement, on a

$$OAo = BAQ = \phi,$$
$$BqQ = CqR = \pi - \phi,$$
$$CrR = DrS = \pi' - \pi + \phi,$$
$$DsS = EsT = \pi'' - \pi' + \pi - \phi,$$
$$EtT = FtV = \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi,$$
$$FuV = GuW = \pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi$$

&c.

& de là on trouve pour les interſections q, r, s, &c.

$$Bq = ABa\phi\left(\frac{1}{\mathfrak{B}\pi - \phi} - \frac{1}{\pi - \phi}\right);\ Cq = ABa\phi\left(\frac{1}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi} + \frac{1}{\pi - \phi}\right);$$

$$Cr = \frac{ABCa\phi}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \phi} - \frac{ABCa\phi}{\pi' - \pi + \phi};$$

$$Dr = \frac{ABCa\phi}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi} + \frac{ABCa\phi}{\pi' - \pi + \phi};$$

&c.

ou bien les diſtances de ces points des images reſpectives ſeront:

$$FA = Aa;\quad Gq = \frac{ABa\phi}{\pi - \phi};\quad Hr = \frac{ABCa\phi}{\pi' - \pi + \phi};$$

$$Ks = \frac{ABCDa\phi}{\pi'' - \pi' + \pi - \phi};\quad Lt = \frac{ABCDEa\phi}{\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi};$$

$$Mu = \frac{ABCDEFa\phi}{\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi}.$$

&c.

XXXII. Après l'explication de ces formules générales, paſſons à des nombres déterminés de verres; &, puiſqu'il faut auſſi tenir compte du groſſiſſement, ou de la multiplication de l'angle $OAo = \phi$, produite par les verres, ſoit m cette multiplication, qui ſe rapporte à la repréſentation directe, de ſorte que ſi la repréſentation eſt renverſée, il faut donner au nombre m une valeur négative. Maintenant nous aurons

I. Pour le Cas de deux verres:

1°. La multiplication donne $\pi - \phi = -m\phi$, & partant

$$\phi = \frac{-\pi}{m - 1}\ \text{pour le champ apparent.}$$

2°. La

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$\mathfrak{B}q = \frac{\mathfrak{B}b\pi}{\pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{B}b\pi}{m\Phi}, \text{ ou } \mathfrak{B}q = \frac{-A\mathfrak{B}a\pi}{m(\mathfrak{B}\pi - \Phi)}.$$

3°. Pour remédier à l'inconvénient de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} = o.$$

II. Pour le cas de trois verres:

1°. La multiplication donne $\pi' - \pi + \Phi = m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{\pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$\mathrm{C}r = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{\pi' - \pi + \Phi} = \frac{\mathfrak{C}c\pi'}{m\Phi}, \text{ ou } \mathrm{C}r = \frac{\mathrm{AB}\mathfrak{C}a\pi'}{m(\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi)}.$$

3°. A cause de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation :

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} = o.$$

III. Pour le cas de quatre verres:

1°. La multiplication donne $\pi'' - \pi' + \pi - \Phi = -m\Phi$, & partant

$$\Phi = \frac{-\pi'' + \pi' - \pi}{m - 1} \text{ pour le champ apparent.}$$

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$\mathrm{D}s = \frac{\mathfrak{D}d\pi''}{\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} = \frac{-\mathfrak{D}d\pi''}{m\Phi}, \text{ ou } \mathrm{D}s = \frac{-\mathrm{ABC}\mathfrak{D}a\pi''}{m(\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi)}.$$

3°. A cause de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}=0.$$

IV. Pour le cas de cinq verres:

1°. La multiplication donne $\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi=+m\Phi$, & partant $\Phi=\frac{\pi'''-\pi''+\pi'-\pi}{m-1}$ pour le champ apparent.

2°. La distance de l'œil derriere le dernier verre

$$Et=\frac{\mathfrak{E}e\pi'''}{m\Phi},\ \text{ou}\ Et=\frac{ABCD\mathfrak{E}a\pi'''}{m(\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi)}.$$

3°. A cause de la diverse réfrangibilité des rayons, il faut satisfaire à cette équation:

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi-\Phi}+\frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi'-\pi+\Phi}+\frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi''-\pi'+\pi-\Phi}+\frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi'''-\pi''+\pi'-\pi+\Phi}=0.$$

La continuation de ces formules à plusieurs verres est si aisée, qu'il seroit superflu de les continuer, d'autant plus que, dans mon Mémoire du XIII Volume, toutes ces formules sont déjà rapportées à plusieurs verres, & cela conjointement avec celles que les autres bonnes qualités de ces instrumens exigent.

XXXIII. Jusqu'ici j'ai eu égard à l'usage principal de ces instrumens, qui est de regarder à travers. Mais, si l'on vouloit, dans une chambre obscure, recevoir la derniere image sur une surface blanche, on n'auroit qu'à la poser perpendiculaire à l'axe de l'instrument entre les limites L & L', afin que la représentation devînt d'autant plus distincte. Mais, pour la délivrer des couleurs d'iris, il faut que les rayons représentent sur la table les extrêmités l, ayent précisément la direction $\Omega\, l$ (fig. 1), puisqu'alors les diverses couleurs se réunissent

dans

dans une seule. Or cela arrive, lorsque le point Ω (fig. 1) se confond avec le point ω (fig. 2), puisqu'alors $\frac{Ll}{L\Omega} = \frac{Ll}{L\omega} = \frac{ET}{E\omega}$: & partant la ligne $T\omega\Omega l$, qui est la direction du rayon, droite. Donc, pour obtenir cet effet, il faut arranger les verres en sorte qu'il devienne

$$\frac{\pi}{\mathfrak{B}\pi - \Phi} + \frac{\pi'}{\mathfrak{C}\pi' - \pi + \Phi} + \frac{\pi''}{\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \Phi} + \frac{\pi'''}{\mathfrak{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \Phi} + \&c. = 0;$$

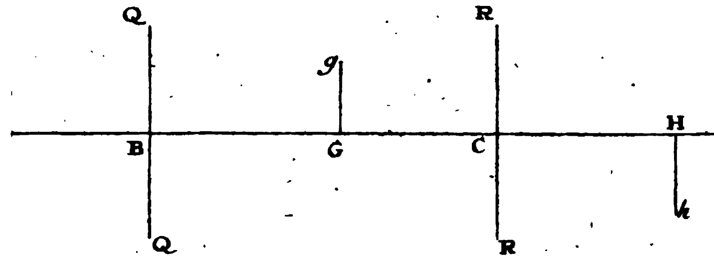
ce qui est le même remede dont il faut se servir pour délivrer la vision des bords colorés. Ordinairement ces sortes de représentations qu'on fait dans les chambres obscures, ne sont que trop assujetties à cette confusion causée par la diverse réfrangibilité des rayons; & partant le remede que je viens de proposer contre cet inconvénient, sera d'une très grande utilité.

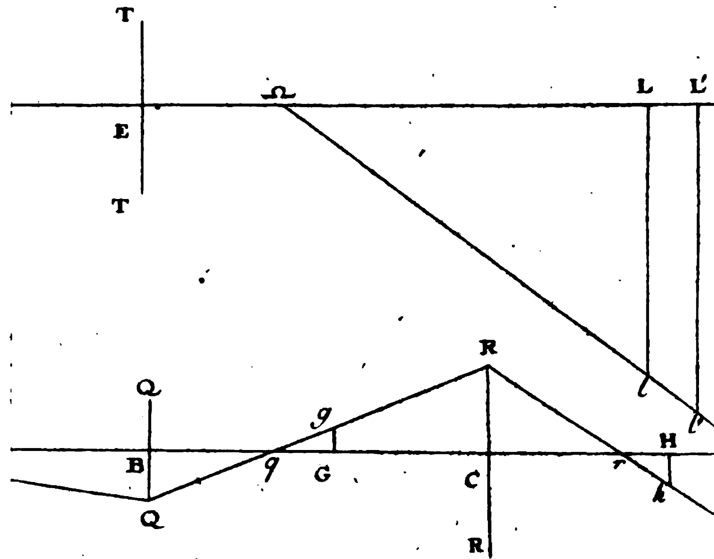
XXXIV. Mais il faut bien remarquer ici, que ce remede pour délivrer les instrumens dioptriques des inconvéniens de la diverse réfrangibilité des rayons, ne sauroit produire son effet, que lorsque l'autre espece de confusion, qui tire son origine de l'ouverture des verres, est réduite à rien, ou diminuée au point de n'être plus sensible. La raison en est bien évidente; car, si les rayons qui passent par les bords de l'objectif, présentoient d'autres images que ceux qui passent par son centre, que j'ai considérés ici tout seuls, l'effet de la diverse réfraction en deviendroit sans doute beaucoup plus grand. Ce n'est donc qu'à mesure qu'on remédie à la confusion de l'ouverture des verres, qu'on réussit à faire évanouir celle qui provient de la diverse réfrangibilité des rayons. Et en effet, pour la plûpart, lorsqu'on se plaint des couleurs d'iris, auxquelles une lunette est assujettie, la raison se trouve ordinairement dans l'ouverture de l'objectif, laquelle étant rétrécie, ces couleurs évanouissent presque tout à fait; ce qui prouve incontestablement, que le défaut réside plutôt dans la trop grande ouverture de l'objectif, que dans la nature des rayons, dont l'effet

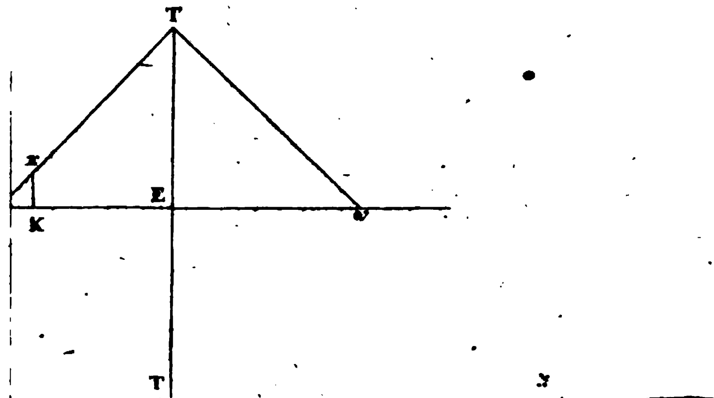
l'effet immédiat n'eſt pas ordinairement beaucoup à craindre. Cependant il ſera toujours bon d'obſerver ſoigneuſement les regles que je viens de preſcrire ici, afin qu'on ſoit d'autant plus ſûr du juſte arrangement des verres, ſurtout lorſqu'il y en a plus de deux; puiſque ſans cette précaution la différence entre les deux lieux pour l'œil, Ω & ω, pourroit devenir aſſez grande pour produire un effet facheux.

Mais les plus grands ſoins doivent être apportés à diminuer la confuſion qui réſulte de l'ouverture des verres, & même à la réduire à rien, s'il eſt poſſible; ce n'eſt que par ce moyen, qu'on pourra achever de porter ces inſtrumens dioptriques au plus haut degré de perfection.

XXXV. Après ces recherches il eſt clair, que c'étoit un préjugé deſtitué de fondement, que de s'imaginer qu'il étoit abſolument impoſſible de prévenir dans les inſtrumens dioptriques les inconvéniens de la diverſe réfrangibilité des rayons, ſurtout quand on demande de très grands groſſiſſemens. Comme plus la diſtance de foyer de l'objectif eſt grande, plus auſſi l'eſpace de diffuſion cauſée par les différens rayons devient grand dans la même raiſon, on n'a pas balancé à en conclure, que plus on veut groſſir les objets, plus auſſi cette confuſion deviendroit conſidérable, & qu'il ſeroit impoſſible d'y remédier par un bon arrangement des verres. Cependant perſonne, que je ſache, n'avoit pris la peine de déterminer par le calcul toutes les images formées par les différens rayons qui paſſent par pluſieurs verres, ce qui auroit pourtant été le ſeul moyen de s'éclaircir ſur cet article. Mais maintenant, après avoir fait ces calculs, nous voyons que pour le même groſſiſſement l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons peut varier à l'infini, & partant devenir tantôt plus grand tantôt plus petit, ſelon le nombre & l'arrangement des verres. Enſuite il eſt non ſeulement poſſible de délivrer la viſion des objets des couleurs d'iris, mais, ce qui eſt le plus remarquable, nous avons auſſi vu, que pour ceux qui ont la vue courte on pourroit même entierement détruire l'effet de la diverſe réfrangibilité des rayons, de ſorte que la derniere image (ou l'ob-


Q
R
g
H
B
G
C
h
Q
R


T
Ω
L
L'
E
T
R
Q
g
l
l'
H
B
q
G
C
r
h
Q
R


T
x
E
K
T

l'objet immédiat de la vue) feroit auffi nette, que fi elle étoit repréfentée par un miroir, & tout cela en n'employant qu'une feule efpece de verre.

XXXVI. Cependant je ne difconviens pas, qu'en employant différentes efpeces de verre, on ne puiffe peut-être trouver des arrangemens plus avantageux, ou au moins plus commodes; mais, puifque les différentes efpeces de verre different fi peu en réfraction, ces avantages feront toujours peu confidérables. Il ne fera pas même difficile d'appliquer les recherches que je viens de développer, au cas où tous les verres auroient une réfraction particuliere: on n'auroit qu'à attacher à chaque verre une valeur particuliere de la lettre λ, & qu'à l'indiquer ainfi: λ, λ', λ'', λ''' &c.; où il faudroit remarquer que la raifon de réfraction 1,55 : 1 donneroit $\lambda = 0{,}01844$, & celle-ci, 1,50 : 1 donneroit $\lambda = 0{,}01815$. Puifque toutes les efpeces de verre font comprifes entre ces limites, on voit que les valeurs des lettres λ, λ', λ'' &c. deviendroient trop peu différentes entr'elles, pour qu'on pût s'en promettre des avantages fort confidérables. Mais, pour s'en affurer entierement, il vaudroit bien la peine de développer ces mêmes recherches, dans le cas où la lettre λ auroit pour chaque verre une valeur particuliere; les calculs deviendroient un peu plus ennuyeux, mais peut-être à la fin parviendroit-on à des formules affez fimples.

CONSIDÉRATIONS

SUR

LES NOUVELLES LUNETTES D'ANGLETERRE
DE MR. DOLLOND,

ET SUR LE PRINCIPE QUI EN EST LE FONDEMENT. (*)

PAR M. L. EULER.

Ces Lunettes produiſent un effet ſi excellent, qu'il ſemble que leur conſtruction remédie parfaitement aux défauts auxquels les autres inſtrumens dioptriques ſont aſſujettis. Ces défauts conſiſtent dans une double confuſion, dont l'une eſt cauſée par la figure ſphérique des verres, ou plutôt par leur ouverture, entant que les rayons qui paſſent par les bords de l'objectif repréſentent les objets dans un autre lieu que ceux qui paſſent par le milieu; l'autre provient de la diverſe nature des rayons, qui, ſelon leurs différentes couleurs, ſouffrent différentes réfractions en paſſant par le verre. Mr. Dollond prétend avoir détruit à la fois cette double confuſion, en compoſant l'objectif de deux verres, formés de deux eſpeces différentes de verre, dont l'une ſe nomme en Anglois *Fintglaſs*, & l'autre *Crownglaſs*. Cet expédient mérite ſans doute toute notre attention, tant par le bon effet qui en eſt produit, que par une circonſtance tout à fait ſinguliere, qui ſemble renverſer les principes de la réfraction, qu'on a regardés juſqu'ici comme très ſolidement établis.

Pour ce qui regarde la premiere confuſion, j'ai ſuffiſamment fait voir, qu'en compoſant l'objectif de deux verres, il eſt poſſible de la

(*) Lu le 16 de Sept. 1762.

la diminuer & même de la réduire à rien, en déterminant d'une certaine maniere les ſphéricités des quatre faces de ces verres: mais, pour l'autre confuſion, il eſt certain qu'on n'y ſauroit remédier qu'en employant deux matieres tranſparentes, qui different aſſez conſidérablement par rapport à la réfraction. J'ai montré autrefois comment on pourroit compoſer de tels objectifs de verre & d'eau, la différence entre la réfraction de ces deux matieres étant la plus grande que la Nature nous offre; cependant elle eſt encore trop petite, pour que la pratique en puiſſe tirer un aſſez grand avantage, vu que la courbure des faces du verre deviendroit ſi conſidérable, qu'il ne ſeroit plus ſuſceptible d'une ouverture ſuffiſante; ce qui m'a obligé de renoncer à cette idée de conſtruire des objectifs délivrés de la confuſion cauſée par la diverſe réfrangibilité des rayons.

Par cette raiſon on doit être d'autant plus ſurpris, que Mr. Dollond ait trouvé moyen de faire de tels objectifs, en n'y employant que deux différentes eſpeces de verre, dont la réfraction differe certainement beaucoup moins, que celle du verre & de l'eau; attendu que Mr. Dollond lui-même fixe la raiſon de réfraction de l'air dans le flintglaſs à 1,583 : 1, & dans le crownglaſs à 1,53 : 1. Mais il prétend que la diſperſion des différens rayons differe très conſidérablement dans ces deux eſpeces de verre, & même en raiſon de 3 à 2; ce qui renverſeroit entierement la théorie que j'ai donnée autrefois ſur la réfraction de différentes matieres tranſparentes, & que je me flattois avoir portée au plus haut degré de certitude. Mais, avant que de rejetter cette théorie, il me ſera permis d'examiner ſoigneuſement toutes les preuves ſur leſquelles Mr. Dollond fonde ſon ſentiment à l'égard de cette exceſſive différence entre ſes deux ſortes de verre. Or toute la controverſe ſe réduit à cette queſtion:

„La raiſon de la réfraction que ſouffrent les rayons moyens en „paſſant d'un milieu dans un autre, étant donnée, on demande la rai- „ſon de la réfraction que ſouffriront dans le même paſſage les rayons „rouges & les violets, ou bien les plus & les moins réfrangibles.“

Il ſera bon de mettre cette queſtion dans un plus grand jour, avant que d'entreprendre l'examen des preuves que M. Dollond rapporte pour établir ſon ſentiment; & pour une plus grande clarté, je renfermerai mes réflexions dans les articles ſuivans.

1. Conſidérons d'abord la choſe en général; & quand les rayons paſſent d'un milieu A dans un autre milieu B, ſoit $m : 1$ la raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons moyens; $r : 1$ la même raiſon pour les rayons rouges ou les moins réfrangibles, & $v : 1$ cette raiſon pour les rayons violets ou les plus réfrangibles. Donc, puiſque la raiſon $r : 1$ approche plus de la raiſon d'égalité, que la raiſon $m : 1$, & que la raiſon $v : 1$ s'en écarte plus, il s'enſuit que, ſi $m > 1$, on aura $r < m$ & $v > m$: or, ſi $m < 1$, on aura $r > m$, & $v < m$. Cependant, comme la différence entre ces trois nombres m, r & v, eſt toujours très petite, on peut regarder m comme le milieu arithmétique entre r & v, de ſorte que $r + v = 2m$. Si l'on vouloit établir les rayons moyens, en ſorte que m fût le moyen proportionel entre r & v, ou bien $mm = rv$, cela reviendroit au même.

2. Pour abréger le diſcours, en partant de ces différentes réfractions, je nommerai ſimplement *Réfraction moyenne*, la raiſon du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction des rayons moyens. De la même maniere, *Réfraction rouge* & *Réfraction violette*, ſignifieront cette raiſon du ſinus d'incidence à celui de réfraction pour les rayons rouges & violets. On dira donc que la *réfraction violette* eſt plus grande que la *réfraction rouge*, & que la *réfraction moyenne* tient un milieu entr'elles: où il faut remarquer, que les mots, *plus grand* & *plus petit*, ſe rapportent à un plus grand & plus petit écart de la raiſon d'égalité.

3. Pour rendre cela plus ſenſible, conſidérons le cas où les rayons paſſent de l'air dans le verre, &, ſuivant les déterminations de Newton, nous aurons la réfraction moyenne $= 155 : 100$, la réfrac-

fraction rouge = 154 : 100, & la réfraction violette = 156 : 100, de sorte que

$$m = \frac{155}{100} = 1,55; \quad r = \frac{154}{100} = 1,54 \quad \& \; v = \frac{156}{100} = 1,56;$$

ce qu'il faut entendre de cette espece de verre, à laquelle répond la réfraction moyenne 155 : 100; puisque Mr. Dollond a découvert des especes très différentes de verre à cet égard. Comme ici $m > 1$, il est évident que $r < m$, & $v > m$, ou bien, la raison $r : 1$ approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$.

4. Mais, quand les rayons passent de ce verre dans l'air, on doit renverser ces mêmes raisons, & la réfraction moyenne sera = 100 : 155, la rouge = 100 : 154 & la violette = 100 : 156, de sorte que réduisant à l'unité le dernier terme de ces raisons, on aura:

$$m = \frac{100}{155}; \qquad r = \frac{100}{154}; \qquad \& \; v = \frac{100}{156};$$

où il y a visiblement $r > m$ & $v < m$, puisque $m < 1$. Cependant la raison $r : 1$ approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$, & on pourra dire comme auparavant, que la *réfraction rouge* est plus petite, & la réfraction violette plus grande, quoique la valeur de r soit dans ce cas plus grande que celle de v.

5. Il en est de même en général: car si, pour le passage du milieu A dans le milieu B, on a la réfraction moyenne $= m : 1$, la rouge $= r : 1$ & la violette $= v : 1$, on aura pour le cas renversé, où les rayons passent du milieu B dans le milieu A,

la réfraction moyenne $= \frac{1}{m} : 1,$

la réfraction rouge $= \frac{1}{r} : 1,$

& la réfraction violette $= \frac{1}{u} : 1;$

 où

où là réfraction rouge est aussi bien la plus petite & la réfraction violette la plus grande, que dans le premier cas: puisque, si la raison $r : 1$, approche plus de la raison d'égalité que la raison $v : 1$, la même propriété se trouve aussi dans les raisons renversées $\frac{1}{r} : 1$ & $\frac{1}{v} : 1$.

6. Or, que le passage du milieu B dans le milieu A renferme toujours une réfraction renversée de celle qui convient au passage du milieu A dans le milieu B, c'est un principe fondamental de toute la Dioptrique, aussi bien que l'invariabilité dans le rapport entre les sinus d'incidence & de réfraction: & aucun de ceux qui ont traité jusqu'ici cette science, ne s'est avisé de douter de la vérité de ces deux principes. C'est aussi là-dessus que j'ai établi toute ma Théorie de la Réfraction, & je la regarde encore comme inébranlable, à moins qu'on ne renverse l'un ou l'autre de ces deux principes, dont j'avoue très volontiers, que je ne puis pas démontrer géométriquement la vérité, vu qu'elle dépend visiblement de la nature de la lumiere, & de la maniere dont se fait la réfraction dans le passage par différens milieux réfringens; & je crois qu'il s'en faut beaucoup, que nous soyons encore arrivés à cette connoissance.

7. Je suis aussi assuré que Mr. Dollond ne veut pas contester ces principes, quand il se flatte avoir détruit par ses expériences ma théorie de la réfraction, dans laquelle je crois avoir établi le vrai rapport qui doit se trouver entre les quantités m, r & v, de sorte que connoissant la réfraction moyenne, on puisse toujours assigner par-là la réfraction rouge & la violette. Mais, quand même la diverse réfrangibilité des rayons suivroit une loi différente de celle que j'ai établie, ce seroit toujours le plus grand paradoxe, que deux especes si peu différentes de verre produisissent des effets si énormément différens dans la réfraction des rayons diversement colorés. Et partant, indépendamment

ment d'aucune théorie, les preuves de M. Dollond exigent toujours l'examen le plus rigoureux.

8. La principale preuve eſt fondée ſur l'expérience de deux priſmes formés de deux eſpeces différentes de verre, qu'il a conſtruits & joints de telle ſorte enſemble, qu'ils lui ont préſenté les objets ſans les couleurs d'iris: d'où il a conclu que le verre nommé *Crownglaſs* diſperſe d'un tiers moins les divers rayons, que celui qu'on nomme *Flintglaſs*. Or, pour juger, tant de ces expériences, que de la concluſion que M. Dollond en a tirée, il eſt néceſſaire de conſidérer en général la réfraction que les rayons éprouvent en paſſant par un ou pluſieurs priſmes.

9. Pour introduire plus commodément dans le calcul la diverſe réfraction des rayons, lorſque la réfraction moyenne eſt exprimée par $m:1$, ou ſimplement par le nombre m, je ſuppoſerai la réfraction rouge $= m - dm$, & la violette $= m + dm$, de ſorte que $r = m - dm$, & $v = m + dm$; car, puiſque les différences entre ces nombres ſont très petites, il ſera permis de la traiter ſur le pied des différentiels. Selon ma théorie, la valeur de cette différentielle ſeroit $dm = \frac{1}{07}\, m\, lm$; mais je ferai ici abſtraction de toute théorie, & je regarderai cette valeur comme inconnue, dans la vue de la déterminer par les expériences que M. Dollond propoſe.

10. Soit CAD l'angle d'un priſme, que je poſe $= \alpha$, & la matiere du priſme telle, que la réfraction moyenne des rayons qui y entrent de l'air ſoit $= m:1$, & partant de ceux qui en ſortent dans l'air $= 1:m$. Conſidérons maintenant un rayon quelconque FQ, comme venant d'une étoile ou d'un point lumineux fort éloigné, qui entre dans le priſme en Q, où ayant pris la direction QR, il ſorte en R dans l'air, de ſorte qu'il faille déterminer la direction RG de ce rayon tranſmis par le priſme. J'ai marqué dans la figure les angles que fait ce rayon avec les deux faces du priſme CA & DA; d'où l'on tire d'abord pour la réfraction moyenne ces deux équations: $\cos p = m \cos q$, & $m \cos (q - \alpha) = \cos r$.

Pl. VIII. Fig. 1. *Sur l'effet d'un ſeul Priſme.*

11.

11. Puisque $m > 1$, il eſt évident que ni le coſ q, ni le coſ $(q - \alpha)$, ne ſauroit être plus grand que $\frac{1}{m}$. Soit donc μ l'angle dont le coſinus eſt préciſément $= \frac{1}{m}$, ou coſ $\mu = \frac{1}{m}$, & partant il faut qu'il ſoit tant coſ $q <$ coſ μ que coſ $(q - \alpha)$ $<$ coſ μ, donc $q > \mu$, & $q - \alpha > \mu$, ou $q > \alpha + \mu$. Mais ſelon les figures tous ces angles ſont aigus; donc, à moins que l'angle $\alpha + \mu$ ne ſoit plus petit qu'un droit, il eſt impoſſible que le rayon FQ ſoit de cette ſorte tranſmis par le priſme, c'eſt à dire, tant que l'angle AQF $= p$ eſt aigu. Mais ſi l'angle p étoit obtus, ces conditions devroient s'entendre des complémens de ces angles à deux droits, & on auroit $180° - q > \mu$, & $180° - q + \alpha > \mu$, donc $q < 180° - \mu$, ce qui remplit auſſi la ſeconde condition: d'où nous avons ces deux limites: $q > \alpha + \mu$, & $q < 180° - \mu$.

12. D'abord on demande ici la quantité de la réfraction, ou combien la direction RG s'écarte de la direction FQ. Or, ſi l'on continuoit le rayon FQ jusqu'au côté AD, il y feroit un angle $p - \alpha$, & partant la quantité de la réfraction eſt meſurée par la différence entre les angles r & $p - \alpha$, ou bien elle ſera $= p - \alpha - r$; c'eſt à dire, en regardant l'objet par le priſme, il paroitra autant écarté de ſon lieu naturel. Or le rapport entre les angles p & r ſe trouve aiſément en éliminant l'angle q; car la premiere égalité donnant coſ $q = \frac{1}{m}$ coſ p, & partant ſin $q = \frac{1}{m} V(mm - \text{coſ}\, p^2)$, l'on en tire

$$\text{coſ}(q-\alpha) = \text{coſ}\,\alpha\, \text{coſ}\,q + \text{ſin}\,\alpha\, \text{ſ}\,q = \frac{\text{coſ}\,\alpha\, \text{coſ}\,p + \text{ſ}\,\alpha\, V(mm - \text{coſ}\,p^2)}{m},$$

donc coſ $r =$ coſ α coſ p + ſin $\alpha\, V(mm - \text{coſ}\, p^2)$, ou

$$\text{coſ}\,p^2 - 2\,\text{coſ}\,\alpha\,\text{coſ}\,p\,\text{coſ}\,r + \text{coſ}\,r^2 = mm\,\text{ſin}\,\alpha^2.$$

13.

13. Mais la principale question roule ici sur la dispersion des rayons diversement colorés; pour cet effet, on n'a qu'à chercher la variation de l'angle r, en faisant le nombre m variable, pendant que l'angle p demeure le même. La derniere équation est très propre à ce dessein, laquelle nous donne dabord par la différentiation;

$$dr \cos\alpha \cos p \sin r - dr \sin r \cos r = m\,dm \sin\alpha^2,$$

& partant

$$dr = \frac{m\,dm \sin\alpha^2}{(\cos\alpha\cos p - \cos r)\sin r} = -\frac{m\,dm \sin\alpha}{\sin r \,.\, \sqrt{(mm - \cos p^2)}},$$

ou bien $dr = \frac{dm \sin\alpha}{\sin q \sin r}$.

Donc, après avoir trouvé l'angle DRG $= r$ pour les rayons moyens, on aura la quantité de cet angle

pour les rayons rouges $= r + \frac{dm \sin\alpha}{\sin q \sin r}$, &

pour les rayons violets $= r - \frac{dm \sin\alpha}{\sin q \sin r}$.

14. La même détermination se tire aussi sans peine immédiatement de nos deux équations principales $\cos p = m \cos q$ & $m \cos(q - \alpha) = \cos r$, en les différentiant dans la supposition que les angles q & r avec le nombre m sont variables, pendant que les angles p & α demeurent constans. De là on trouve

$$o = dm \cos q - m\,dq \sin q, \text{ \& } dm \cos(q - \alpha) - m\,dq \sin(q - \alpha) = - dr \sin r;$$

donc, puisque la premiere donne $m\,dq = \frac{dm \cos q}{\sin q}$, la seconde devient

$$dm\left(\cos(q - \alpha) - \frac{\cos q \sin(q - \alpha)}{\sin q}\right) = - dr \sin r.$$

Or,

Or, $\sin q \cos(q-\alpha) - \cos q \sin(q-\alpha) = \sin(q-(q-\alpha)) = \sin \alpha$, donc $\frac{dm \sin \alpha}{\sin q} = - dr \sin r$, ou bien $dr = \frac{-dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$; où dr marque l'accroissement de l'angle r, pendant qu'on met $m + dm$ au lieu de m: mais, pour les rayons rouges, il faut écrire $m - dm$, & pour les violets $m + dm$ au lieu de m.

15, La dispersion entiere sera donc exprimée par $\frac{2 dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$, ou bien une étoile vue par le prisme paroitra allongée par un si grand espace dans le Ciel, l'un des bouts étant rouge & l'autre violet. On voit que, sous les mêmes circonstances du prisme, cette image de l'étoile sera d'autant plus allongée, plus la particule $2dm$, que marque la différence entre la réfraction rouge & violette, sera grande. De là on pourra donc aussi juger réciproquement de la valeur dm en regardant une étoile par un tel prisme; & mesurant l'espace allongé qu'elle paroit occuper dans le Ciel. Ou bien, ce qui revient au même, on laissera tomber dans une chambre obscure l'image de l'étoile, & on mesurera la grandeur du spectre, pour en conclure la valeur de la formule $\frac{2 dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$, & de là ensuite celle de dm.

16. Or M. Dollond assure, que quand on emploie de cette sorte deux prismes semblables, l'un de flintglass, l'autre de crownglass, celui-ci produit une beaucoup plus petite dispersion que le premier, & que la valeur de dm pour le crownglass ne sera environ que $\frac{2}{3}$ de celle qui répond au flintglass. Comme on ne sauroit douter du succès de cette expérience, la conclusion qu'on en tire semble être assujettie à quelque doute assez important. Le crownglass est un verre verdâtre assez foncé; or on sait qu'un tel verre ne transmet que les rayons qui sont à peu près de la même nature, & que les autres sont pour la plupart interceptés: donc, si les rayons rouges, & peut-être aussi les orangés, étoient interceptés par le crownglass, l'image colorée perdroit

droit sans doute beaucoup de son étendue, la partie rouge y manquant presque entierement, ou devenant trop foible pour être apperçue.

17. Il seroit donc bien possible, que le crownglass produisît une image beaucoup moins étendue que selon la loi de la réfraction, où l'on suppose que tous les rayons sont transmis également; sans que cette loi puisse être révoquée en doute. Par ce moyen on pourroit même faire évanouir toute dispersion; on n'auroit qu'à employer un tel verre coloré, qui ne transmît que les rayons de la même couleur. Cet expédient a déjà été proposé autrefois, de construire les objectifs d'un verre coloré très foncé; mais, comme on perdroit alors tous les autres rayons, la représentation deviendroit trop obscure, & les lunettes n'en seroient pas moins défectueuses. Il me paroit donc encore fort douteux, si cette expérience suffit pour renverser aucune hypothese sur la réfraction, quelque défectueuse qu'elle soit d'ailleurs.

18. Or le *flintglass* n'ayant aucune couleur, & étant parfaitement transparent, produit une image complette, & étendue depuis le rouge le plus haut jusqu'au violet le plus foncé: & cette image seroit sans doute plus longue que celle du crownglass, quand même la loi de réfraction seroit la même de part & d'autre, puisque cette loi ne se rapporte en aucune façon aux rayons qui sont interceptés. Il faut donc bien distinguer la diffusion des images, causée par la diverse réfraction des rayons, de celle qui est rétrécie par l'interception de quelques rayons, qui formeroient l'une ou l'autre extrémité de l'image.

Sur l'effet de deux Prismes collés ensemble.

19. Soient maintenant deux prismes CAB & ABD collés ensemble par le côté AB, ou, ce qui revient au même, dont les faces AB & BA soient paralleles entr'elles. Soit l'angle du premier CAB $= \alpha$, & de l'autre ABD $= \beta$: la réfraction moyenne de l'air dans le premier $= m : 1$, & de l'air dans l'autre $= n : 1$. Cela posé, si un rayon FQ passe par ces deux prismes, & qu'on nomme les an- Pl. VIII. Fig. 2.

gles, comme ils sont marqués dans la figure; on aura pour la réfraction des rayons moyens ces égalités:

$$\cos p = m \cos q;\quad m \cos(q-\alpha) = n \cos r;\quad \& \; n \cos(r+\beta) = \cos s;$$

où je remarque seulement que, s'il y a le moindre vuide entre les deux prismes, le passage ne sauroit subsister, à moins que les formules $m \cos(q - \alpha)$ & $n \cos r$ ne soient plus petites que l'unité.

20. La quantité de réfraction est estimée, comme auparavant, par l'angle que feroit le rayon incident FQ, continué avec le rayon rompu SG. Or le rayon FQ prolongé feroit avec la face AB un angle $= p - \alpha$, & le rayon SG avec la même face un angle $= s - \beta$, dont la différence $p - s - \alpha + \beta$ mesure la quantité de réfraction. Donc, s'il arrivoit qu'il fût $p - \alpha = s - \beta$, le rayon SG seroit parallele au rayon FQ, & les prismes ne changeroient rien dans le lieu de l'objet. C'est dans ce cas que le grand Newton croyoit que la vision seroit nette & délivrée des couleurs d'iris, mais M. Dollond a trouvé que cela n'arrive pas.

21. Si les deux prismes sont faits de la même matiere, de sorte que $n = m$, alors, à cause de $r = q - \alpha$, la réfraction sera déterminée par ces deux équations:

$$\cos p = m \cos q \quad \& \quad \cos s = m \cos(q - \alpha + \beta),$$

d'où l'on trouve aisément le cas où $p - \alpha = s - \beta$, & les objets paroissent dans leurs vrais lieux. Posons pour cet effet $p - \alpha = s - \beta = \phi$, de sorte que $p = \alpha + \phi$ & $s = \beta + \phi$; &, puisque la premiere équation donne

$$\cos q = \frac{\cos p}{m} \quad \& \quad \sin q = \frac{\sqrt{(mm - \cos p^2)}}{m},$$

en substituant ces valeurs dans l'autre équation, on aura

$$\cos(\beta + \phi) = \cos(\alpha = \beta) \cos \alpha + \phi + \sin(\alpha - \beta) \sqrt{(mm - \cos(\alpha + \phi)^2)}.$$

Or,

Or, puisque $\beta + \phi = (\alpha + \phi) - (\alpha - \beta)$, on a

$$\cos(\beta + \phi) = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \phi) + \sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \phi);$$

donc $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \phi) = \sin(\alpha - \beta)\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \phi)^2)}$,

d'où il s'ensuit ou $\alpha - \beta = o$, ou $mm = 1$.

22. La racine $mm = 1$ étant contraire à la réfraction, il faut absolument que les deux angles α & β soient égaux entr'eux, & partant les côtés AC & BD paralleles entr'eux, pour que la réfraction ne change point le lieu des objets. Mais, quand la matiere des deux prismes est différente, il n'est pas si aisé de déterminer les cas où les objets sont représentés dans leurs vrais lieux; & je remarque d'abord qu'on ne sauroit assigner une telle proportion entre les angles α & β, afin que cette représentation trouve lieu pour tous les objets. Il n'y aura jamais qu'un seul angle AQF $= p$, qui donne $p - \alpha = s - \beta$; & dès qu'on regarde d'autres objets, dont les rayons font avec le prisme un plus grand ou un plus petit angle, leur lieu, vu par les prismes, sera différent de celui où ils se trouvent véritablement.

23. Pour développer donc les cas de cette apparition, posons comme auparavant $p - \alpha = s - \beta = \phi$, ou bien $p = \alpha + \phi$, & $s = \beta + \phi$, & nous aurons

$$\cos q = \frac{\cos(\alpha + \phi)}{m}; \quad \text{donc } \sin q = \frac{\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \phi)^2)}}{m}$$

$$\cos(r + \beta) = \frac{\cos(\beta + \phi)}{n}; \quad \text{donc } \sin(r + \beta) = \frac{\sqrt{(nn - \cos(\beta + \phi)^2)}}{n},$$

$$\& \quad m\cos(q - \alpha) = n\cos r, \quad \text{ou bien}$$

$$m\cos\alpha\cos q + m\sin\alpha\sin q = n\cos\beta\cos(r + \beta) + n\sin\beta\sin(r + \beta),$$

où substituant les premieres valeurs on arrive à cette équation:

$$\cos\alpha\cos(\alpha + \phi) + \sin\alpha\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \phi)^2)} = \cos\beta\cos(\beta + \phi) + \sin\beta\sqrt{(nn - \cos(\beta + \phi)^2)},$$

d'où il s'agit de déterminer l'angle ϕ. Mais il eſt aſſez clair que cet angle ne ſauroit être réel, à moins que le rapport entre les angles α & β ne ſoit renfermé entre certaines limites.

24. Je ne vois aucune méthode pour réſoudre commodément cette équation, ſi ce n'eſt en tâtonnant pour chaque cas propoſé des nombres m & n: je remarque ſeulement, que prenant $\beta = \alpha$, cette équation, ſe réduiſant à celle-ci:

$$\sqrt{(mm - \operatorname{cof}(\alpha + \phi)^2)} = \sqrt{(nn - \operatorname{cof}(\alpha + \phi)^2)},$$

ne ſauroit ſubſiſter, à moins qu'il ne fût $n = m$. Donc, lorſque les deux priſmes ſont compoſés de différentes matieres, il faut abſolument que les angles α & β ſoient inégaux. Mais il n'eſt pas ſi aiſé de voir lequel de ces deux angles doit être plus grand ou plus petit; cependant il ſemble que, ſi n eſt plus grand que m, l'angle β doit être pris plus petit que α: mais il ſe peut bien que cette maxime ne ſoit pas générale, ſurtout puiſque le maintien des objets dans leur vraie ſituation n'a lieu dans chaque cas que pour un ſeul angle ϕ.

25. Or, pour trouver les diſpoſitions des deux priſmes, afin que les objets, dont les rayons y tombent ſous un angle donné $AQF = p$, ſoient vus dans leur vrai lieu, les deux réfractions m & n étant données, on peut, outre l'angle p, encore prendre à volonté l'angle s, & de là déterminer les deux angles des priſmes α & β: ſous cette vue le probleme deviendra aiſé à réſoudre. Car, retenant dans le calcul les angles p & s, on aura $\alpha = p - \phi$, & $\beta = s - \phi$; d'où notre équation prend cette forme:

$$\operatorname{cof} p \operatorname{cof}(p - \phi) + \operatorname{fin}(p - \phi) \sqrt{(mm - \operatorname{cof} p^2)} = \operatorname{cof} s \operatorname{co}(s - \phi) + \operatorname{fin}(s - \phi) \sqrt{(nn - \operatorname{cof} s^2)},$$

& de là, en développant les ſinus & coſinus des angles $p - \phi$ & $s - \phi$, la tangente de l'angle ϕ s'en tire aiſément de cette ſorte:

$$\operatorname{tag} \phi = \frac{\operatorname{cof} s^2 - \operatorname{cof} p^2 + \operatorname{fin} s \sqrt{(nn - \operatorname{cof} s^2)} - \operatorname{fin} p \sqrt{(mm - \operatorname{cof} p^2)}}{\operatorname{fin} p \operatorname{cof} p - \operatorname{f} s \operatorname{cof} s - \operatorname{cof} p \sqrt{(mm - \operatorname{cof} p^2)} + \operatorname{cof} s \sqrt{(nn - \operatorname{cof} s^2)}},$$

&

& ensuite les angles mêmes des deux prismes :

$$\text{tag } \alpha = \frac{(\sqrt{(nn - \operatorname{cos} s^2)} - \operatorname{sin} s) \operatorname{sin}(p - s)}{\operatorname{cos} s \operatorname{sin}(p-s) - \sqrt{(mm - \operatorname{cos} p^2)} + \operatorname{cos}(p-s)\sqrt{(nn - \operatorname{cos} s^2)}},$$

&

$$\text{tag } \beta = \frac{(\sqrt{(mm - \operatorname{cos} p^2)} - \operatorname{sin} p) \operatorname{sin}(p - s)}{\operatorname{cos} p \operatorname{sin}(p-s) + \sqrt{(nn - \operatorname{cos} s^2)} - \operatorname{cos}(p-s)\sqrt{(mm - \operatorname{cos} p^2)}},$$

26. Pour la commodité du calcul il suffit d'avoir déterminé l'un des angles α & β, puisque $\alpha - \beta = p - s$, d'où l'on voit qu'on ne sauroit prendre $p = s$, à moins qu'il ne soit $n = m$, puisqu'alors les deux angles α & β évanouiroient. Et de là il est aussi clair que, pour peu que les deux réfractions m & n soient différentes, on doit établir entre les angles p & s une différence assez considérable pour empêcher que les angles α & β ne deviennent trop petits. Outre cela il faut remarquer que, si l'un de ces angles devenoit négatif, on devroit alors renverser le prisme, ou le mettre en sens contraire à celui où il est représenté dans la figure.

27. L'autre question sur ce double prisme regarde la diffusion de l'image, qu'indiquera le différentiel de l'angle s, en supposant variables les deux réfractions m & n, l'angle p demeurant constant. De là nous trouvons

$$o = \mathrm{d}m \operatorname{cos} q - m\mathrm{d}q \operatorname{sin} q, \quad \mathrm{d}m \operatorname{cos}(q - \alpha) - m\mathrm{d}q \operatorname{sin}(q - \alpha) = \mathrm{d}n \operatorname{cos} r - n\mathrm{d}r \operatorname{sin} r,$$

& $\mathrm{d}n \operatorname{cos}(r + \beta) - n\mathrm{d}r \operatorname{sin}(r + \beta) = -\mathrm{d}s \operatorname{sin} s$,

où la premiere donne $m\mathrm{d}q = \frac{\mathrm{d}m \operatorname{cos} q}{\operatorname{sin} q}$, laquelle valeur étant substituée dans la seconde, produit

$$\mathrm{d}m \operatorname{cos}(q - \alpha) - \frac{\mathrm{d}m \operatorname{cos} q \operatorname{s}(q-\alpha)}{\operatorname{sin} q} = \frac{\mathrm{d}m \operatorname{s}\alpha}{\operatorname{sin} q} = \mathrm{d}n \operatorname{cos} r - n\mathrm{d}r \operatorname{s} r,$$

donc

donc $n\,dr = \frac{dn \cos r}{\sin r} - \frac{dm \sin \alpha}{\sin q \sin r}$, d'où la troisieme équation devient

$$-\frac{dn \sin \beta}{\sin r} + \frac{dm \sin \alpha \sin (r + \beta)}{\sin q \sin r} = -ds \sin s;$$

par conséquent $ds = \frac{-dm \sin \alpha \sin (r + \beta)}{\sin q \sin r \sin s} + \frac{dn \sin \beta}{\sin r \sin s}$.

28. Ici l'angle $s - ds$ répond aux rayons rouges, & l'angle $s + ds$ aux rayons violets, de sorte que le point lumineux paroitra étendu par un angle, qui est

$$\frac{2\,dn \sin \beta}{\sin r\, \mathrm{f}\, s} - \frac{2\,dm \sin \alpha \sin (r + \beta)}{\mathrm{f}\, q\, \mathrm{f}\, r\, \mathrm{f}\, s}.$$

Cette diffusion évanouira donc, quand cette égalité aura lieu:

$$\frac{dn \sin \beta}{\sin (r + \beta)} = \frac{dm \sin \alpha}{\sin q},$$

& réciproquement, quand cela arrive, on en pourra conclure le rapport entre les différentiels dm & dn. Car on aura

$$dm : dn = \frac{\sin q}{\sin \alpha} : \frac{\mathrm{f}\,(r + \beta)}{\mathrm{f}\,\beta} = \frac{\mathrm{f}\,CQR}{\mathrm{f}\,QAR} : \frac{\mathrm{f}\,RSD}{\mathrm{f}\,RBS},$$

ou bien $dm : dn = \frac{AR}{QR} : \frac{BR}{RS} = AR \,.\, RS : BR \,.\, QR.$

29. J'ai déjà remarqué que les rayons ne sauroient passer d'un prisme dans l'autre, à moins que les formules $m \cos (q - \alpha)$ & $n \cos r$ ne fussent moindres que l'unité. Posons donc:

$$m \cos (q - \alpha) = n \cos r = \cos \Phi,$$

& déterminons par ce nouvel angle Φ les angles q & $r + \beta$ de cette sorte:

cos

$$\operatorname{cof}(q-\alpha)=\frac{\operatorname{cof}\Phi}{m}, \text{ donc } \operatorname{cof} q=\frac{\operatorname{cof}\alpha\operatorname{cof}\Phi-\operatorname{f}\alpha\sqrt{(mm-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{m},$$

$$\operatorname{fin}(q-\alpha)=\frac{\sqrt{(mm-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{m}, \operatorname{f} q=\frac{\operatorname{f}\alpha\operatorname{cof}\Phi+\operatorname{cof}\alpha\sqrt{(mm-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{m},$$

$$\operatorname{cof} r=\frac{\operatorname{cof}\Phi}{n}, \text{ donc } \operatorname{cof}(r+\beta)=\frac{\operatorname{cof}\beta\operatorname{cof}\Phi-\operatorname{fin}\beta\sqrt{(nn-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{n},$$

$$\operatorname{f} r=\frac{\sqrt{(nn-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{n}, \operatorname{f}(r+\beta)=\frac{\operatorname{fin}\beta\operatorname{cof}\Phi+\operatorname{cof}\beta\sqrt{(nn-\operatorname{cof}\Phi^2)}}{n};$$

d'où nous trouvons les angles p & s déterminés ainſi:

$$\operatorname{cof} p = \operatorname{cof}\alpha \operatorname{cof}\Phi - \operatorname{fin}\alpha \sqrt{(mm-\operatorname{cof}\Phi^2)}, \quad \& \quad \operatorname{cof} s = \operatorname{cof}\beta \operatorname{cof}\Phi - \operatorname{fin}\beta \sqrt{(nn-\operatorname{cof}\Phi^2)}.$$

Donc, prenant l'angle Φ à volonté, on connoitra tous les paſſages des rayons par nos deux priſmes.

30. Mais, afin que les couleurs d'iris évanouiſſent, il faut ſatisfaire à cette équation:

$$\frac{n\,dn \operatorname{fin}\beta}{\operatorname{fin}\beta\operatorname{cof}\Phi+\operatorname{cof}\beta\sqrt{(nn-\operatorname{cof}\Phi^2)}}=\frac{m\,dm \operatorname{fin}\alpha}{\operatorname{f}\alpha\operatorname{cof}\Phi+\operatorname{cof}\alpha\sqrt{(mm-\operatorname{cof}\Phi^2)}};$$

d'où l'on voit que cette propriété ne ſauroit avoir lieu pour tous les angles Φ; mais ſi elle s'obſerve dans deux priſmes pour un certain angle Φ, ou pour un certain angle d'incidence p, toutes les autres repréſentations, qui ſe font ſous d'autres angles, n'auront plus cette prérogative, & les couleurs d'iris ne manqueront pas d'y paroitre, quoiqu'elles ne ſoient peut-être pas fort ſenſibles. Il ſe trouve donc ici la même circonſtance, que j'ai déjà remarquée dans le cas où les rayons rompus doivent devenir paralleles aux incidens.

31. Il ne ſemble pas que M. Dollond ait fait attention à cette circonſtance, puiſqu'il parle de deux tels priſmes compoſés de différentes eſpeces de verre, qui repréſentent les objets délivrés des cou-

leurs d'iris, tout comme si cette propriété convenoit à tous les angles d'incidence; & des angles α & β de ces deux prismes il conclût que $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, ce qui n'est pourtant vrai que lorsque les angles q & $r + \beta$ sont égaux. Aussi M. Clairaut, qui a traité cette même question dans les *Mém. de l'Acad. R. des Sc. de Paris* pour l'an 1756, parvient-il à cette même formule $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$, ayant supposé les angles α & β très petits pour se servir d'approximations, de sorte qu'il ne la donne que comme approchante de la vérité: mais je ne vois aucune nécessité de recourir à des approximations, quand on peut parvenir à une solution parfaite. C'est cependant là-dessus que M. Dollond fonde principalement son sentiment sur la réfraction des diverses especes de verre.

32. Or, non seulement la conclusion de M. Dollond me paroit suspecte, mais il me semble aussi que les expériences d'où il l'a tirée, sont peu exactes. D'abord je remarque, que les petits angles qu'il donne à ses prismes sont peu propres à découvrir le cas où la diverse réfrangibilité des rayons est détruite: car, ayant trouvé $ds = \frac{dn \sin \beta}{\int r \int s} - \frac{dm \sin \alpha \int (r + \beta)}{\sin q \sin r \sin s}$, il est clair que, si l'on prenoit les angles α & β infiniment petits, l'effet de la diverse réfrangibilité des rayons deviendroit insensible, quelque grand qu'il fût d'ailleurs en soi-même. Il vaudroit donc bien mieux faire ces angles aussi grands qu'il seroit possible.

33. La petitesse des angles α & β doit donc rendre fort douteuses les expériences: &, à moins que leur rapport ne s'écarte énormément de la vérité, la diffusion causée dans l'image sera absolument insensible. On conviendra aisément qu'une telle diffusion doit être assez considérable, avant qu'on la puisse distinguer par les sens; de sorte que tant qu'elle n'excede point certaines limites, les objets nous paroitront

tront aussi nets, que si la diverse réfrangibilité des rayons étoit parfaitement détruite. Outre cela, puisque l'un des prismes étoit de crownglass, où les rayons rouges sont interceptés en grande partie, la diffusion en étoit encore diminuée davantage, & partant rendue moins sensible, sans qu'on en pût conclure un changement dans la nature de la réfraction.

34. Donc, quand M. Dollond prétend avoir trouvé une telle disposition de deux prismes, l'un de flintglass, l'autre de crownglass, à travers lesquels il ait vu les objets sans aucune confusion, il s'en faut beaucoup que cette disposition soit précisément celle qui produiroit exactement ce même effet; il se pourroit même qu'elle s'en écartât très considérablement. Nous en avons déjà une preuve bien remarquable en ce que M. Dollond ne s'est pas apperçu, que cette netteté de l'image ne sauroit convenir qu'à un seul angle d'incidence; il faut donc bien que la confusion produite sous des angles différens ait été imperceptible. Mais, après ces remarques générales, je m'en vais examiner plus en détail l'expérience de M. Dollond, pour pouvoir mieux juger de la conclusion qu'il en tire.

35. Soit donc le premier prisme A de crownglass, & la réfraction moyenne $m = 1,53$; l'autre prisme B de flintglass, & la réfraction moyenne $n = 1,583$. Ensuite, les angles α & β étoient tels, selon M. Dollond, que leurs sinus tenoient à peu près la raison $3 : 2$. Je supposerai donc, puisque ces angles étoient petits, $\alpha = 21°$ & $\beta = 14°$, où l'on comprend aisément qu'une différence d'un ou de deux degrés produiroit les mêmes phénomenes. Maintenant, quand il dit que par ces deux prismes les objets lui ont paru sans couleur, il faut que cette égalité $\frac{dn \, \text{f}\, \beta}{\text{f}\,(r + \beta)} = \frac{dm \, \text{sin}\, \alpha}{\text{f}\, q}$ ait eu à peu près lieu pour quelque angle Φ, en prenant $\text{cof}\,(q - \alpha)\, \frac{\text{cof}\,\Phi}{m}$ & $\text{cof}\, r = \frac{\text{cof}\,\Phi}{n}$, puisqu'il est impossible qu'elle ait eu lieu pour

tous les angles, comme M. Dollond semble l'insinuer. Je donnerai donc à l'angle ϕ quelques diverses valeurs, pour voir combien le rapport entre dm & dn en sera changé.

36. Soit d'abord l'angle $\phi = 90°$; & nous aurons

$$q - \alpha = 90°;\ q = 111°;\ \&\ \mathrm{d}n \ \mathrm{tag}\ \beta = \mathrm{d}m\ \mathrm{tag}\ \alpha,$$

$$r = 90°;\ r + \beta = 104°;\ \text{donc}\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n} = \frac{240328}{383864},$$

& partant $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n} < \frac{2}{3}$.

Soit maintenant $\phi = 0$, & nous aurons

$$q - \alpha = 49°,11';\ q = 70°,11';\ 26733\,\mathrm{d}n = 38137\,\mathrm{d}m,$$

$$r = 50°,49';\ r \pm \beta = 64°,49;\ \text{ou}\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n} = 0,70098;$$

cette valeur est plus grande que $\frac{2}{3}$.

Soit aussi $\phi = 180°$, & nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} q - \alpha = 130°,49';\ q = 151°,49'; \\ r = 129,\ 11;\ r + \beta = 143,\ 11; \end{array}\right\}\ \text{d'où}\ \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n} = 0,53204,$$

laquelle valeur surpasse à peine $\frac{1}{2}$.

37. Voilà donc une assez grande incertitude sur le rapport des variations $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n}$, contenue entre les limites 0,532 & 0,701, sur laquelle il est impossible de se décider, à moins qu'on ne sache sous quel angle d'incidence le phénomene en question est arrivé. Mais si, au jugement des yeux, il est arrivé sous tous les angles, il s'ensuit que cette expérience ne suffit pas pour décider, si le rapport $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}n}$ est $= \frac{532}{1000}$, ou s'il est $= \frac{701}{1000}$; &, dans une si grande incertitude, il est très certain que ces sortes d'expériences ne sont en aucune maniere pro-

propres à nous éclaircir ſur le véritable rapport entre les valeurs différentielles d*m* & d*n*. Cependant, puiſque mon hypotheſe donne ce rapport $\frac{dm}{dn} = \frac{894}{1000}$, il ſemble pourtant que ces expériences y portent quelque atteinte; mais il faudroit toujours des expériences plus déciſives avant que de la rejetter.

38. Le bon effet des objectifs compoſés de ces deux eſpeces de verre prouve encore moins contre la loi de réfraction que j'ai établie; & je crois qu'il en faut chercher la raiſon dans des circonſtances tout à fait différentes. Or d'abord, je remarque que le ſeul verre de crownglaſs y contribue déjà quelque choſe, en interceptant une bonne partie des rayons rouges qui pourroient gâter l'image. M. Dollond lui-même dit avoir obſervé qu'un objectif ſimple, fait de cette eſpece de verre, produit un meilleur effet, qu'un autre ſemblable, fait d'un verre très clair; ce dont la raiſon eſt évidemment celle que je viens d'indiquer, puiſque tous les verres colorés produiſent le même effet.

39. Enſuite, la principale raiſon doit être cherchée en ce que M. Dollond, en proportionnant les deux verres dont ſes objectifs ſont compoſés, a heureuſement détruit la confuſion cauſée par la ſphéricité & l'ouverture du verre: j'ai fait voir ailleurs, que c'eſt ordinairement la ſource des plus grands défauts des lunettes, & dès qu'on y remédie, on diminue auſſi très conſidérablement l'autre défaut, qu'on attribue à la diverſe réfrangibilité des rayons. Il eſt même poſſible de rendre ce défaut inſenſible par un bon arrangement des verres oculaires, comme je l'ai expliqué autrefois fort au long. Ainſi, à mon avis, le plus grand mérite des lunettes de M. Dollond ſe trouve conjointement dans l'objectif compoſé, entant que le défaut de la ſphéricité y eſt corrigé, & dans la diſpoſition des verres oculaires: je crois même que, s'il vouloit compoſer ſes objectifs de deux verres de la même eſpece, il en éprouveroit le même effet.

40. Mais au reste il seroit très facile de s'assurer par l'expérience de cette propriété prétendue des nouveaux objectifs. Cela se pratiqueroit aisément dans une chambre obscure, y ayant fixé dans un volet un tel objectif composé; on n'auroit qu'à lui opposer hors de la chambre, tantôt un morceau de drap écarlate, tantôt un autre violet, & à mesurer ensuite dans la chambre la distance derriere le verre, où l'une & l'autre image se représenteroit le plus distinctement. Pour en juger mieux, on traverse les objets par un fil noir, dont l'image doit devenir distincte. En s'y prenant de cette maniere, je doute fort que les deux distances se trouvent égales, & selon toute apparence la différence sera aussi grande que dans les objectifs ordinaires.

41. Je finirai par une remarque, qui n'est pas peu importante dans le sujet présent. M. Dollond, en faisant ses expériences avec les deux prismes joints ensemble, s'étoit attendu que les couleurs d'iris disparoitroient là, où les rayons transmis seroient paralleles aux rayons incidens. Il croyoit que c'étoit une suite nécessaire de l'hypothese de Newton, en vertu de laquelle on devroit trouver $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$. Mais on s'appercevra aisément, que cette conséquence n'a aucun fondement. La destruction des couleurs d'iris exige cette condition $\frac{dm}{dn} = \frac{\sin \beta \sin q}{\sin \alpha \sin (r+\beta)}$: or le parallélisme des rayons transmis avec les incidens demande qu'il soit $p - \alpha = s - \beta$, ou bien, posant $p - \alpha = s - \beta = \phi$, il faut qu'il soit:

$$\cos \alpha \cos(\alpha + \phi) + \sin \alpha \sqrt{(mm - \cos(\alpha+\phi)^2)} = \cos \beta \cos(\beta + \phi) + \sin \beta \sqrt{(nn - \cos(\beta+\phi)^2)}.$$

Cette équation devroit donc être d'accord avec la précédente, si l'on posoit $\frac{dm}{dn} = \frac{m-1}{n-1}$.

42. Or nous avons vu, qu'en posant $p = \alpha + \Phi$ & $s = \beta + \Phi$, il s'ensuit $\sin q = \frac{\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)}}{m}$, & $\sin (r + \beta) = \frac{\sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)}}{n}$, & substituant ces valeurs, notre équation différentielle devient:

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin\beta \sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)}}{m \sin\alpha \sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)}}.$$

Pour l'autre équation supposons:

$$\cos\alpha \cos(\alpha + \Phi) + \sin\alpha \sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)} = v,$$

de sorte que

$$\cos\beta \cos(\beta + \Phi) + \sin\beta \sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)} = v,$$

& de là nous tirons:

$$\cos(\alpha + \Phi) = v \cos\alpha + \sin\alpha \sqrt{(mm - vv)} = \cos\alpha \cos\Phi - s\alpha \, s\Phi,$$
$$\cos(\beta + \Phi) = v \cos\beta + \sin\beta \sqrt{(nn - vv)} = \cos\beta \cos\Phi - s\beta \, s\Phi.$$

43. Ces deux formules nous fournissent aisément les angles α & β, dont les tangentes seront exprimées ainsi:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\Phi - v}{\sin\Phi + \sqrt{(mm - vv)}}, \quad \& \quad \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\Phi - v}{\sin\Phi + \sqrt{(nn - vv)}};$$

mais les formules irrationelles seront:

$$\sqrt{(mm - \cos(\alpha + \Phi)^2)} = v \sin\alpha - \cos\alpha \sqrt{(mm - vv)},$$
$$\sqrt{(nn - \cos(\beta + \Phi)^2)} = v \sin\beta - \cos\beta \sqrt{(nn - vv)},$$

d'où l'équation différentielle provient:

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n \sin\beta \, (v \sin\alpha - \cos\alpha \sqrt{(mm - vv)})}{m \sin\alpha \, (v \sin\beta - \cos\beta \sqrt{(nn - vv)})};$$

où les valeurs trouvées ci-dessus étant substituées donnent

dm

$$\frac{dm}{dn} = \frac{n}{m} \cdot \frac{mm - v \cos \phi + \sin \phi \sqrt{(mm - vv)}}{nn - v \cos \phi + \sin \phi \sqrt{(nn - vv)}}.$$

44. Cette équation ne se trouve dans aucune liaison avec celle-ci: $\frac{dm}{dn} = \frac{m - 1}{n - 1}$, que Newton a cru être la véritable: & il est à présent très clair que, quand même cette loi seroit la véritable, il ne s'ensuivroit nullement que la destruction des couleurs d'iris fût toujours combinée avec le cas où les rayons transmis sont paralleles aux incidens. On voit plutôt que ces deux cas n'ont aucune connexion entr'eux, quelle que soit la véritable loi de la réfraction des rayons différemment réfrangibles: & la Loi Newtonienne pourroit être vraie, nonobstant la diversité de ces deux cas, que M. Dollond semble avoir cru nécessairement liés entr'eux.



SUR

SUR LES AVANTAGES DES VERRES OBJECTIFS COMPOSÉS DE DEUX VERRES SIMPLES.

PAR M. L. EULER.

I.

Quand je considere bien la construction des verres objectifs formés de deux especes différentes de verre pour détruire, tant la dispersion des couleurs, que la confusion causée par l'ouverture, j'en trouve l'exécution assujettie à tant de difficultés, qu'on n'y sauroit presque jamais réussir; & quand même on réussiroit, je doute fort que les avantages fussent si importans, qu'on s'imagine. Je pose en fait, qu'on ait découvert deux especes de verre, à l'une desquelles convienne la raison de réfraction 31 : 20 & à l'autre 3 : 2, quoique je doute fort que la différence puisse aller si loin: & la figure ci-jointe représente un tel objectif composé, dont la distance de foyer seroit de 100 pouces. Le premier verre AB est également convexe des deux côtés, le rayon de la convexité étant d'un pouce & demi; l'autre CD est concave des deux côtés, le rayon de sa face d'avant étant aussi d'un pouce & demi, & de celle de derriere de $1\frac{9}{10}$ pouce. Le premier AB qu'on doit tourner vers l'objet, est fait de l'espece de verre qui a la moindre réfraction, & le concave CD de l'autre espece à laquelle convient la plus grande réfraction. Pl. VIII. Fig. 3.

2. Le

2. Le foyer du verre convexe étant employé tout seul, ne tomberoit qu'à la distance d'1½ pouce environ; mais l'autre verre concave, dont la distance négative de foyer est à peu près la même, l'étend à 100 pouces. Or il faut bien remarquer, que tous les défauts qui pourroient se trouver dans ces verres, sont multipliés dans la même raison, & deviennent par conséquent 75 fois plus sensibles. Quoique l'art de polir les verres soit porté à un assez haut degré de perfection, il est pourtant impossible d'y éviter tous les défauts, & l'on se contente, pourvu que ces erreurs ne soient pas trop sensibles. Mais, lorsqu'elles sont rendues 75 fois plus grandes, on comprend aisément que, quelques petites qu'elles soient en elles-mêmes, leur effet doit devenir par cette multiplication tout à fait insupportable. Aussi peut-on bien soutenir, que même le plus habile artiste, qui s'y appliqueroit avec tous les soins imaginables, ne réussiroit peut-être pas une seule fois dans cent essais & plus; & alors il s'en faudra encore beaucoup que cet ouvrage réponde parfaitement à la Théorie.

3. Mais supposons que l'Artiste ait parfaitement bien réussi: cependant les avantages ne seront pas si considérables qu'on auroit lieu de s'y attendre. La petitesse des spheres, d'où les faces de ces verres sont prises, permettra à peine une ouverture d'un pouce en diametre, & partant cet objectif ne sauroit grossir les objets que 30 fois tout au plus; à cet égard il ne seroit donc pas préférable à un objectif ordinaire de 4 pieds de foyer: & il paroit encore fort douteux, si l'avantage, que cet objectif est délivré de la dispersion des couleurs, compense suffisamment l'augmentation dans la distance du foyer. Il est bien vrai qu'en augmentant les mesures de ces objectifs, les avantages sur les ordinaires deviennent plus considérables, puisqu'un tel objectif de 500 pouces de foyer admettroit une ouverture de 5 pouces en diametre, laquelle répond à un objectif simple du même foyer. Mais l'exécution rencontrera d'autant plus d'obstacles, plus la distance de foyer doit être grande.

4. Par

4. Par ces raiſons j'oſe aſſurer, que les objectifs de M. Dollond, dont le dernier Volume des Tranſactions parle avec les plus grands éloges, ne ſont pas conſtruits ſelon les regles que je viens d'établir & de démontrer. On y vante en particulier la grande ouverture que ces objectifs admettent, ce qui ne ſauroit convenir à la grande courbure des faces. Au reſte, de la maniere équivoque & myſtérieuſe dont M. Dollond parle de cette découverte, il ſemble qu'il a établi une beaucoup plus grande inégalité entre la convexité & la concavité de ſes deux verres. Après avoir dit, que les réfractions de ſes deux eſpeces de verre different comme 2 à 3, ce qui ne ſauroit avoir aucun ſens intelligible, il ajoute enſuite, que les foyers de ſes deux verres ſuivent la même proportion; de ſorte que, ſi le foyer du verre convexe étoit à deux pieds, celui du concave ſeroit de trois pieds, & partant le foyer de ces deux verres combinés tomberoit à la diſtance de 6 pieds.

5. De là je tire cette facheuſe conſéquence, que ſi ma Théorie eſt vraie, il eſt abſolument impoſſible que ces objectifs compoſés de M. Dollond ayent été délivrés de la diſperſion des couleurs, comme M. Short le témoigne très poſitivement. Je ne voudrois pas auſſi douter de la juſteſſe des expériences, ſur leſquelles ce grand témoignage eſt fondé, ſi je voyois la moindre poſſibilité de concilier ce prétendu fait avec aucune hypotheſe ſur la réfraction, quelque bizarre qu'on l'imagine: & outre cela, les expériences mêmes de M. Dollond, par leſquelles il a comparé la réfrangibilité & la diſperſion des couleurs cauſée par ſes deux eſpeces de verre, ne contiennent rien qui ne ſoit très bien d'accord avec ma Théorie. Cette conſidération m'a bien embarraſſé, & il m'eſt auſſi difficile de révoquer en doute des témoignages ſi ſolennels, que d'abandonner une Théorie, qui me paroit parfaitement bien fondée, pour embraſſer un ſentiment auſſi contraire à toutes les loix établies dans la Nature, qu'il eſt bizarre & révoltant. Dans cette ſituation, on ne me blâmera pas d'avoir fait tant d'efforts, peut-être inutiles, pour concilier tout ce qu'on nous annonce ſur les objectifs de M. Dollond, avec les principes qui me paroiſſent très ſolidement établis.

6. D'a-

6. D'abord je tombe d'accord ſur un article, qui me paroit le plus eſſentiel, & je crois que les deux verres que M. Dollond a joints enſemble, ont été ſi heureuſement travaillés, qu'ils n'ont produit aucune confuſion rélative à l'ouverture des verres, de ſorte qu'ils en ont pu recevoir une auſſi grande, que leur grandeur le permettoit. Or la confuſion cauſée par une trop grande ouverture eſt un défaut ſi conſidérable dans les objectifs ordinaires, qu'elle entraine toujours la diſperſion des couleurs. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à donner une trop grande ouverture à un objectif ordinaire d'une lunette, & l'on remarquera toujours, qu'avec la confuſion qui en réſulte proprement, le défaut des couleurs devient auſſi inſupportable, pendant qu'on n'avoit pas lieu de s'en plaindre, tant que l'ouverture étoit aſſez petite. Auſſi voyons-nous que les Aſtronomes, quand ils ſont incommodés par la diſperſion des couleurs, rétréciſſent l'ouverture de leurs objectifs avec un très bon ſuccès.

7. Cependant je ne nie pas que les deux défauts des objectifs ordinaires, ſavoir la confuſion de l'image & la diſperſion des couleurs, ne different très eſſentiellement; mais lorſque les rayons qui paſſent par les extrémités d'un objectif, repréſentent les images dans un autre lieu, que ceux qui paſſent par le milieu, la diverſe réfrangibilité des rayons dont les deux images ſont affectées, devient d'autant plus inſupportable. Tant que les images formées par les rayons qui paſſent par le milieu & les extrémités du verre, tombent à peu près au même lieu, l'oculaire a la propriété de redreſſer le défaut de la diverſe réfrangibilité des rayons, en les ramenant à la même direction. Or ce remede ne ſauroit plus avoir lieu, quand à cauſe d'une trop grande ouverture les images des objets ſont étendues par un trop grand eſpace, puiſqu'alors les diverſes couleurs deviennent trop divergentes, pour que l'oculaire les puiſſe ranger ſur une même direction.

8. Donc, dès qu'on eſt en état de procurer aux objectifs ce degré de perfection, que tous les rayons tranſmis par leur ouverture ſont réunis aux mêmes points, un tel objectif eſt non ſeulement déli-

vré du défaut de la confusion rélative à l'ouverture, mais aussi la dispersion des couleurs n'y sera presque plus sensible. Par cette raison, je ne doute nullement, que ce ne soit le cas des objectifs, que M. Dollond vient d'exécuter avec un si bon succès; & je crois que les deux verres qu'il joint ensemble, ont cette propriété, que la confusion de l'image en est parfaitement anéantie. Il suffisoit de réussir à cet égard pour réduire presque à rien aussi la dispersion des diverses couleurs, sans que les deux verres remédient actuellement à la diverse réfrangibilité des rayons. La diversité du verre qu'il y emploie, peut bien diminuer tant soit peu la diverse réfrangibilité; mais je crois que s'il faisoit ses deux verres de la même matiere, il en retireroit presque les mêmes avantages.

9. Je mets donc le grand mérite de cette importante découverte de M. Dollond uniquement dans l'adresse avec laquelle il a su travailler deux verres en sorte, que l'un détruisît exactement la confusion que l'autre produiroit par son ouverture, sans que la diverse réfrangibilité y entre en considération. Je crois même que cette découverte est beaucoup plus importante, que si l'on réussissoit un jour à composer des objectifs de deux différentes especes de verre, qui fussent entierement exempts de l'un & de l'autre défaut. La grande courbure qu'on seroit obligé de donner aux faces de ces verres, mettroit toujours des bornes trop étroites à leur ouverture: & ceux de M. Dollond mériteroient toujours la préférence. Donc, tant s'en faut que je voulusse les dépouiller des grands éloges, qu'on en a fait, que je les regarde plutôt comme la plus excellente découverte qu'on puisse faire dans la Dioptrique.

10. J'abandonnerai donc ici l'idée que j'ai eue autrefois de remédier à la différente réfrangibilité des rayons, en employant diverses matieres réfringentes; & je bornerai à présent mes recherches à réduire à rien la seule confusion causée par l'ouverture des verres, puisque la dispersion des couleurs devient en même tems assez insensible. Or je remarque qu'on peut arriver à ce but, en n'employant

qu'une seule espece de verre. & qu'il est toujours possible de construire deux verres en sorte, qu'étant joints ils anéantissent tout à fait la confusion que causeroit d'ailleurs leur ouverture. Par ce moyen on obtiendra des objectifs aussi excellens qu'on puisse souhaiter, où même le défaut de la dispersion des couleurs n'est point à craindre; & comme il y a une infinité de manieres de former de tels verres objectifs, on aura la commodité d'en choisir pour chaque cas celle qu'on jugera la plus convenable: on est aussi le maître d'éviter les grandes courbures autant qu'on veut, pour rendre ces verres susceptibles de la plus grande ouverture.

11. Je ne m'arrêterai pas au calcul assez ennuyeux, par lequel on détermine la diffusion de l'image causée par l'ouverture, ayant déjà autrefois développé cette analyse; & partant je me contenterai d'en rapporter la formule qui conduit à la solution de la question que j'ai en vue. Je considere donc en général deux verres quelconques, AB & CD, que je regarde comme convexes des deux côtés, & je pose les rayons des faces A*a*B $= a$; A*b*B $= b$; C*c*D $= c$; C*d*D $= d$. Soit ensuite la raison de réfraction de l'air dans le verre comme $m : 1$, qu'on suppose communément comme 31 à 20, de sorte que $m = \frac{31}{20}$. Ces deux verres étant joints ensemble, que leur foyer commun tombe en K, de sorte que la distance derriere les verres soit dK $= k$, que je regarde comme donnée; & il s'agit de déterminer l'espece de ces deux verres, ou bien les rayons a, b, c, d en sorte, que tous les rayons se réunissent au même point K, quelque grande que soit l'ouverture; je ne parle que des rayons d'une certaine espece, sans avoir égard à la diverse réfraction des rayons colorés.

Pl. VIII. Fig. 4.

12. Pour cet effet, je forme d'abord les deux quantités $p = \frac{1}{\lambda}(\lambda - 1)k$ & $q = -(\lambda - 1)k$, où λ marque un nombre pris à volonté, & de là j'exprime les quatre rayons en sorte qu'il soit:

$a =$

$$a = \frac{m-1}{\mu}p;\ b = \frac{m-1}{1-\mu}p;\ c = \frac{m-1}{\nu}q;\ d = \frac{m-1}{1-\nu}q,$$

où les nombres μ & ν doivent être déterminés par les formules suivantes:

$$\mu = \frac{m(2m+1)+my}{2(m+2)} \quad \nu = \frac{m(2m+1)-4\lambda(mm-1)+mz}{2(m+2)},$$

dont les nombres y & z doivent être pris en forte qu'ils satisfassent à cette équation:

$$zz = (4m-1)(\lambda^3-1) + 4(m-1)^2\lambda(\lambda-1) + \lambda^3 yy.$$

Ici il est évident, que les deux nombres λ & y peuvent être pris à volonté, pourvu qu'ils fournissent des valeurs réelles pour z: d'où résulte une variété infinie dans les verres, qui seront tous également propres à notre dessein.

13. A l'égard du nombre y, je remarque d'abord, qu'il est bon de le prendre en sorte qu'il devienne $\mu = \frac{1}{2}$, afin que les deux faces du premier verre AB obtiennent la même figure; ce qui en facilite non seulement l'exécution, mais leurs faces deviendront aussi peu courbées qu'il est possible; ce qui est un grand avantage pour procurer une plus grande ouverture. Posons donc $\mu = \frac{1}{2}$ pour avoir $a = b = 2(m-1)p$, & puisque $m + 2 = 2mm + m + my$, nous aurons $y = \frac{-2(mm-1)}{m}$.

14. Supposons maintenant $m = \frac{31}{20} = 1{,}55$, & ayant pris $p = \frac{1}{\lambda}(\lambda-1)k$, & $q = -(\lambda-1)k$, nous aurons d'abord pour les rayons des faces:

$$a = b = \tfrac{11}{10}p;\ c = \frac{0{,}55}{\nu}q \quad \& \quad d = \frac{0{,}55}{1-\nu}q.$$

En-

Enſuite on trouve:

$$\begin{array}{ccccc} & 9,9518573 & & 9,8977046 & & 9,3390734 \\ v = & 0,895070 & - & 0,790141\,\lambda & + & 0,218310\,z, \end{array}$$

& pour la valeur de z cette équation:

$$zz = 8,474933\,\lambda^3 + 1,21\,\lambda^2 - 1,21\,\lambda - 5,2;$$

où je remarque que le nombre λ doit être pris plus grand que 0,855, pour ne pas tomber dans le cas où z deviendroit imaginaire. Dans les autres cas on trouve toujours deux valeurs pour z, l'une affirmative, l'autre négative, dont il convient de prendre celle-ci, qui donne pour v une valeur plus approchante de $\frac{1}{2}$, afin que les faces du verre de derriere ne deviennent pas trop courbes.

15. Pour mieux connoitre toutes ces eſpeces de verres objectifs compoſés, je développerai les cas ſuivans:

λ	zz	$0,895070$ $-0,790141\,\lambda$	$0,218310\,z$	v
0,9	0,869327	+0,183943	0,203547	0,387490
1,0	3,274933	+0,104929	0,395070	0,499999
1,1	6,213236	+0,025915	0,544167	0,570082
1,2	9,735084	−0,053099	0,681150	0,628051
1,3	13,891326	−0,132113	0,813664	0,681551
1,4	18,732812	−0,211127	0,944876	0,733749
1,5	24,310391	−0,290141	1,076390	0,786249
1,6	30,674913	−0,369155	1,209108	0,839953
1,7	37,877228	−0,448169	1,343577	0,895408
1,8	45,968185	−0,527183	1,480137	0,952954
1,9	54,998634	−0,606197	1,619010	1,012813
2,0	65,019424	−0,685211	1,760334	1,075123
2,1	76,081405	−0,764225	1,904200	1,139975

2,2

2,2	88,235427	−0,843239	2,050666	1,207427
2,3	101,512339	−0,922253	2,199761	1,277508
2,4	116,022991	−1,001267	2,351502	1,350235
2,5	131,758232	−1,080281	2,505891	1,425610
2,6	148,788912	−1,159295	2,662923	1,503628
2,7	167,165880	−1,238309	2,822586	1,584277
2,8	186,939986	−1,317323	2,984863	1,667540
2,9	208,162080	−1,396337	3,149737	1,753400
3,0	232,432698	−1,475351	3,328300	1,852949

16. Ayant trouvé ces nombres v, j'en ai tiré les déterminations suivantes pour les rayons des quatre faces de nos deux verres.

λ	$a = b$	c	d
0,9	$-0,122222k$	$+0,141939k$	$+0,089794k$
1,0	$0,000000k$	$0,000000k$	$0,000000k$
1,1	$+0,100000k$	$-0,096455k$	$-0,127931k$
1,2	$+0,183333k$	$-0,175145k$	$-0,295732k$
1,3	$+0,253846k$	$-0,242095k$	$-0,518136k$
1,4	$+0,314286k$	$-0,299830k$	$-0,826294k$
1,5	$+0,366666k$	$-0,349762k$	$-1,286544k$
1,6	$+0,412500k$	$-0,392879k$	$-2,061895k$
1,7	$+0,452941k$	$-0,429972k$	$-3,680970k$
1,8	$+0,488888k$	$-0,461722k$	$-9,352550k$

Je ne continue pas cette table, parce que les valeurs du rayon d deviendroient trop grandes, & que le verre de derriere se changeroit en ménisque; or on sait que l'usage des ménisques, aussi bien que leur exécution, est assujettie à de grandes difficultés.

17. Nonobstant cela, nous avons un assez grand nombre d'especes différentes de tels objectifs composés, qui sont tous également doués de cette excellente propriété, que, quelque grande que

ſoit leur ouverture, il n'en réſulte aucune confuſion. La diverſité de ces eſpeces dépend du rapport entre les rayons des quatre faces; donc, pour la mieux mettre devant lès yeux, poſons pour le premier verre AB les rayons $a = b = 1$, & ceux de l'autre verre ſeront:

c	d
−0,964552	−1,279314
−0,955336	−1,613124
−0,953707	−2,041144
−0,954005	−2,629118
−0,953896	−3,508756
−0,952434	−4,998532
−0,949288	−8,126817
−0,944432	−19,130213

d'où l'on voit que, combinant avec un verre également convexe des deux côtés, dont le rayon ſoit $= 1$, un verre concave des deux côtés, dont le rayon de l'une de ſes faces eſt $= 0,954$, on ſatisfera à la condition requiſe, pourvu que le rayon de l'autre face concave ſe trouve entre les limites 2 & $3\frac{1}{2}$; ce qui eſt un cas très avantageux pour la pratique.

18. Il s'agit donc de choiſir, parmi ces eſpeces, la plus convenable pour la pratique; & d'abord il faut donner l'excluſion à celles qui renferment de trop petits rayons, pour ne pas tomber dans l'embaras mentionné ci-deſſus, où les moindres défauts dans la figure ſont de la plus grande conſéquence; outre que ces verres n'admettent qu'une ouverture fort bornée. Par cette raiſon, je rejetterai les eſpeces où λ eſt plus petit que 1,4, &, puiſque cette eſpece a cet avantage, comme nous venons de voir, que la premiere face du ſecond verre ne ſubit preſque aucun changement, quoiqu'on change la valeur du nombre λ, cette eſpece eſt ſans doute la plus propre pour la pratique. Enſuite, cette eſpece eſt ſuſceptible d'une aſſez grande ouverture, quand même on n'y admettroit que des arcs de 20 degrés; alors le diametre de l'ouverture pourroit être pris la dixieme partie de la diſtance de foyer k, de ſorte qu'un tel verre de 10 pieds de foyer pourroit avoir l'ouverture d'un pied, laquelle ſuffit pour groſſir les objets 400 fois en diametre, moyennant un oculaire de $\frac{1}{40}$ pieds, ou de $\frac{3}{10}$ pouce.

19. Or de trop petits oculaires ſont auſſi ſujets à des incommodités, ſurtout dans les grandes multiplications. Donc, ſi dans le

cas

cas précédent on ne vouloit employer qu'un oculaire d'un demi-pouce environ de foyer, pour grossir seulement 200 fois, une ouverture de 6 pouces seroit suffisante; &, puisqu'elle n'embrasseroit que des arcs de 10°, on auroit encore moins à craindre quelque confusion. Car il faut se souvenir, que le calcul par lequel j'ai déterminé la confusion, est fondé sur une approximation qui s'écarte d'autant moins de la vérité, plus les arcs contenus dans l'ouverture sont petits; & c'est aussi sans doute une grande raison pourquoi il est presque impossible de réussir dans les verres que j'avois proposés autrefois. Cependant, dans le cas présent, il n'y a aucun doute qu'on ne pût bien admettre une plus grande ouverture que de 6 pouces, & alors on profiteroit d'autant plus dans la clarté, ce qui est encore un très grand avantage.

20. Après ces recherches, la conjecture que j'ai hazardée ci-dessus sur la nouvelle construction des objectifs de M. Dollond me paroit portée au plus haut degré de certitude. On n'a qu'à bien considérer toutes les circonstances qu'il allegue, pour se convaincre que ses deux verres sont construits sur une des especes que je viens d'exposer, & en particulier sur celle qui répond au nombre $\lambda = 1,5$. D'abord il s'explique assez clairement, sur ce que le premier verre tourné vers l'objet étoit convexe & l'autre concave; & ensuite, par un raisonnement fort obscur & apparemment peu fondé, il nous découvre, que le rapport entre les distances de foyer du verre convexe & concave étoit comme 2 à 3: or la valeur de $\lambda = 1,5$ donne le même rapport. Enfin, quand il dit, que ce n'est qu'après plusieurs essais qu'il a découvert l'espece du verre concave qui détruit toute confusion, on comprend aisément, comment un grand nombre d'expériences l'a pu conduire à la juste proportion entre les deux faces du verre concave.

21. Cependant, puisque la réfraction du verre concave étoit un peu plus grande que celle du convexe, la proportion entre les rayons des faces aura été un peu différente de celle de mes formules, & les rayons des concavités auront été tant soit peu plus grands. Mais

 j'ose

j'ose assurer hardiment que la diversité du verre n'a rien contribué à la perfection de ces objectifs, & qu'il auroit également réussi en n'employant que la même espece de verre. La diminution dans la dispersion des couleurs, que cette diversité du verre peut produire en posant $\lambda = 1,5$, est trop petite, pour qu'elle puisse devenir sensible: puisque, pour faire évanouir cette dispersion, il faudroit que la valeur de λ fût plus petite que 1,02, comme il est aisé de le démontrer: & de là il s'ensuit que, dans les verres de M. Dollond, la dispersion des couleurs ne sauroit être diminuée que de la douzieme partie tout au plus, quelque grande que soit la différence entre les réfractions de ses deux especes de verre.

22. On ne sauroit donc accorder aux objectifs de M. Dollond qu'une espece de perfection, qui consiste dans la destruction de la confusion causée par l'ouverture du verre, pendant que l'autre défaut des objectifs ordinaires, savoir la dispersion des couleurs, y demeure presque dans son entier. Pour l'autorité de M. Short, qui assure que ces objectifs ne causent aucune dispersion des couleurs, tant s'en faut qu'elle me soit suspecte, que je la regarde plutôt comme une preuve incontestable du sentiment que j'ai avancé ci-dessus: qui porte, que la dispersion des couleurs n'est à craindre, que lorsqu'elle est accompagnée de la confusion qui est causée par l'ouverture des verres. Dès qu'on réussit à faire évanouir cette confusion, la diverse réfrangibilité des rayons ne trouble presque plus la représentation des objets: non qu'elle soit détruite en effet; mais l'oculaire, en rangeant les divers rayons sur la même direction, nous en cache la diversité.

23. Je suis si convaincu de la vérité de ce sentiment, que j'ose provoquer à l'expérience pour prouver, que les objectifs de M. Dollond sont aussi peu exemts des effets de la diverse réfrangibilité des rayons, que les ordinaires. On n'a qu'à examiner dans une chambre obscure la distance du foyer, qui est formé par les rayons rouges & violets, & on y remarquera presque la même différence que Newton a observée dans les verres ordinaires. Mais, en employant un tel objectif

jectif

jectif dans une lunette, c'est à l'oculaire qu'on est redevable de ce que cette dispersion devient insensible. Après ces réflexions, il est d'autant plus remarquable que M. Dollond ait été conduit à une découverte si importante par des raisonnemens tout à fait contraires à la nature des choses. Les expériences préalables qu'il a faites, avec des coins formés de différentes especes de verre, n'y pouvoient avoir aucune influence, quoiqu'elles fussent très curieuses, & qu'elles prouvent suffisamment la diverse réfraction des différentes especes du verre.

24. L'excellent effet que produisent les verres objectifs de M. Dollond, m'est donc aussi un sûr garant, que les objectifs que je viens de décrire seront doués de la même qualité, & qu'étant délivrés du défaut de la confusion, ils nous procurent aussi l'avantage, que la dispersion des couleurs ne nous incommodera plus, quand on les joindra avec un bon oculaire. Je crois même que c'est le seul moyen de porter les lunettes au plus haut degré de perfection dont elles sont susceptibles, & qu'il faut renoncer à la construction d'objectifs tels qu'ils redressent la diverse réfrangibilité des rayons de lumiere, puisque d'autres inconvéniens très importans n'en seroient point séparables. Je finirai donc ces recherches par quelques devis de telles Lunettes parfaites, tant pour diriger les Artistes dans leur construction, que pour faire sentir les avantages qu'on en peut attendre.

I Devis.

D'un objectif de 5 pouces de foyer.

Le premier verre AB tourné vers les objets sera également convexe des deux côtés, le rayon étant $1\frac{57}{100}$ pouce. L'autre verre CD sera concave des deux côtés, mais inégalement, Fig. 9.

le rayon étant de la face { de devant $1\frac{59}{100}$ pouce,
de derriere $4\frac{13}{100}$ pouces.

Il semble que cet objectif admettra bien une ouverture de $\frac{6}{10}$ pouce, & partant il pourra être employé à grossir 20 fois les objets en diametre:

pour

pour cet effet il faudra prendre un oculaire d'un quart de pouce de foyer. Un oculaire concave de ce foyer produira le même effet, & présentera les objets debout. Une telle petite lunette aura toujours son mérite; mais l'avantage sera d'autant plus grand, plus on augmentera la distance de foyer.

II Devis,
d'un objectif de 10 pouces de foyer.

Prenant le premier verre AB également convexe des deux côtés, le rayon de chaque convexité doit être de $3\frac{14}{100}$ pouces. Pour l'autre verre CD, inégalement concave des deux côtés, on mettra

le rayon de la face { de devant 3 pouces exact:
de derriere $8\frac{28}{100}$ pouces.

Un peu plus qu'un pouce d'ouverture pourra très bien avoir lieu dans cet objectif, & par ce moyen on obtiendra un grossissement de 30 fois en diametre, en employant un oculaire d'un tiers de pouce de foyer. Il y a toute apparence qu'une telle lunette découvrira assez distinctement les Satellites de Jupiter.

III Devis,
d'un objectif de 20 pouces de foyer.

Pour le premier verre AB, également convexe des deux côtés, le rayon de chaque face doit être pris de $6\frac{28}{100}$ pouces. Or, pour l'autre verre CD concave des deux côtés, on doit prendre

le rayon de sa face { de devant de 6 pouces,
de derriere de $16\frac{53}{100}$ pouces.

A ces verres on pourra très bien donner une ouverture de deux pouces & au delà; cependant je ne les voudrois employer que pour un grossissement de 50 fois en diametre, pour obtenir d'autant plus de clarté. Un oculaire de $\frac{2}{5}$ pouce de foyer sera propre à ce dessein. Les Satellites de Jupiter doivent paroitre très distinctement à travers une telle Lunette.

IV

IV Devis,
d'un objectif de 50 pouces de foyer.

Le premier verre AB étant également convexe de ses deux côtés, le rayon doit être de $15\frac{71}{100}$ pouces.

Pour l'autre verre CD, concave des deux côtés, on doit prendre

le rayon de sa face { de devant $14\frac{98}{100}$ pouces.
de derriere $41\frac{31}{100}$ pouces.

Trois pouces d'ouverture ne seront certainement pas trop pour cet objectif, qui pourroit peut-être bien en souffrir une de 5 pouces: & partant il sera très propre à grossir les objets 100 fois, en le combinant avec un oculaire d'un demi-pouce de foyer. Une telle lunette de 4 pieds & un quart environ, produira donc un meilleur effet qu'une ordinaire de 30 pieds.

V Devis,
d'un objectif de 100 pouces de foyer.

Le rayon de l'une & de l'autre face convexe du premier verre AB doit être pris de $31\frac{43}{100}$ pouces.

L'autre verre concave des deux côtés doit être construit de sorte que le rayon de sa face { de devant $29\frac{98}{100}$ pouces,
de derriere $82\frac{63}{100}$ pouces.

Ce sera peu de chose que de donner à ces verres une ouverture de 6 pouces, & de les employer pour grossir 200 fois, en les joignant avec un oculaire d'un demi-pouce. Or, quand même on voudroit prendre un oculaire de trois quarts de pouce, peut-être que cette lunette produiroit un meilleur effet que même les plus longues dont les Astronomes se sont servis jusqu'ici.

VI Devis,
d'un objectif de 200 pouces de foyer.

Le premier verre AB sera formé de ses deux côtés également convexe, en prenant le rayon de $62\frac{86}{100}$ pouces.

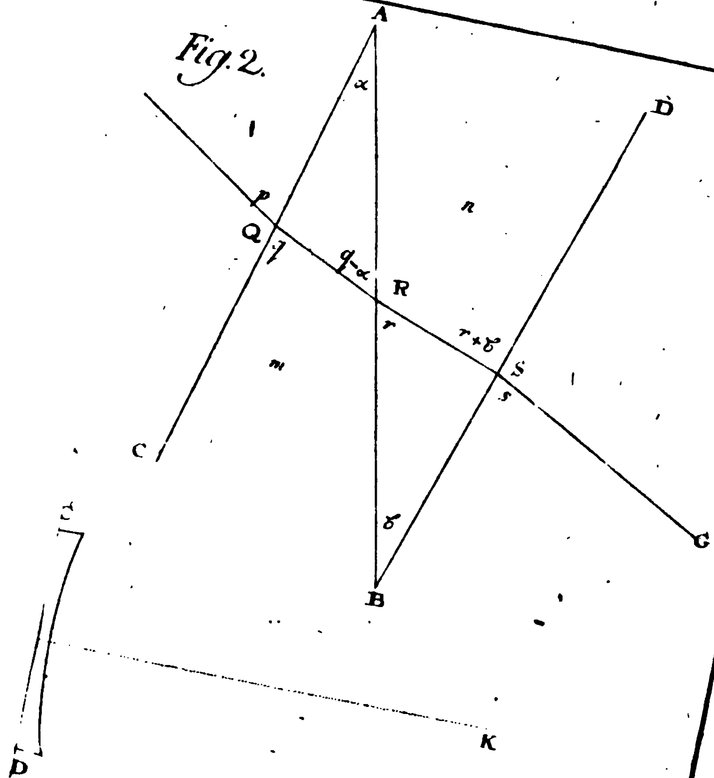
L'au-

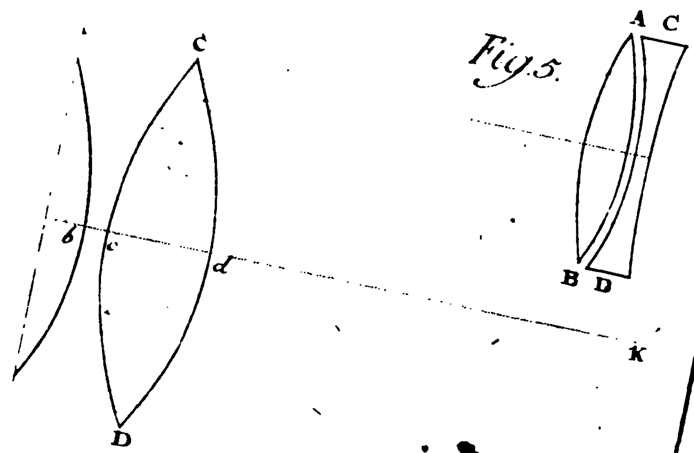
L'autre verre CD, concave des deux côtés, aura les meſures ſuivantes: il faut prendre le rayon de ſa face { de devant $59\frac{87}{100}$ pouces, de derriere $165\frac{38}{100}$ pouces.

Qu'on faſſe ces deux verres ſi grands, qu'ils ſoient ſuſceptibles d'une ouverture de 10 pouces, pour les employer à produire un groſſiſſement de 300 fois en diametre, à quoi un oculaire de $\frac{2}{3}$ pouce eſt propre. Il ſemble qu'on puiſſe bien aſſurer qu'une telle Lunette, ſoigneuſement exécutée, devroit ſurpaſſer tout ce qu'on a découvert juſqu'ici par le moyen des plus longues Lunettes. Il paroit encore douteux, ſi jamais une lunette a groſſi 300 fois, ſans parler de la clarté & du degré de diſtinction, en quoi celle-ci ſera de beaucoup préférable.

Si l'on vouloit doubler ces dernieres meſures pour former un objectif de 400 pouces de foyer, & ménager une ouverture de 15 pouces en diametre, un oculaire d'un pouce de foyer groſſiroit 400 fois les objets. Une telle Lunette ne ſeroit que de 34 pieds, & partant encore aſſez commode à manier, pendant que les très longues lunettes ordinaires ſont preſque inutiles à cet égard.

RE-


Fig. 2.
A
α
D
p
Q
q
q−α
R
n
r
r+δ
S
s
m
C
δ
G
B
K
D


Fig. 5.
A
C
B
D
C
b
c
d
D
K

REMARQUES SUR L'EFFET DU FROTTEMENT DANS L'ÉQUILIBRE. (*)

PAR M. L. EULER.

I.

Il semble d'abord, que le frottement ne regarde en aucune maniere l'état d'équilibre des corps, & que son effet est nécessairement attaché au mouvement. Aussi voyons-nous que les Auteurs, tant qu'ils expliquent les loix de l'équilibre, ne font aucune mention du frottement, & qu'ils n'en tiennent compte que lorsqu'ils traitent du mouvement. Cependant, pour qu'un corps soit mis en mouvement, il ne suffit pas que les forces dont il est sollicité ne soient plus en équilibre, mais il faut que l'excès soit capable de vaincre le frottement. Donc un corps demeure en repos ou en équilibre, non seulement tant que les forces dont il est sollicité se tiennent en équilibre, mais aussi quand l'équilibre des forces est troublé, pourvu que l'excès ne soit pas assez grand pour vaincre le frottement. D'où il est évident, que le frottement influe beaucoup sur l'équilibre des corps, entant que l'état d'équilibre ne differe pas de l'état de repos; & qu'on dit, qu'un corps se trouve en équilibre, tant qu'il demeure en repos.

2. Considérons le cas où le poids P repose sur le plan incliné AB, étant retiré selon la direction DE parallele au plan par une force suffisante; & l'on prouve, que cette force DE doit être au poids P, com- Planche IX. Fig. 1.

(*) Lu le 16 Mars 1758.

comme la hauteur AC est à la longueur AB du plan. S'il n'y avoit point de frottement, ce seroit sans doute l'unique cas de l'équilibre, en sorte que, si la force DE étoit moindre que $\frac{AC}{AB}$. P, le poids P descendroit sur le plan; & si elle étoit plus grande, le poids monteroit vers A. Mais, à cause du frottement, le poids P demeurera en repos, quoique la force DE soit ou plus grande ou plus petite que $\frac{AC}{AB}$. P, pourvu que la différence soit plus petite qu'il ne faudroit pour vaincre le frottement. Donc, si nous posons le frottement $= F$, tant que la force DE subsiste entre ces deux limites $\frac{AC}{AB} . P + F$ & $\frac{AC}{AB} . P - F$, le poids P demeurera toujours en repos.

3. Or l'expérience nous a donné à connoitre, que le frottement tient toujours un certain rapport à la pression du corps contre le plan, qui est pour la plûpart comme 1 à 3. Donc, puisque la pression du poids P sur le plan incliné est $= \frac{BC}{AB} . P$, en prenant pour le dit rapport en général comme λ à 1, on aura le frottement $F = \lambda P . \frac{BC}{AB}$, où il y a à peu près $\lambda = \frac{1}{3}$. Et partant, le poids P demeurera en repos, tant que la force DE subsiste entre ces deux limites $\frac{AC + \lambda . BC}{AB} P$ & $\frac{AC - \lambda . BC}{AB} P$. Le frottement est donc cause, que l'état d'équilibre admet une grande étendue par rapport à la force DE: d'où l'on peut dire que la force requise DE pour maintenir le corps P en équilibre, est indéterminée.

4. S'il s'agit seulement d'empêcher que le corps P ne glisse en bas, il suffit d'employer une force DE, qui ne soit pas moindre que $\frac{AC - \lambda BC}{AB} P$. Donc, si AC est égal à $\lambda . BC$, ou moindre, le corps

corps n'a pas besoin de soutien, & il demeurera de soi-même en son lieu: mais, si $AC > \lambda \,.\, BC$, le corps doit être retenu, & s'il étoit attaché en E par le fil DE, ce fil éprouveroit un effort égal à $\frac{AC - \lambda \,.\, BC}{AB} \,.\, P$, qui est la plus petite force capable d'arrêter le corps. Car, quoiqu'une plus grande force l'arrête également, il est naturel que le fil DE ne soutienne que la plus petite; puisque, s'il est assez fort pour résister à cette plus petite force, il n'y a pas à craindre qu'il soit rompu. D'où l'on voit que, s'il faut déterminer la force dont le fil DE est tendu par le poids P, quoique cette question appartienne à la doctrine de l'équilibre, on ne la sauroit résoudre sans avoir égard au frottement.

5. Mais je me propose d'examiner ici un cas plus curieux: je suppose le poids P attaché à une corde, qui soit appliquée autour d'un corps fixe ALMNB d'une figure quelconque, où il s'agit de déterminer la force dont l'autre bout de la corde BD doit être tiré, afin que le poids P soit maintenu en repos. Or d'abord, s'il n'y avoit point de frottement, & que la corde pût librement glisser autour du corps ALMNB, il est évident que la force dont on doit tirer le bout de la corde BD, devroit être égale au poids P, de sorte que, si cette force étoit moindre, le poids P descendroit en bas, & si elle étoit plus grande, le poids en seroit élevé. Mais le frottement changera la question; & pour empêcher que le corps P ne descende, une plus petite force à appliquer en D suffira; or il faudra y en appliquer une plus grande qu'au cas précédent, quand on veut faire monter le poids P. Toute autre force contenue entre ces deux limites, maintiendra le poids en repos. Fig. 2.

6. Pour connoitre ces limites, cherchons la plus petite force à appliquer en D, qui puisse encore arrêter le poids P en repos, de sorte que, si elle étoit tant soit peu plus petite, le pods P descendroit actuellement. Il faut donc que cette force soit égale à l'excès du poids P sur tous les obstacles du frottement, qui s'opposeroient la descente

actuelle du poids. Or le frottement dépend en chaque point M, où la corde est appliquée au corps fixe, de la pression dont la corde y est apprimée, en sorte que, si la pression en M étoit $= \Pi$, le frottement y seroit équivalent à une force $= \lambda \Pi$, dont la corde seroit tirée en arriere vers N selon sa propre direction. Mais on ne sauroit déterminer la pression sans supposer connues toutes ces forces du frottement; & partant tout revient à la solution de ce probleme, que je m'en vais développer.

Fig. 3. 7. Partageons toute la corde en élémens infiniment petits & égaux entr'eux, dont deux quelconques soient mM & $M\mu$, qu'on nomme $mM = M\mu = ds$. Soit la pression en M, où je considere comme réunie toute la force dont l'élément mM est apprimé, $= R\,ds$; & le frottement causé par cet élément sera $= \lambda R\,ds$, qu'il faut considérer comme une force appliquée en M suivant la direction $M\mu$, opposée à Mm, puisqu'on peut négliger l'angle que ces deux élémens font ensemble. Cette force diminuera la tension de la corde, de sorte qu'en posant la tension de l'élément $Mm = T$, celle de l'élément $M\mu$ sera $= T - \lambda R\,ds$; or celle-ci étant $= T + dT$, nous aurons $dT = -\lambda R\,ds$, & partant $T = \text{Const.} - \lambda \int R\,ds$. Pour définir cette constante, on n'a qu'à considérer, qu'au commencement en A, où l'intégrale $\int R\,ds$ évanouit, la tension doit être égale au poids P, d'où l'on obtient cette valeur déterminée $T = P - \lambda \int R\,ds$.

8. Concevons en M appliquée une force Mr, égale & opposée à la pression de l'élément Mm, de sorte que cette force soit $Mr = R\,ds$, & il faut qu'elle soit en équilibre avec les autres forces qui agissent sur le point M. Or, à cause de la tension, le point M est tiré selon Mm par la force $= T$, & selon $M\mu$ par la force $T + dT - \lambda R\,ds = T$. Ces deux forces étant donc égales, & la force Mr perpendiculaire, si nous posons le rayon de courbure en $M = r$, l'équilibre exige cette proportion: $R\,ds : T = ds : r$, de sorte que $T = Rr$. Or nous venons de trouver $T = P - \lambda \int R\,ds$, d'où nous tirons par la différentiation $R\,dr + r\,dR = -\lambda R\,ds$, & de

là

là $\frac{dR}{R} = -\frac{dr}{r} - \frac{\lambda ds}{r}$: donc $lR = C - lr - \lambda \int \frac{ds}{r}$. Soit e le nombre, dont le logarithme est $= 1$, pour avoir $Re = T = e^{C - \lambda \int ds : r} = Pe^{-\lambda \int ds : r}$ en déterminant la constante de telle sorte, que la tension en A devienne égale au poids P.

9. Ici il faut remarquer que $\int \frac{ds}{r}$ exprime l'amplitude de l'arc AM, ou bien l'angle MRA, que fait la perpendiculaire MR à la corde en M avec la droite AR, qui est perpendiculaire au commencement A de la corde. Posons donc cet angle ARM $= \phi$, qu'il faut exprimer par l'arc d'un cercle, dont le rayon est $= 1$, qui en est la mesure: & la tension de la corde en M sera $= Pe^{-\lambda\phi}$; la pression y étant $= Pd\phi e^{-\lambda\phi} = Rds = T\frac{ds}{r}$. Par conséquent, si nous nommons l'amplitude de la corde entiere ALMNB $= \gamma$, la tension à l'autre bout B sera $= Pe^{-\lambda\gamma}$, & une telle force appliquée en D sera suffisante pour maintenir le poids P en équilibre; en sorte que, si cette force étoit moindre, le corps P descendroit actuellement. Cependant une force plus grande appliquée en D ne fera que maintenir le poids P en repos, jusqu'à ce qu'elle surpasse la quantité $Pe^{\lambda\gamma}$, où elle fera monter le poids P; donc le poids P demeurera en repos, tant que la force appliquée en D est entre les limites $Pe^{-\lambda\gamma}$ & $Pe^{\lambda\gamma}$. Fig. 2.

10. De là on voit que la figure du corps ALMNB n'entre en considération, que par son amplitude, ou l'angle que font entr'elles les perpendiculaires AC & BC, tirées aux extrémités A & B. Donc, si les deux bouts de la corde en A & B deviennent paralleles, la corde faisant un demi-tour sur le corps fixe, quelle que soit sa figure, de sorte qu'au lieu de la force appliquée en D, on puisse concevoir un poids Q, ces deux poids pourront être en équilibre, quoiqu'ils soient inégaux entr'eux. Puisque l'amplitude dans ce cas est de 180°, dont Fig. 4.

la mesure est la demi-circonférence d'un cercle π, le rayon étant $= 1$, l'équilibre aura lieu, tant que le poids Q n'est pas ou plus petit que $Pe^{-\lambda\pi}$, ou plus grand que $Pe^{\lambda\pi}$. Si nous supposons $\lambda = \frac{1}{3}$, à cause de $\pi = 3,14159$, ces deux limites seront pour le poids Q:

la moindre $= 0,35092\,P$, la plus grande $= 2,84965\,P$.

11. Dans ce cas donc, le plus petit poids Q qui soit capable de soutenir le poids P, n'est qu'environ un tiers du poids P, ou à peu près $= \frac{7}{20}P$: & partant, si la corde étoit attachée en Q à un clou, ce clou ne soutiendroit qu'environ le tiers du poids P. C'est le frottement de la corde sur le demi-tour ALMNB, qui cause cette diminution considérable, puisque sans le frottement le poids Q devroit être égal au poids P. Or, si une si petite force est suffisante pour empêcher la descente du poids P, il en faut employer une d'autant plus grande pour faire monter le poids P: car, pour cet effet, il faut que le poids Q soit plus grand que $2,84965\,P$, ou à peu près que $\frac{20}{7}P$: s'il n'y avoit point de frottement, il suffiroit que le poids Q surpassât le poids P. Donc, s'il s'agit seulement d'arrêter un grand poids, le frottement est d'un grand secours, en diminuant la force requise à ce dessein: mais, d'un autre côté, l'élévation du poids P exige une force d'autant plus grande.

Fig. 5. 12. De là on peut conclure, combien la force requise pour arrêter un poids donné, peut être diminuée par le frottement, quand la corde fait plusieurs tours autour d'un tambour fixe, qu'on peut regarder comme un cylindre, puisque la figure n'y contribue rien. Considérons au lieu de cette force un poids Q attaché à l'autre bout de la corde, dont la direction étant verticale, la corde occupera sur le tambour, ou un demi-tour, comme dans le cas exposé, où nous avions $\gamma = \pi$: ou elle occupera un tour & demi, ce qui donne $\gamma = 3\pi$; ou deux tours & demi, ce qui donne $\gamma = 5\pi$; ou trois tours & demi, ce qui donne $\gamma = 7\pi$, & ainsi de suite. Dans ces cas, le plus petit poids Q capable d'arrêter le poids P, sera pour le premier

Q =

$Q = e^{-\lambda\pi}P$; pour le second $Q = e^{-3\lambda\pi}P$; pour le troisieme $Q = e^{-5\lambda\pi}P$; pour le quatrieme $Q = e^{-7\lambda\pi}P$, & ainsi de suite.

13. Supposons, comme il arrive ordinairement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & nous aurons pour chaque nombre de tours & demi-tours comme la table suivante fait voir.

Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.	Lorsque la corde fait	la force requise pour maintenir le poids P.
$\frac{1}{2}$ tour	0,350920 P	1 tour	0,123145 P
$1\frac{1}{2}$ tour	0,043214 P	2 tours	0,015165 P
$2\frac{1}{2}$ tours	0,005322 P	3 tours	0,001867 P
$3\frac{1}{2}$ tours	0,000655 P	4 tours	0,000230 P
$4\frac{1}{2}$ tours	0,000081 P	5 tours	0,000028 P
$5\frac{1}{2}$ tours	0,000010 P	6 tours	0,000003 P.

La figure représente le cas de quatre tours & demi; donc, si le poids P étoit de 1000 livres, pour empêcher sa descente, il suffiroit d'employer en Q un poids de $\frac{81}{1000}$, ou d'une douzieme partie d'une livre: & s'il y avoit un tour de plus, la centieme partie d'une livre seroit suffisante.

14. Cette diminution dépend principalement de la valeur du nombre λ, que j'ai supposé, conformément à plusieurs expériences, $= \frac{1}{3}$; si ce nombre étoit $= \frac{1}{4}$, comme il arrive quelquefois quand les surfaces sont assez bien polies, cette diminution deviendroit considérablement plus petite. Pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, le poids Q devroit être $= 0,000854P$, & partant $10\frac{1}{2}$ fois plus grand que dans le cas $\lambda = \frac{1}{3}$. Réciproquement donc, ayant trouvé par l'expérience le poids Q, on pourra déterminer très exactement par là le nombre λ. Supposons que, pour le cas de $4\frac{1}{2}$ tours, on ait trouvé le poids $Q = 0,00025P$, ou $Q = \frac{1}{4000}P$; & puisque $\frac{1}{4000} = e^{-9\lambda\pi}1$ ou $e^{9\lambda\pi}$ =

$= 4000$, on aura $9\lambda\pi = \frac{l\,4000}{l\,e}$, ou bien $\lambda = \frac{3,6020600}{0,4342945.9\pi}$ $= 0,29334$, ce qui feroit à peu près $\lambda = \frac{2}{7}$.

15. Cependant on ne fauroit trop compter fur cette conclufion, puifque j'ai négligé dans le calcul le propre poids de la corde, qui peut caufer un changement fenfible dans la tenfion; qu'il vaudra la peine d'examiner. Soit dont la corde partout également épaiffe, & que
Fig. 2. & 3. le poids, dont la longueur eft $= c$, foit $= C$: de là le poids d'un élément ds, fera $= \frac{C\,ds}{c}$. Pofant comme ci-deffus l'amplitude de l'arc ALM $= \phi$, le poids de l'élément Mm donnera une preffion $= \frac{C\,ds}{c}\sin\phi$, & une force felon la direction de la corde $= \frac{C\,ds}{c}\cos\phi$, dont le frottement doit être diminué. Soit $R\,ds$ la partie de la preffion, qui eft encore inconnue, & la preffion entiere de l'élément Mm fera $= R\,ds + \frac{C\,ds}{c}\sin\phi$, d'où réfulte la force du frottement, qui agit felon la direction $M\mu = \lambda R\,ds + \frac{\lambda C\,ds}{c}\sin\phi$, d'où il faut retrancher la force $\frac{C\,ds}{c}\cos\phi$; de forte que la force qui tire felon $M\mu$ eft $= \lambda R\,ds + \frac{\lambda C\,ds}{c}\sin\phi - \frac{C\,ds}{c}\cos\phi$.

16. Soit maintenant la tenfion de la corde dans l'élément Mm $= T$, & dans l'élément fuivant $M\mu = T + dT$, & de là on aura $dT = -\lambda R\,ds - \frac{\lambda C\,ds}{c}\sin\phi + \frac{C\,ds}{c}\cos\phi$. Or la condition de l'équilibre fournit comme ci-deffus cette équation, en pofant le rayon de courbure en $M = r$, de forte que $\frac{ds}{r} = d\phi$;

T=

$$T = Rr + \frac{Cr}{c} \sin \phi, \text{ ou } R + \frac{C}{c} \sin \phi = \frac{T}{r},$$

d'où nous tirons cette équation

$$dT = \frac{-\lambda T ds}{r} + \frac{C ds}{c} \cos \phi, \text{ ou } dT + \lambda T d\phi = \frac{C ds}{c} \cos \phi,$$

qui étant multipliée par $e^{\lambda\phi}$ & intégrée donne:

$$e^{\lambda\phi} T = \frac{C}{c} \int e^{\lambda\phi} ds \cos \phi, \text{ \& partant}$$

$$T = \frac{C}{c} e^{-\lambda\phi} \int e^{\lambda\phi} ds \cos \phi,$$

où il faut prendre l'intégrale de telle sorte que, posant l'amplitude $\phi = o$, la tension en A devienne $= P$, en négligeant le poids du bout de la corde AP, ou en le comprenant dans le poids P.

17. Ici il est évident que la tension de la corde T dépend non seulement de l'amplitude ϕ, mais aussi de la figure du tambour. Supposons cette figure cylindrique, dont le rayon soit $= a$, & puisque l'arc $AM = s$ devient $a\phi$, on aura $ds = a d\phi$, & partant pour les tambours cylindriques la tension T, qui répond à l'amplitude ϕ, sera exprimée par cette équation:

$$T = \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\phi} \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi.$$

Or, ayant $\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = e^{\lambda\phi} \sin \phi - \lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \sin \phi$, & $\int e^{\lambda\phi} d\phi \sin \phi = - e^{\lambda\phi} \cos \phi + \lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi$, nous en tirons $\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = e^{\lambda\phi} \sin \phi + \lambda e^{\lambda\phi} \cos \phi - \lambda\lambda \int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi + \text{const.}$ & partant

$$\int e^{\lambda\phi} d\phi \cos \phi = \text{const.} + \frac{e^{\lambda\phi} (\sin \phi + \lambda \cos \phi)}{1 + \lambda\lambda}.$$

18. Après avoir trouvé cette intégrale, nous acquerrons la tension cherchée:

$$T = \text{const.}\ \frac{Ca}{c} e^{-\lambda\phi} + \frac{Ca\ (\sin\phi + \lambda \cos\phi)}{(1 + \lambda\lambda)\ c},$$

où, posant $\phi = o$, nous aurons pour la détermination de la constante:

$$P = \text{const.}\ \frac{Ca}{c} + \frac{\lambda Ca}{(1 + \lambda\lambda)\ c},$$

dont la valeur étant substituée fournit

$$T = Pe^{-\lambda\phi} - \frac{\lambda Cae^{-\lambda\phi}}{(1+\lambda\lambda)\ c} + \frac{Ca\ (\sin\phi + \lambda \cos\phi)}{(1 + \lambda\lambda)\ c}.$$

Si le poids de la corde évanouit, de sorte que $C = o$, on aura comme ci-dessus $T = Pe^{-\lambda\phi}$; mais le poids de la corde change de telle sorte la tension, qu'elle devient

$$T = Pe^{-\lambda\phi} + \frac{Ca}{(1 + \lambda\lambda)\ c} \sin\phi + \lambda \cos\phi - \lambda e^{-\lambda\phi}).$$

19. Si l'on multiplie cette valeur de T par $\frac{ds}{r} = d\phi$, à cause de $r = a$, on aura la pression de la corde dans son élément $Mm = ds = a d\phi$, où il faut remarquer que notre calcul ne sauroit subsister, à moins que cette pression ne soit positive; car, si elle devenoit quelque part négative, rien n'empêcheroit que la corde n'abandonnât là le tambour: aussi le frottement ne sauroit alors devenir négatif, comme le calcul le supposeroit. Ou bien il faudroit concevoir qu'il y eût autour du tambour un cylindre creux, ou un tuyau, qui tînt attachée partout la corde au tambour, ou qui empêchât qu'elle ne s'en détache. Or la pression ne devient négative qu'à moins que la tension T ne le devienne: & partant les cas que nous devons exclure de notre calcul, ne se trouvent que là où l'expression de T obtient une valeur négative. Mais, avant que cela arrive, il faut que la valeur de T éva-

évanouiſſe, & partant c'eſt depuis cet endroit que nous devons abandonner le calcul.

20. Suppoſons $\lambda = \frac{1}{3}$, & conſidérons le cas où la corde fait un demi-tour ſur le tambour. Puiſqu'alors $\phi = 180° = \pi$, & partant $\sin \phi = 0$, $\cos \phi = -1$, & $e^{-\lambda\phi} = 0,35092$, la tenſion à l'autre bout B, ou le poids Q, ſera Fig. 4.

$$Q = 0,35092\, P - 0,405276 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Le poids de la corde diminue donc le poids Q, requis pour arrêter le poids P; & la force Q évanouiroit tout à fait, ſi la corde étoit ſi peſante, qu'il fût $C = \frac{13}{15} \cdot \frac{cP}{a}$; ou bien, ſi un morceau de la corde, dont la longueur ſeroit égale au rayon du tambour a, avoit un poids qui fût au poids P comme 13 à 15; dans ce cas, la corde ALMNB ſimplement couchée ſur le tambour, ſans qu'on lui applique en B aucune force, arrêteroit le poids P; & ſi la corde étoit plus peſante, le poids P ſeroit d'autant mieux arrêté, & on le pourroit encore augmenter. Mais, ſi la corde eſt moins peſante, il faut toujours appliquer en B un contrepoids Q, qui ne ſoit pas plus petit que celui que je viens de déterminer.

21. Que dans la même hypotheſe $\lambda = \frac{1}{3}$, la corde rempliſſe ſur le tambour un tour & demi, de ſorte que $\phi = 3\pi$, & nous aurons $\sin \phi = 0$ & $\cos \phi = -1$, enſuite $e^{-\lambda\phi} = 0,043214$, d'où la grandeur du contrepoids Q devient:

$$Q = 0,043214\, P - 0,3129642 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

Donc, tandis que $C < \frac{4}{29} \cdot \frac{Pc}{a}$, ou que le poids d'un morceau de la corde égal au rayon du tambour, eſt plus petit que $\frac{4}{29}$P, il faut appliquer un contrepoids Q. Mais, ſi ce morceau de la corde peſe

 $\frac{4}{29}$P,

$\frac{4}{25}$ P, ou davantage encore, la ſeule corde, ſans qu'on ait beſoin de la charger d'un contrepoids, arrêtera le poids P; & il ſeroit ſuperflû de lui donner une plus grande longueur, vu que l'excès ſur un tour & demi ne demeureroit plus attaché au tambour. On peut remarquer ici qu'une corde beaucoup plus mince que dans le cas précédent, eſt capable de ſoutenir le poids P ſans un contrepoids, & cela dans la raiſon de $\frac{13}{15}$ à $\frac{4}{25}$ ou de 44 à 7.

22. Quand la corde remplit ſur le tambour deux tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,005322$, le plus petit contrepoids Q ſe trouve

$$Q = 0,005322\,P - 0,3015966 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour trois tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000655$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000655\,P - 0,3001965 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour quatre tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000081$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000081\,P - 3,0000243 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Quand la corde remplit ſur le tambour cinq tours & demi, à cauſe de $e^{-\lambda\varphi} = 0,000010$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = 0,000010\,P - 0,3000030 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Pour ſix tours & demi on trouve

$$Q = 0,00000122\,P - 0,300000366 \,.\, \frac{Ca}{c}.$$

Pour

Pour ſept tours & demi on trouve

$$Q = 0{,}000000151\,P - 0{,}3000000453 \cdot \frac{Ca}{c}.$$

23. En général, ſi la corde remplit ſur le tambour n tours & demi, à cauſe de $\phi = (2n + 1)\pi$, le plus petit contrepoids ſera

$$Q = e^{-\lambda(2n+1)\pi}\,P - \frac{\lambda(1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi})}{1 + \lambda\lambda} \cdot \frac{Ca}{c},$$

qui ſera donc d'autant plus diminué, que le tambour eſt gros. Si l'on veut que le contrepoids évanouiſſe, on aura cette équation:

$$(1 + \lambda\lambda)c\,e^{-\lambda(2n+1)\pi}\,P = \lambda a\,(1 + e^{-\lambda(2n+1)\pi})\,C,$$

d'où, ſi l'on connoit le nombre λ & les quantités a, c, C, P, on déterminera le nombre des tours n de cette ſorte:

$$e^{-\lambda(2n+1)\pi} = \frac{\lambda a C}{(1 + \lambda\lambda)\,cP - \lambda a C}, \quad \text{ou bien}$$

$$2n + 1 = \frac{l((1 + \lambda\lambda)\,c\,P - \lambda a C) - l\lambda a C}{\lambda\pi\,le}.$$

Soit c la longueur de la corde, qui peſe autant que le poids P, qu'il faut ſoutenir, ſans avoir beſoin de contrepoids, & on aura

$$2n + 1 = l\frac{(1 + \lambda\lambda)c - \lambda a}{\lambda a} : \lambda\pi le \quad \text{ou} \quad \pi le = 1{,}3643766.$$

24. Pour donner un exemple, ſuppoſons qu'on employe une telle corde, dont 2000 pieds peſent autant que le poids à ſoutenir, & que le diametre du tambour ſoit un pied, ou $a = \frac{1}{2}$: ſoit de plus le nombre qui réſulte du frottement, $\lambda = \frac{1}{3}$, & on aura

$$2n + 1 = \frac{l\,13332\frac{1}{3}}{0{,}4547922} = \frac{4{,}1248953}{0{,}4547922} = 9 \text{ aſſez exactement,}$$

donc

donc $n = 4$: de ſorte que dans ce cas quatre tours & demi ſont ſuffiſans pour ſoutenir le poids. Si le frottement, étoit moindre & qu'il fût $\lambda = \frac{1}{4}$, on trouveroit

$$2n + 1 = \frac{l\,16999}{0,3410941} = \frac{4,2304234}{0,3410941} = 12\tfrac{1}{2}.$$

Ici au lieu de $12\frac{1}{2}$ il faut prendre 13, & $n = 6$; de ſorte que ce moindre frottement exige ſix tours & demi. Puiſque a eſt ordinairement fort petit par rapport à c, on voit qu'il eſt aſſez exactement

$$2n + 1 = l\frac{(1 + \lambda\lambda)c}{\lambda a} : \lambda\pi le \text{ ou } e^{\lambda(2n+1)\pi} = \frac{(1+\lambda\lambda)c}{\lambda a}.$$

Du reſte il eſt évident, qu'un fort modique nombre de tours eſt toujours ſuffiſant pour ſoutenir les plus grands poids, ſans avoir beſoin d'un contrepoids.



PRE-

PREMIER MÉMOIRE
SUR
LA RÉFRACTION
DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

I.

Il y a déjà quelque tems que mon Pere proposa une nouvelle méthode de déterminer la quantité de réfraction des fluides transparens par des expériences très aisées, & à bien des égards préférables à celles dont Newton & Descartes se sont servis pour déterminer la réfraction de l'eau de pluie & de l'esprit de vin. Cette méthode se trouve dans le XII Volume de l'Histoire de notre Académie; mais personne, que je sache, n'en a encore profité. La voici en peu de mots.

2. On fait travailler deux ménisques à faces connues, de maniere qu'ils quadrent & se ferment parfaitement l'un l'autre. Ensuite, remplissant la cavité qu'il y a entr'eux, du fluide dont on veut déterminer la raison de réfraction, on en observe la distance de l'image distincte, rélativement à celle de l'objet. Alors, connoissant la raison de réfraction du verre dont les ménisques sont travaillés, avec les rayons des quatre faces de ces deux ménisques, & la distance de l'image observée par rapport à celle de l'objet, on sera en état d'en conclure, par les principes de la Dioptrique, la raison de réfraction de l'air dans ce fluide renfermé.

3. Une

(*) Lu le 1er d'Octobre 1761.

3. Une occasion m'a fourni de semblables ménisques, ayant fait travailler, par ordre de l'Académie, dans un dessein tout à fait différent, deux paires de ménisques, savoir selon des devis calculés en sorte que, remplissant d'eau de pluie la cavité qu'ils forment, elles ayent tous les avantages des verres objectifs parfaits. Or, comme ces objectifs composés de verre & d'eau de pluie n'ont pas parfaitement répondu à l'effet auquel on s'étoit attendu suivant la théorie, j'ai cru ne les pouvoir pas mieux employer qu'à de nouvelles expériences, si aisées pour découvrir la raison de réfraction de toutes sortes de liqueurs transparentes.

4. Mais, avant que d'exposer ces expériences mêmes, il convient de donner une explication du calcul qu'il faut faire pour connoitre par là la réfraction du fluide qu'on se propose d'examiner. Or, sans m'engager dans le détail de tous les principes de l'Optique, je tirerai les élémens de ce calcul du Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 9 d'Avril de cette année, *sur la perfection des verres objectifs.*

Planche IX. Fig. 6. *Exposition des caracteres algébriques.*

5. La premiere figure représente la coupe d'un tel objectif en général, composé de deux ménisques, dont la cavité est remplie d'un fluide quelconque:

L'objet est en F & son image se forme en K;
EAE*e*B*e*E est le ménisque de devant, regardant l'objet;
a le rayon de sa face extérieure EAE;
b le rayon de sa face intérieure *e*B*e*;
*e*B*e*C*e* la masse du fluide enfermé;
E*e*C*e*EDE le ménisque de derriere tourné vers l'image;
c le rayon de sa face intérieure *e*C*e*;
d le rayon de sa face extérieure EDE.

Ensuite, qu'on appelle

f la distance de l'objet FA,
k la distance de l'image DK,

de

de sorte que, si $f\ \infty$, la lettre k marque la distance de ce verre composé.

Soit maintenant la raison de réfraction
de *l'air* dans le *verre* comme m à 1, & celle
du *verre* dans le *fluide enfermé* comme n à 1, &
la raison de réfraction
de *l'air* dans ce *fluide* sera comme mn à 1.

Enfin, posons pour abréger

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{p} \quad \& \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{q}.$$

6. Cela posé, les principes de Dioptrique donnent entre ces quantités p, q, f, k, m & n, le rapport suivant:

$$\frac{1}{k}=(m-1)\frac{1}{p}-(m-mn)\frac{1}{q}-\frac{1}{f}\ (*),$$ d'où l'on conclud

$$mn=1-q\,(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+q\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{f}\right);$$

où il faut remarquer que j'ai non seulement négligé l'épaisseur du verre, mais que j'y ai encore supposé que l'objet se trouve à peu près dans l'axe du verre.

En cas qu'on se serve d'un objet extrêmement éloigné, de sorte que $f=\infty$, l'équation trouvée se changera en celle-ci:

$$mn=1-q\,(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\frac{q}{k},$$

où k marque la distance de foyer.

7. Il est donc clair, que toutes les fois qu'on connoit les rayons des quatre faces a, b, c, d, avec la réfraction du verre m, cette méthode de déterminer la raison de réfraction des fluides n'a aucune difficulté. On n'a qu'à calculer les valeurs de

$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d}$ & $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; ensuite on en tirera celles de q & de $(m - 1) . \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, qui soit $=$ A. Alors on remplira la cavité entre les deux ménisques du fluide dont on veut chercher la réfraction, & après en avoir observé la distance de l'image k, celle de l'objet étant $= f$, on calculera pour la réfraction du fluide enfermé la valeur de

$$mn = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme mn à 1.

Cette méthode est très simple; mais elle dépend de la connoissance, tant de la structure des ménisques, que de la réfraction du verre, & il est même évident qu'elle en exige une très exacte connoissance, vu qu'une légere erreur pourroit souvent en causer une très considérable dans la conclusion.

8. Mais, outre qu'on peut rarement s'en fier à la mesure des rayons suivant lesquels les Artistes forment les faces des ménisques, la réfraction du verre même qu'on y emploie, n'est pas assez bien connue: il s'en faut beaucoup qu'elle soit la même dans toutes les especes de verre, & on en trouvera à peine deux morceaux, qui ayent précisément la même réfraction. Il y a des especes de verre dont la raison de réfraction dans l'air est à peine comme 1 à 1,50; il y en a dont la raison de réfraction dans l'air est presque 1 à 1,55, & la réfraction de la plûpart des verres semble être contenue entre les limites 1,50 & 1,55.

9. Cette considération semble rabattre une grande partie de l'avantage qu'on s'étoit d'abord promis de ces nouvelles expériences; en effet, ne sachant ni les rayons des quatre faces des ménisques, ni même la réfraction du verre à quelques centiemes parties près, comment

ment pourroit-on prétendre en conclure assez exactement la réfraction des fluides dont on s'est servi dans ces expériences. Cependant il y a des moyens pour s'assurer, tant de la figure des ménisques, que de la véritable réfraction du verre dont ils sont travaillés, & il me conviendra de les indiquer avant toute chose.

10. D'abord, pour la véritable connoissance de la réfraction du verre, lorsqu'on est bien sûr de l'exactitude de l'Artiste, on y parviendra le plus aisément par cet expédient: on fera travailler de la même espece de verre dont les ménisques sont formés, une, ou bien quelques lentilles également convexes des deux côtés, dont les rayons soient bien connus, & alors les foyers de ces verres nous en feront connoitre la véritable réfraction.

11. Car la raison de réfraction de l'air dans le verre étant posée comme m à 1, si nous supposons que le rayon des faces d'une lentille également convexe des deux côtés, soit $= a$, en observant sa distance de foyer, ou bien la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet f, les préceptes connus de la Dioptrique nous fournissent cette solution:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{f} = \frac{2(m-1)}{a}, \quad \text{\& de là}$$

$$m = 1 + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right).$$

Donc, au cas que la distance de l'objet f soit infinie, k désignant alors la distance de foyer de la lentille, on aura pour la réfraction du verre

$$m = 1 + \frac{a}{2k}.$$

12. De là nous voyons que, si l'on trouvoit $k = a$, on auroit $m = 1\frac{1}{2}$ ou $1,50$; de sorte que la valeur de m ne surpasse les limites $1,50$, qu'entant que la distance de foyer k est plus petite que le rayon de la lentille a. Par exemple, pour une lentille dont le rayon

 des

des faces est de 3 pieds ou 36 pouces, si l'on observoit que la distance de foyer n'en fût que de 34 pouces, on en concluroit d'abord la valeur de $m = 1 + \frac{36}{2.34} = 1,529$; & la raison de réfraction de l'air dans le verre de la lentille seroit comme

$$1,529 \text{ à } 1.$$

13. Je viens au second point, & je vais indiquer par quel moyen on pourroit s'assurer de la véritable figure des ménisques? D'abord je remarque que, comme l'expression trouvée pour la réfraction du fluide enfermé ne dépend proprement que de la valeur des deux quantités q & $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, que nous avons posée $= A$; pourvu que nous pussions par quelque moyen nous assurer de leurs vraies valeurs, nous nous passerions entierement, tant d'une exacte connoissance de la réfraction du verre, que même de celle des quatre rayons des faces.

Je ne m'arrêterai donc pas à chercher par quels moyens on pourroit parvenir à une parfaite connoissance de la figure des ménisques mêmes; je me bornerai plutôt à indiquer quelques moyens plus simples pour déterminer les vraies valeurs des expressions

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \text{ \& } q.$$

14. Pour une exacte connoissance de la première expression

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),$$

on y parviendroit le plus facilement en laissant la cavité entre les deux ménisques vuide, & en en observant la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet f; car alors mn, qui exprime la raison de réfraction

tion de l'air dans le fluide enfermé, devenant $= 1$, l'équation générale du §. 7eme se changeroit en celle-ci:

$$1 = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& on en tireroit d'abord

$$A = \frac{1}{k} + \frac{1}{f}.$$

15. Mais, comme pour la plûpart la distance de foyer de deux ménisques, dont la cavité n'est remplie que d'air, est négative, cette méthode sera souvent assujettie à de nouvelles difficultés. Je conseillerai alors de recourir au moyen suivant, qui toujours sera praticable, que la distance de foyer des ménisques vuides soit négative ou non.

On prend une lentille ordinaire quelconque, dont on ait exactement observé la distance de foyer, qui soit $= r$; on la met ensuite entre les deux ménisques, & on mesure de cette triple lentille la distance de foyer que je nommerai $= k$. Alors, en y appliquant la formule du §. 7eme, à cause de $n = 1$; $f = \infty$ & $\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{r}$, elle se changera en celle-ci:

$$1 = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{r}\right),$$

& on en tirera d'abord la valeur de

$$A = (m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{r},$$

ou bien, supposé que k désigne la distance de l'image d'un objet dont la distance aux ménisques soit $= f$, on auroit

$$A = \frac{1}{k} + \frac{1}{f} - \frac{1}{r}.$$

Et pour s'assurer encore mieux de la vraie valeur de cette formule, on n'a qu'à enfermer entre les deux ménisques successivement plusieurs lentilles différentes par rapport à leur distance de foyer, & en conclure de la même maniere autant de valeurs pour la formule $A = (m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$: car, comme à cause des légeres erreurs inévitables dans les mesures des distances de foyer, toutes ces valeurs seront un peu différentes entr'elles, on en choisira une moyenne valeur, qui au moins sera très approchante de la véritable.

16. Qu'il me soit permis de remarquer ici en passant que cette même méthode pour s'assurer de la vraie valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, fournit en même tems un nouveau moyen pour déterminer la réfraction du verre, les rayons des faces des ménisques étant parfaitement connus. Car, ayant trouvé par la méthode indiquée la vraie valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, qui soit $= A$, qu'on calcule ensuite par les quatre rayons des faces la valeur de

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \text{ on aura}$$

$$(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = (m-1)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = A,$$

& partant $m - 1 = \dfrac{A}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$.

Or la réfraction de l'air dans le verre est comme $m : 1$.

17. Ayant donc déterminé la valeur de

$$\gamma(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=A,$$

on aura, pour la réfraction d'un fluide quelconque,

$$mn = 1 - Aq + q\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{f}\right) \quad §. 7.$$

où il nous manque encore la valeur de la lettre q, qui étant $=\frac{1}{g}$ $+\frac{1}{c}$, dépend uniquement de la figure des ménisques, que nous supposons inconnue. Il nous faudra donc tâcher de déterminer cette lettre q par d'autres moyens.

18. D'abord il se présente la maniere suivante: comme la lettre q dépend proprement de la figure de la cavité entre les deux ménisques, on n'a qu'à mesurer, tant le diametre de la cavité ee, que sa profondeur même BC; alors, à cause de $\frac{1}{q}=\frac{1}{g}+\frac{1}{c}$, pourvu que les arcs eBe & eCe soient très petits, comme on les fait ordinairement, on obtiendroit assez exactement $q=\frac{8BC}{ee}$. Mais, quelques soins qu'on puisse se donner, on ne sauroit se promettre une précision suffisante en prenant ces mesures, & la moindre erreur influeroit trop sur la quantité q même.

Il faut donc tâcher de trouver une autre méthode plus sûre pour déterminer la véritable valeur de la lettre q.

19. Pour cet effet je remarque que, de la même maniere que l'on conclud la réfraction d'un fluide transparent, la valeur de q étant connue (§. 17), on pourroit aussi réciproquement déterminer la valeur de q, si l'on savoit au juste la réfraction d'un certain fluide. Car alors

mn étant connu, si l'on remplit la cavité entre les ménisques de ce fluide dont on connoit la réfraction, & qu'on en observe la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet f, l'équation du §. 17 nous donnera $q = \frac{mn - 1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A}$.

20. Il faudra donc commencer par choisir un certain fluide, par exemple, *l'eau de pluie*, & en déterminer de la manière ordinaire la raison de réfraction dans l'air, ce qui donne la valeur de mn: ensuite on en cherchera, par le moyen que je viens de conseiller, la valeur de q. Alors ayant exactement déterminé pour une paire de ménisques, tant la valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = A$, selon la méthode du §. 15, que celle de $q = \frac{mn - 1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A}$, qui soit $= B$, on aura un instrument propre à connoître au plus juste la raison de réfraction de tous les fluides, pourvu qu'on en puisse avoir une quantité suffisante pour remplir la cavité des ménisques; savoir, en observant pour chaque fluide la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet f. On en calculera la réfraction par cette équation:

$$mn = 1 - AB + B\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{f}\right).$$

21. Si nous supposons, selon Newton, la raison de réfraction de l'air dans l'eau de pluie comme 1,3358 à 1, & que nous en remplissions la cavité entre les ménisques; une exacte mesure de la distance de l'image k, que cette lentille composée donne par rapport à celle de l'objet f, nous fournira pour la lettre q cette valeur:

$q =$

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A}.$$

Comme il paroit très probable que la réfraction de l'eau de pluie est aussi invariable que ce fluide est unique dans son espece, nous pourrons nous dispenser de répéter l'expérience ordinaire pour nous assurer de la réfraction de l'eau de pluie, en en retenant la proportion trouvée par Newton, pour la détermination de la lettre q. Or la raison pourquoi je préfere la proportion de Newton à celle de Descartes qui est un peu plus petite (*), ne doit surprendre personne, ayant tout lieu de supposer que Newton, qui a fait ses expériences après Descartes, s'est attaché à une plus grande exactitude.

22. Le grand Newton ayant encore déterminé la raison de réfraction de l'air dans l'esprit de vin comme 1,3698 à 1, si l'on savoit la véritable essence de cet esprit de vin dont Newton s'est servi, ou bien si cette liqueur étoit aussi unique dans son espece que l'eau de pluie l'est dans la sienne, on pourroit encore se servir de cette proportion pour la détermination de la lettre q, qui sera alors

$$q = \frac{0,3698}{\frac{1}{k} - \frac{1}{f} - A},$$

& cette valeur, pourvu qu'on ait été bien exact dans la mesure des distances k & f, ne doit point différer de celle qu'on a trouvée pour q par le moyen de l'eau de pluie.

23. Mais alors, ayant deux fluides dont on connoit la réfraction, on pourroit se passer entierement de la méthode indiquée au §. 15.

(*) Descartes a trouvé la raison de réfraction de l'air dans de l'eau de pluie comme 1,3315 à 1.

15 pour la détermination de l'expression $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, que nous avons nommée A. Car, en mesurant tant pour l'eau de pluie que pour l'esprit de vin les distances k & f, k' & f', nous obtiendrions d'abord une double valeur pour q, savoir

$$\text{pour l'eau de pluie} \quad q = \frac{0,3358}{\frac{1}{k}-\frac{1}{f}-A}, \quad \&$$

$$\text{pour l'esprit de vin} \quad q = \frac{0,3698}{\frac{1}{k'}-\frac{1}{f'}-A};$$

d'où, en posant ces deux valeurs égales entr'elles, on tireroit la valeur de

$$A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = \frac{0,3698}{0,0340}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{f}\right) - \frac{0,3358}{0,0340}\left(\frac{1}{k'}-\frac{1}{f'}\right).$$

24. Or, quoique la réfraction de l'esprit de vin paroisse très variable, selon la diverse force de cette liqueur, & qu'elle le soit effectivement, de sorte qu'on ne sauroit se servir de la proportion de 1, 3698 à 1, trouvée par Newton: la méthode indiquée au §. précédent, pour déterminer les valeurs de q & de $A = (m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, sera toujours très bonne, & même, comme on s'en convaincra dans la suite, préférable à celles que j'ai conseillées au §§. 15 & 19, lorsqu'on voudra se donner la peine de déterminer auparavant par les expériences ordinaires la réfraction d'une certaine espece d'esprit de vin & d'eau de pluie, ou bien de deux autres fluides quelconques, mais différens à l'égard de leur réfraction. Alors, remplissant la cavi-

té

té des ménisques successivement de ces mêmes fluides dont on auroit trouvé la réfraction, il n'y auroit plus aucun doute qu'on n'en pût tirer les valeurs des élémens q & $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, le plus exactement qu'il soit possible.

25. Après ces remarques générales, je crois pouvoir passer aux expériences mêmes. Je commencerai par donner une description exacte des ménisques dont je me suis servi: ensuite je tâcherai de déterminer par les moyens indiqués dans ce Mémoire les justes valeurs des élémens $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, & enfin je conclurai par les distances des images observées la raison de réfraction de tous les fluides, que des occasions différentes m'ont fournie jusqu'ici.

Description des Ménisques.

26. Je me suis servi de deux paires de ménisques, que je marquerai pour les mieux faire distinguer par les lettres A & B. Elles ont été travaillées par le plus habile Artiste que nous ayons, & les devis en sont déduits de mon Mémoire sur la perfection des verres objectifs. Ces deux paires ont presque la même forme, de sorte que la seconde figure peut représenter la coupe de l'une & de l'autre paire. Planche IX. Fig. 7.
Le premier ménisque EE tourné vers l'objet est une lentille concave des deux côtés, & l'autre E′E′ regardant l'image une lentille concave vers l'objet & convexe du côté de l'image.

Description de la paire A.

27. La premiere paire de ménisques, que j'ai marquée de la lettre A, est travaillée selon un devis tiré du 25eme paragraphe du dit Mémoire, & il devoit être pour le ménisque de devant:

le rayon de sa face concave de dehors 8, 72 pouces,
le rayon de sa face concave de dedans 2, 44 pouces,

& pour le ménisque de derriere:

le rayon de sa face concave de dedans 2, 13 pouces,
le rayon de sa face convexe de dehors 2, 01 pouces,

où je dois remarquer que douze de ces pouces font un pied de Rhin.

Or, l'Artiste n'ayant pas eu égard à l'épaisseur du tafferas dont les bassins étoient revêtus, lorsqu'il polissoit ces ménisques, & cette épaisseur pouvant bien selon l'estime monter à $\frac{2}{100}$ parties d'un pouce, les rayons de concavité devoient être jugés de $\frac{2}{100}$ plus grands, & celui de convexité d'autant plus petit qu'il ne falloit.

Aussi l'a-t-on d'abord remarqué dans la distance du foyer du second ménisque, qui, au lieu d'être de 64, 93 pouces, n'étoit que de 48 pouces.

Je fis alors, pour garder la proportion des mesures du devis, changer le ménisque de derriere en sorte que le rayon de sa face convexe fût de 2,05 pouces, en laissant le rayon de sa face concave de 2,15 pouces.

Tout ceci bien considéré, nous aurons pour les rayons des quatre faces des ménisques

$$a = -8,74; \quad b = 2,46; \quad c = 2,15 \quad \& \quad d = 2,05;$$

de là

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = 0,37339$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,87162$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -0,49823$$

$$\& \qquad q = 1,14465.$$

Pour ce qui regarde la réfraction du verre, l'Artiste ne se souvenoit plus de quelle espece de verre il s'étoit servi en travaillant cette paire de ménisques.

La

La réfraction du verre m étant donc encore inconnue, nous aurons pour la raiſon de réfraction d'un fluide quelconque, à cauſe de

$$(m-1)q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-(m-1).\,0,57162,$$

$$mn = 1 + 0,57162.(m-1) + 1,14465\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{f}\right).$$

Je tâcherai de déterminer cette valeur de m, lorſque je chercherai par les moyens indiqués les valeurs des expreſſions $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ & q. Mais je vais auparavant faire auſſi la deſcription de la ſeconde paire de méniſques.

Deſcription de la paire B.

28. La ſeconde paire de méniſques, que j'ai marquée B, eſt travaillée avec plus de ſoin que la premiere. Le devis en eſt tiré de la III^em Hypotheſe, ſuivant le §. 28 du même Mémoire, & les meſures en ſont comme il ſuit:

Pour le méniſque de devant,

le rayon de ſa face extérieure concave 7, 57 pouces,
le rayon de ſa face intérieure concave . 2, 42 pouces.

Pour le méniſque de derriere,

le rayon de ſa face intérieure concave - 2, 01 pouces,
le rayon de ſa face extérieure convexe - 2, 00 pouces.

Comme on avoit cette fois-ci eu égard à l'épaiſſeur du taffetas, ces meſures, ſi l'on veut s'en fier à l'exactitude de l'Artiſte, ſeront juſtes, & on aura pour les rayons des quatre faces

$$a = -7,57;\quad b = 2,42;\quad c = 2,01;\quad d = 2,00;$$

de là $\quad \frac{1}{p} = 0,36790$

$$\frac{1}{q} = 0{,}91073$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -0{,}54283 \quad \& \quad q = 1{,}09802.$$

Quant à la réfraction du verre dont ces ménisques sont travaillés, je m'en informai simplement chez l'Artiste, & il m'assura que, lorsqu'il avoit exactement poli une lentille ordinaire dans un bassin de trois pieds ou de 36 pouces de rayon, la distance de foyer de cette lentille étoit de $1\frac{1}{4}$ pouce moindre que le rayon du bassin, c'est à dire, qu'elle étoit de 34 pouces & $\frac{3}{4}$.

En appliquant ceci à ce que j'ai dit au §. 11, on aura $a = 36$; $k = 34\frac{3}{4} = 34{,}75$ & $f = \infty$; donc $m = 1 + \frac{n}{2k} = 1{,}5179$; de sorte que la raison de réfraction de l'air dans le verre de ces ménisques est comme 1, 5179 à 1.

Posant donc $m = 1{,}5179$

on aura

$$l\,(m-1) = 9{,}7142459$$

$$l - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 9{,}7346638$$

$$lq = 0{,}0406104$$

$$l - (m-1)\,q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = 9{,}4895201$$

& partant $(m-1)\,q\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = -0{,}30869$;

or $q = 1{,}09802$;

donc, remplissant la cavité entre ces deux ménisques d'un fluide quelconque, & mesurant sa distance de l'image distincte k, celle de l'objet étant $= f$, on calculera

mn

$$mn = 1,30869 + 1,09802\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raiſon de réfraction de l'air dans ce fluide ſera comme mn à 1.

Ou bien, lorſque $f = \infty$, & que k déſigne la diſtance de foyer des méniſques remplis du fluide dont on veut connoitre la réfraction, on aura ſimplement

$$mn = 1,30869 + \frac{1,09802}{k},$$

29. Or, comme il ne ſeroit point à propos de ſe fier trop à l'exactitude de l'Artiſte, quelque habile qu'il fût, un examen tel que je l'ai propoſé aux §§. 15, 19 ſera toujours très convenable. Je vai donc comparer pour l'une & l'autre paire les valeurs de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, trouvées par les meſures preſcrites du devis, avec celles qu'on obtient par les moyens indiqués ci-deſſus.

Examen de la figure des méniſques marqués de la lettre A.

30. Je commencerai par déterminer la valeur de $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, ſelon la méthode enſeignée au §. 15. Après avoir mis entre les deux méniſques ſucceſſivement pluſieurs lentilles différentes à l'égard de leur diſtance de foyer, j'en obſervai la commune diſtance de foyer comme il ſuit par cette table.

Dis-

Distance de foyer de la lentille, ou la lettre r en pouces.	Distance de foyer des deux ménisques avec la lentille, ou la lettre k en pouces.
1,70	3, 12
1,81	3, 50
2, 12	5, 00
2,44	7, 12
3, 12	16, 00
3, 31	25, 00;

d'où, à cause de $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$,

il résultera les six valeurs suivantes:

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,2861=0,2668=0,2717=0,2695=0,2580=0,2621,$$

dont la différence ne sauroit en partie être ajugée qu'à l'épaisseur de ces trois lentilles jointes ensemble, qui a été négligée dans le calcul; en partie cette différence pourroit encore être l'effet de ce qu'on n'a point pu, pour chaque observation, ranger les trois verres en sorte que leurs axes tombassent tous exactement dans une même ligne droite.

Or, en prenant entre ces six valeurs un milieu, ou aura assez exactement

$$(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-0,2690.$$

Cette détermination nous servira d'abord pour connoitre la quantité de la réfraction du verre dont ces ménisques sont travaillés; car, ayant trouvé ci-dessus §. 27 par les mesures du devis

$$(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=-0,49823\,.\,(m-1),$$

en égalant ces deux valeurs, on obtiendra

m —

$$m - 1 = \frac{0,26900}{0,49823} = 0,5399,$$

de ſorte que nous ayons la raiſon de réfraction de l'air dans le verre des méniſques comme $1,5399$ à 1.

Cette raiſon ne ſera cependant juſte qu'entant que la figure des méniſques eſt exactement telle que le porte le devis.

Je viens à la détermination, ou plutôt à la correction de la quantité q, que nous avons trouvée par les meſures du devis $= 1,14465$. Je ſuppoſe pour cet effet que la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie ſoit conſtamment comme $1,3358$ à 1.

Après avoir, ſelon les préceptes du §. 19 & ſuivans, rempli la cavité des méniſques de l'eau de pluie, j'en ai obſervé la diſtance de l'image diſtincte d'un objet extrèmement éloigné de $31,94$ pouces.

Ayant donc dans ce cas $f = \infty$ & $k = 31,94$, on obtiendra la valeur de la lettre

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{31,94} - \frac{1}{\infty} + 0,2690} = 1,1182,$$

qui eſt de $\frac{264}{10000}$ plus petite que celle que nous avons calculée par les meſures du devis.

Maintenant, ſachant tant la valeur de $(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = -0,2690$ que celle de $q = 1,1182$, nous ſommes en état de déterminer la réfraction de toutes ſortes de fluides: ſavoir en rempliſſant la cavité entre ces deux méniſques, que nous avons marqués de la lettre A, d'un fluide quelconque, la diſtance de l'image diſtincte k par rapport à celle de l'objet f nous fournira

$$mn = 1,3008 + 1,1182\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

& la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme mn à 1.

Mais, si l'objet est extrèmement éloigné, de sorte qu'on puisse hardiment mettre $f = \infty$, on aura plus brièvement

$$mn = 1{,}3008 + \frac{1{,}1182}{k}.$$

Or, en laissant, comme nous l'avons calculé au §. 27, $q = 1{,}14465$, nous obtiendrions pour la réfraction du fluide enfermé

$$mn = 1{,}3086 + 1{,}1446 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

ce qui donneroit, en posant $f = \infty$ & $k = 31{,}94$, comme je l'ai observé pour l'eau de pluie,

$$mn = 1{,}3445,$$

& partant une réfraction de $\frac{87}{10000}$ plus grande que celle qui a été trouvée par Newton.

Examen de la figure de l'autre paire des ménisques marquée B.

31. D'abord, pour ce qui regarde l'expression $(m - 1) \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, après avoir mis entre les deux ménisques diverses lentilles ordinaires de foyer connu, j'observai

pour

pour la distance de foyer de la lentille simple r en pouces:	la distance de foyer de cette même lentille enfermée entre les deux ménisques, ou k en pouces:
1,31	2,31
1,62	3,37
1,75	3,87
1,81	3,87
2,44	8,37
2,75	13,00
3,13	19,37;

d'où, à cause de $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{r}$, on obtiendra les sept valeurs suivantes:

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,3305=0,3206=0,3130=0,2941=0,2904=0,2867=0,2505;$$

& partant, en prenant un milieu entre toutes ces valeurs différentes, nous concluons

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,2979,$$

qui est un peu plus grande que la valeur déduite des mesures du devis, savoir

$$-(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=0,28113.$$

Ensuite, pour ce qui est de la valeur de la lettre q, j'ai, pour la corriger comme ci-dessus, rempli la cavité entre les ménisques d'eau de pluie, & j'ai trouvé que la distance de foyer en étoit de 40,06 pouces. En supposant donc pour l'eau de pluie la réfraction $mn=1,3358$, à cause de $f=\infty$ & $k=40,06$, on trouvera, par le § 21,

$$q = \frac{0,3358}{\frac{1}{40,06} - \frac{1}{\infty} + 0,2979} = 1,0401;$$

ce qui differe assés considérablement de la valeur calculée par les mesures du devis $q = 1,09802.$

Nous concluons donc, pour la paire B des ménisques, que, lorsqu'on en remplit la cavité d'un fluide quelconque, & qu'on en observe la distance de l'image k par rapport à celle de l'objet qui soit $= f$, la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme mn à 1; la valeur de mn étant calculée par cette équation:

$$mn = 1,3098 + 1,0401 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right),$$

ou plus brièvement, lorsque la distance de l'objet f est très grande, de sorte qu'on puisse hardiment poser $\frac{1}{f} = 0$:

$$mn = 1,3098 + \frac{1,0401}{k}.$$

Comme nous avons trouvé par les mesures du devis

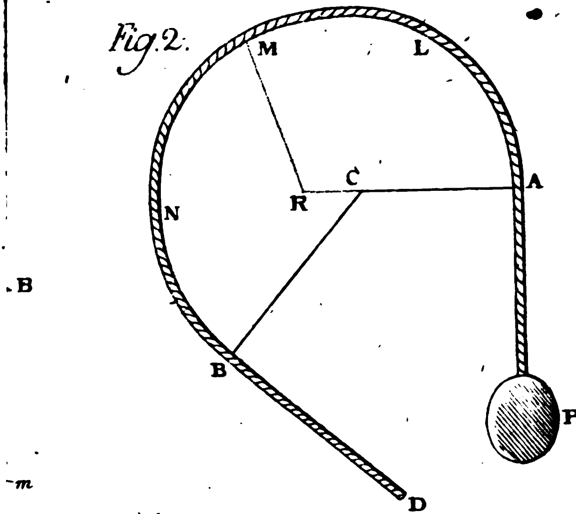
$$mn = 1,30869 + 1,09802 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \quad \S.\ 28,$$

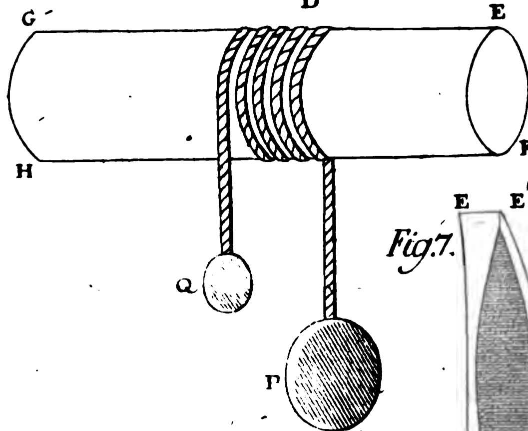
si nous y posons $k = 40,06$, comme on l'a observé en remplissant la cavité des ménisques de l'eau de pluie, f étant $= \infty$, nous obtiendrons pour la réfraction de l'eau de pluie

$$mn = 1,33609,$$

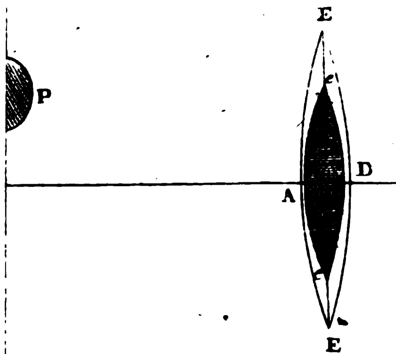
qui, malgré la grande différence que nous venons de trouver entre la valeur calculée & observée des élémens $(m-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q,

ne


Fig. 2.
M
L
C
A
N
R
B
P
D


G
E
Fig. 5.
F
H
Q
P


E
E'
Fig. 7.


E
P
D
A
E

ne differe que très peu de la raison de réfraction observée par Newton.

Après toutes ces déterminations, dont le but principal étoit de connoitre le plus exactement qu'il est possible les deux expressions $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, qui dépendent tant de la figure que de la réfraction du verre des ménisques, il ne me reste plus qu'à produire les expériences mêmes, pour en conclure la réfraction des différens fluides dont je m'y suis servi.



SECOND MÉMOIRE.

EXPÉRIENCES

SUR

LA QUANTITÉ DE RÉFRACTION

DES FLUIDES, (*)

PAR M. J. A. EULER.

Comme les opérations dans toutes ces expériences sont les mêmes, & qu'elles ne consistent qu'à remplir la cavité des ménisques du fluide dont on veut connoitre la réfraction, & à en observer la distance de foyer, ou celle de l'image distincte rélativement à la distance de l'objet; je vais une fois pour toutes donner une idée de la maniere dont je m'y suis pris.

Je commençois toujours par bien nettoyer les ménisques & filtrer le fluide dont je voulois connoitre la réfraction.

Ensuite, versant ce fluide dans une tasse de porcelaine, je n'avois qu'à y tremper les deux ménisques & à les y fermer; alors la cohésion du fluide empêchant suffisamment les ménisques de se séparer, après les avoir retirés, j'en essuyois encore le dehors, de sorte que le tout ressembloit parfaitement à un simple verre de lunette.

Pour mesurer la distance de foyer de ce verre composé, lorsque cette distance surpassoit celle d'un pied, je m'en servois comme d'un verre objectif ordinaire, c'est à dire, je le plaçois à un bout d'un tuyau

(*) Lu le 1[er] d'Octobre 1761.

tuyau de lunette, qu'on peut allonger & raccourcir à ſon gré, & j'y joignois à l'autre bout une ſimple lentille oculaire de $1\frac{9}{16}$ ou de 1,56 pouces de foyer.

Enſuite, après avoir couché cette lunette ſur un inſtrument, je mirois la pointe d'une tour très éloignée, & j'obſervois pour la repréſentation la plus diſtincte de cet objet la longueur de la lunette, ou plutôt la diſtance du verre objectif à l'oculaire.

Alors, connoiſſant la diſtance de foyer de l'oculaire, qui dans toutes ces expériences a conſtamment été de 1,56 pouces, en retranchant cette diſtance de toute la longueur de la lunette, il eſt clair que le reſte doit néceſſairement être la diſtance de foyer de l'objectif, & partant ce que nous avons appellé *k*.

Or, lorſque la diſtance de foyer de la lentille composée étoit plus petite qu'un pied, je me ſervois d'un expédient plus court, & je faiſois ſimplement tomber l'image d'une fenêtre ſur la muraille opposée; enſuite, lorſque cette image me paroiſſoit la plus diſtincte, j'en meſurois la diſtance au milieu du verre objectif; ce qui me donnoit la valeur de la lettre *k*.

En retranchant cette diſtance *k* de la longueur de la chambre, ou plutôt de la diſtance de la fenêtre à la muraille, qui dans toutes ces expériences a été de 506 pouces, le reſte en étoit la diſtance de la fenêtre au milieu du verre, c'eſt à dire la diſtance de l'objet, ou bien ce que nous avons nommé *f*.

Enfin, il me convient de remarquer que j'ai meſuré toutes ces diſtances avec une meſure de deux pieds de Rhin diviſés en 24 pouces, chaque pouce étant de plus ſubdiviſé en huit parties égales; & afin que ces huitiemes parties d'un pouce n'embaraſſent point le calcul, je les ai enſuite réduites à des centiemes.

D'ailleurs, les faces des méniſques ayant été travaillées de même ſelon la meſure du Rhin, j'avois l'avantage de n'être pas obligé de faire une réduction qui n'eût ſervi qu'à augmenter inutilement la peine.

I. Ex-

I. Expériences faites avec la premiere paire de ménisques, marquée A.

Le fluide enfermé étant	j'observois la longueur de la lunette de	d'où retranchant 1,56 pouces, on a la distance de foyer, ou la lettre k.	
de l'eau distillée	33,50 pouces	31,94 pouces	La distance de l'objet est infinie, ou $f = \infty$.
de l'eau de pluie	33,50	31,94	
de l'eau de puits	32,75	31,19	
du vin de France	27,00	25,44	
de l'eau de vie de France	20,75	19,19	
d'une autre espece plus forte	19,50	17,94	
de l'esprit de vin rectifié	18,50	16,94	
de l'esprit de vin rectifié au plus haut degré	18,00	16,44	
du blanc d'oeuf	18,50	16,94	
du vinaigre distillé	27,62	26,06	
une solution de gomme d'Arabie	26,25	24,69	
une solution de sucre blanc	26,75	25,19	
une solution de sel de salines	25,75	24,19	
une solution de sel d'urine	30,25	28,69	
de l'huile de Provence	— —	7,18 la distance de l'objet $f = 499$.	
de l'huile de térébentine	— —	6,50 la distance de l'objet $f = 500$.	

Remarques.

1. A l'égard des trois solutions des sels dont je me suis servi dans ces expériences, la proportion en étoit de deux scrupules de sel dans une once d'eau distillée.

2. Le sel de salines & celui d'urine étoient affinés par une double crystallisation.

Maintenant, ayant trouvé au §. 26 que, lorsqu'on remplit la cavité de la premiere paire des ménisques d'un fluide quelconque, & qu'on en observe la distance de l'image k respectivement à celle de l'objet f, la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme

$$mn = 1{,}3008 + 1{,}1182 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1,$$

en

en calculant pour chaque fluide dont je me ſuis ſervi dans ces expériences la valeur de $1,1182 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right)$, & en y ajoutant conſtamment le nombre 1,3008, nous en concluons la raiſon de réfraction, comme il ſuit dans cette Table.

Table de Réfractions.

La raiſon de réfraction de l'air dans	eſt comme	
l'eau diſtillée	1,3358	
l'eau de pluie	1,3358	
l'eau de puits	1,3366	
le vin de France	1,3447	
l'eau de vie de France	1,3590	
une autre eſpece plus forte	1,3631	
l'eſprit de vin rectifié	1,3668	à l'unité
l'eſprit de vin très rectifié	1,3688	
le blanc d'oeuf	1,3668	
le vinaigre diſtillé	1,3437	
une ſolution de gomme d'Arabie	1,3461	
une ſolution de ſucre blanc	1,3452	
une ſolution de Sel de ſalines	1,3470	
une ſolution de Sel d'urine	1,3397	
l'huile de Provence	1,4587	
l'huile de térébentine	1,4750	

II Expériences faites avec la ſeconde paire de méniſques, marquée B.

Après avoir rempli la cavité des ménisques	j'observois la longueur de la lunette de	d'où la distance de foyer, ou k	
d'eau distillée	41,62 pouces	40,06 pouces	La distance de l'objet f est infinie.
d'eau de pluie	41,62	40,06	
d'eau de puits	41,25	39,69	
de vin de France	31,25	29,69	
d'eau de vie de France	23,50	21,94	
d'une autre espece plus forte	22,75	21,19	
d'esprit de vin rectifié	20,50	18,94	
d'esprit de vin très rectifié	19,87	18,31	
de thé	39,37	37,81	
d'une solution du Sel mirabilis Glauberi	33,75	32,19	
d'une solution du Sel digestif Sylvii	31,75	30,19	
d'une solution de Sel ammoniac affiné	29,25	27,69	
d'une solution de vitriol de fer	37,12	35,56	
d'alcali minerale saturatum	23,50	21,94	
d'esprit de nitre acide	— — —	12,50 la distance de l'objet f = 494 pouces,	
d'huile de tartre per deliquium	— — —	14,12 la distance de l'objet f = 492 pouces,	
d'huile de Provence	— — —	7,50 la distance de l'objet f = 498 pouces,	
d'huile de térébentine	— — —	6,75 la distance de l'objet f = 499 pouces.	

Remarques.

1. Je me suis servi pour les trois premieres solutions de la même proportion que pour celles des expériences précédentes; savoir, j'ai constamment fait dissoudre une partie de sel dans douze parties d'eau distillée. Mais, pour que la solution du vitriol conservât encore quelque transparence, il m'a fallu prendre une double portion d'eau, de sorte qu'il y eût une partie du sel dissous dans 24 parties d'eau.

2. *L'alcali minerale saturatum*, *l'oleum Tartari per deliquium* & *le spiritus nitri acidi* m'ont été fournis par Mr. le Directeur *Marggraff*, de même que toutes les différentes especes de sel dont je me suis servi dans ces expériences, de sorte qu'on peut être bien sûr à l'égard de leur véritable essence.

3. Je dois enfin remarquer que le vin de France, la premiere eſpece d'eau de vie, les deux eſpeces d'eſprit de vin & les huiles ont été dans ces expériences, auſſi bien que dans les précédentes, de la même ſorte.

Maintenant, en appliquant à ces expériences ce que nous venons de trouver pour la paire B des méniſques vers la fin du §. 31, il en réſultera la table ſuivante.

Table de Réfractions.

La raiſon de réfraction de l'air dans	eſt comme	
l'eau diſtillée - - -	1,3358	à l'unité.
l'eau de pluie - - -	1,3358	
l'eau de puits - - -	1,3360	
le vin de France - -	1,3448	
l'eau de vie de France - -	1,3572	
une eſpece plus forte - -	1,3588	
l'eſprit de vin rectifié - -	1,3647	
l'eſprit de vin très rectifié -	1,3666	
le thé - - -	1,3373	
la ſolution du Sel mirabilis Glauberi -	1,3421	
la ſolution du Sel digeſtif Sylvii -	1,3443	
la ſolution du Sel ammoniac affiné -	1,3473	
la ſolution du vitriol de fer -	1,3391	
l'alcali minerale ſaturatum - -	1,3572	
l'eſprit de nitre acide - -	1,3952	
l'huile de tartre per deliquium -	1,3857	
l'huile de Provence - -	1,4406	
l'huile de térébentine - -	1,4660.	

Concluſions.

1. Si nous comparons cette Table avec la précédente, nous obſerverons d'abord que la raiſon de réfraction de l'eau de puits, du vin de France, de l'eau de vie de France, de l'eſprit de vin rectifié, de

 l'huile

l'huile de Provence & de celle de térébentine, a été trouvée plus petite ici que par les expériences précédentes, faites avec la paire A des ménisques.

2. D'où nous concluons que les vraies valeurs des élémens $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ & q, doivent encore différer de celles que nous avons trouvées aux §§. 30 & 31: ce qui ne doit surprendre personne, puisque de la maniere que nous avons déterminé la valeur de la premiere expression $(m - 1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ il est évident que, quoiqu'on prenne un milieu entre 6 ou 7 valeurs aussi différentes que nous les avons trouvées, ce milieu pourra encore très considérablement différer de la véritable valeur. Ensuite, pour ce qui regarde la valeur de la lettre q, comme nous l'avons déterminée en supposant la raison de réfraction de cette eau de pluie dont nous avons rempli les ménisques, égale à celle que Newton a trouvée, si cette supposition est vicieuse, la valeur de q que nous avons trouvée le sera de même.

3. Or, quoique par cette raison nous ne puissions rien conclure sur la vraie quantité de réfraction de tous ces fluides dont je me suis servi dans ces expériences, nous en pourrons toujours tirer de très belles conséquences sur le rapport que les raisons de réfraction de divers fluides tiennent entr'eux.

4. D'abord il est très évident que la quantité de réfraction de l'eau de pluie est la même que celle de l'eau distillée.

5. Ensuite, on voit par toutes ces expériences qu'il n'y a point de fluide, & probablement point de corps transparens non plus, dont la réfraction soit moindre que celle de l'eau de pluie, ou bien que celle de l'eau distillée. Il paroit surprenant qu'il n'y ait entre l'air & l'eau de pluie aucun milieu à l'égard de la raison de réfraction.

6. Après

6. Après l'eau de pluie, ſemblent ſuivre immédiatement les eaux de puits; mais la réfraction admettra probablement autant de différences, qu'il y a de puits différens: on pourra cependant conclure que la raiſon de réfraction de l'air dans de l'eau de puits eſt contenue entre les limites 1,336 à 1 & 1,337 à 1.

7. J'ai rangé dans ces Tables toutes les liqueurs fortes enſemble, & il en paroit très vraiſemblable que, plus une liqueur eſt forte, plus ſa réfraction doit être grande, de ſorte pourtant que la raiſon de réfraction de l'air dans une liqueur forte ne ſoit jamais moindre que 1, 34, & jamais plus grande que 1,37. Or Newton ayant trouvé que la raiſon de réfraction de l'air dans l'eſprit de vin étoit comme 1,3698 à 1, nous concluons que cet eſprit de vin dont Newton s'eſt ſervi dans ſon expérience doit avoir été réctifié au plus haut degré.

8. Le thé ne change que très peu l'eau à l'égard de la réfraction, dont la raiſon dans l'air pourra tout au plus être diminuée de 2 milliemes parties.

9. On voit encore qu'il n'y a probablement aucune eſpece de ſel, qui étant diſſoute dans l'eau n'en augmente la réfraction, les unes plus que les autres.

10. Les ſolutions de ſel d'urine & de vitriol ont les moindres réfractions, celles des ſels de ſaline & d'ammoniac les plus grandes: la raiſon de réfraction de l'air dans les ſolutions de ſel, ſi l'on conſerve la proportion mentionnée d'une partie de ſel dans douze parties d'eau, ſera contenue entre les limites comme 1,34 à 1 & 1,35 à 1.

11. Le vinaigre diſtillé & la ſolution de la gomme d'Arabie ont à peu près la même réfraction qu'un vin de France ordinaire, tel que celui dont je me ſuis ſervi dans mes expériences: & la réfraction du blanc d'oeuf eſt la même que celle de l'eſprit de vin rectifié.

12. L'alcali minerale ſaturatum paroit avoir la même réfraction qu'une eau de vie bien forte.

13. Suivent encore deux préparations chymiques, l'*esprit de nitre acide* & l'*huile de tartre per deliquium*, qui à l'égard de leur réfraction semblent tenir un milieu entre les liqueurs fortes & les huiles.

14. Quant aux huiles, on voit très clairement que leur réfraction approche le plus de celle du verre; surtout l'huile de térébentine, qui, de tous les fluides dont je me suis servi dans mes expériences, a la plus grande réfraction.

Je dois avertir que je ne savois point, en composant ce Mémoire, que Newton avoit non seulement déterminé la raison de réfraction de l'air dans l'eau de pluie & l'esprit de vin, mais qu'il avoit aussi déterminé celle de l'huile de Provence, & l'avoit trouvée comme 22 à 15, ou bien comme 1,4666 à 1, proportion qui s'accorde assez bien avec celle de l'huile de Provence, que nous avons trouvée par les premieres expériences. Je ne savois pas non plus que l'esprit de vin dont Newton s'est servi pour faire l'expérience eût été de l'espece la plus rectifiée; j'en aurois pu faire un grand usage en appliquant encore une seconde correction aux valeurs des quantités $(m-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ & q, selon la méthode que j'ai enseignée aux §§. 23, 24, tant pour l'une que pour l'autre paire des ménisques. Alors la premiere Table auroit assurément mieux accordé avec celle qui a été trouvée par les dernieres expériences.

TROI-

TROISIEME MÉMOIRE SUR LA RÉFRACTION DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Le dernier Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie contenoit des essais pour déterminer la réfraction de plusieurs liqueurs transparentes, que l'occasion m'avoit fournie alors.

Je me servois pour cet effet d'une méthode tout à fait nouvelle, proposée par mon Pere & insérée dans le XIIeme Volume de l'Histoire de notre Académie.

Comme cette méthode exige qu'on ait une ou bien quelques paires de ménisques dont les bords s'unissent parfaitement l'un à l'autre, & qu'une occasion accidentelle m'en avoit fourni deux, il ne me restoit plus que de connoitre pour l'une & l'autre paire la valeur de deux quantités algébriques qui dépendent, tant de la réfraction du verre dont les ménisques ont été travaillés, que de leur figure.

Je me servois bien de divers moyens pour trouver ces deux valeurs requises; mais, comme tous ces moyens étoient insuffisans pour les connoitre avec assés de précision, les raisons de réfraction des fluides dont je me suis depuis servi dans les expériences, étoient peu exactes & ne s'accordoient pas assés entr'elles; savoir les raisons de réfraction des fluides, trouvées par le moyen de la premiere paire de ménisques,

(*) Lu le 21 Janvier 1762.

ques, différoient considérablement de celles qu'a données l'autre paire pour les mêmes fluides.

Je remarquois alors que, si l'on savoit déjà au juste la réfraction de deux fluides différens, on pourroit réciproquement déterminer par là la vraie valeur de ces deux quantités algébriques.

J'y développois bien cette méthode, qui sans contredit paroit la meilleure & la plus sûre; mais je n'en pouvois pas profiter. J'ignorois qu'on avoit déjà déterminé la réfraction d'autres fluides que de l'eau de pluie & de l'esprit de vin, & je ne pouvois pas faire usage de ce dernier, par ce que sa véritable espece m'étoit entierement inconnue.

Ayant appris depuis que, non seulement Hawksbée dans ses Expériences Physico-méchaniques, mais déjà le grand Newton lui-même dans son Optique, ont donné la raison de réfraction d'un grand nombre de corps transparens, tant solides que fluides, je me vois en état d'apporter une correction suffisante à mes déterminations précédentes: & ce sera le but du présent Mémoire.

Je tâcherai en premier lieu de corriger les valeurs de ces deux quantités algébriques, & j'en déterminerai ensuite avec plus d'exactitude la raison de réfraction de toutes les liqueurs dont je me suis servi dans les expériences précédentes.

La premiere Table ci-jointe représente la raison de réfraction de plusieurs corps, tant solides que fluides, telle que Newton l'a insérée dans son Optique; & la seconde Table donne la raison de réfraction de tous les corps que Hawksbée a déterminée & qu'on trouve dans ses Expériences Physico-méchaniques.

J'ai réduit toutes ces raisons à des parties décimales, en supposant toujours que le rayon se rompe en entrant de l'air dans l'autre milieu.

En comparant la premiere Table avec la seconde, on remarquera d'abord que Hawksbée fait la réfraction de l'esprit de vin considérablement plus grande que Newton; quoique celui-ci se soit servi de l'espece la plus forte: je ne sais à quoi on pourra attribuer cette différence,

rence, mais au moins, si l'on compare la Table de Hawksbée avec mes expériences précédentes, il est très probable que ce Physicien n'a pas été trop exact dans ses expériences. Je vais le prouver tout à l'heure.

Hawksbée fait la réfraction du blanc-d'oeuf plus petite que celle de l'eau de vie de France: or, quelque grande ou quelque petite que soit cette réfraction du blanc d'oeuf, mes expériences précédentes, faites avec la premiere paire de ménisques, prouvent qu'elle doit précisément être égale à la réfraction de l'esprit de vin rectifié; il n'y a même aucun doute, la longueur de la lunette ayant été observée de part & d'autre la même: j'ai d'ailleurs plusieurs fois répété cette même expérience, & j'ai toujours trouvé le même résultat.

De plus, Hawksbée a trouvé la réfraction du vinaigre distillé égale à celle de l'esprit de vin; ce qui est encore contraire aux expériences que j'ai faites avec la seconde paire de ménisques, & qui la font beaucoup plus petite, & seulement égale à la réfraction du vin de France.

J'excepte l'esprit de nitre, pour lequel la Table de Hawksbée s'accorde assés bien avec la mienne.

Revenons maintenant à notre sujet, & tâchons de corriger, par le moyen de ces deux tables, la valeur des deux quantités algébriques dont j'ai fait mention au commencement de ce Mémoire.

Soient A & B ces deux quantités algébriques, qui dépendent uniquement de la figure des ménisques & de la réfraction du verre dont ils sont travaillés.

Soit ensuite la raison de réfraction de l'air dans un certain fluide comme n à 1; & nous savons par le Mémoire précédent que, si l'on remplit la cavité de deux ménisques de ce fluide, & qu'on en mesure depuis la distance de l'image, k, celle de l'objet étant $= f$, la réfraction du fluide sera exprimée en sorte qu'il soit:

$$n = A + B\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right);$$

d'où il eſt clair que, ſi l'on ſait pour deux fluides quelconques leur réfraction n, avec les diſtances de l'image & de l'objet, on en pourra réciproquement trouver les valeurs de A & de B.

Commençons donc par la premiere paire de nos méniſques, pour laquelle nous avons trouvé au Mémoire précédent A = 1, 3008; B = 1, 1182; de ſorte qu'il y ait pour la réfraction d'un fluide quelconque

$$n = 1,3008 + 1,1182\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right).$$

Maintenant, pour corriger ces nombres, choiſiſſons d'abord parmi les fluides de la Iere Table l'eau de pluie & l'eſprit de vin très rectifié, & nous voyons que Newton a trouvé la raiſon de réfraction de l'air dans l'eau de pluie comme 1, 3358 à 1, & dans l'eſprit de vin très rectifié comme 1, 3698 à 1.

Or on ſait par les expériences précédentes, faites avec la premiere paire de méniſques, que ſi l'on en remplit la cavité d'eau de pluie, la diſtance de foyer en eſt obſervée de 31, 94 pouces, & ſi l'on en remplit la cavité d'eſprit de vin très rectifié, la diſtance de foyer en eſt de 16, 44 pouces.

Poſant donc pour n, k & f les valeurs de 1, 3358, 31, 94 & ∞ obſervées pour l'eau de pluie, nous obtiendrons cette équation

$$1,3358 = A + \frac{B}{31,94}.$$

Et ſi nous mettons pour n, k, & f les valeurs 1, 3698; 16, 44 & ∞ obſervées pour l'eſprit de vin très rectifié, il en réſultera cette équation

$$1,3698 = A + \frac{B}{16,44};$$

d'où l'on tirera

B =

$$B = \frac{1,3698 - 1,3358}{\frac{1}{16,44} - \frac{1}{31,94}} = 1,1516,$$

$$A = 1,3358 - \frac{B}{31,94} = 1,2997.$$

Mais, si nous choisissons de la même table de Newton l'huile d'olive, nous aurons $n = 1,4666$, & par les expériences précédentes $k = 7,18$ & $f = 499$; d'où

$$1,4666 = A + B\left(\frac{1}{7,18} + \frac{1}{499}\right) = A + 0,1413B,$$

qui, étant combinée avec la premiere équation trouvée pour l'eau de pluie,

$$1,3358 = A + \frac{B}{31,94} = A + 0,0313B,$$

donnera

$$B = \frac{1,4666 - 1,3358}{0,1413 - 0,0313} = 1,1890,$$

$$A = 1,3358 - 0,0313B = 1,2986.$$

Enfin, si nous choisissons l'huile de térébentine, dont Hawksbée a trouvé la raison de réfraction dans l'air comme 1 à 1,4833, à cause de $n = 1,4833$, & suivant nos expériences, $k = 6,50$; $f = 500$, nous aurons

$$1,4833 = A + B\left(\frac{1}{6,50} + \frac{1}{500}\right) = A + 0,1558B,$$

laquelle équation étant encore combinée avec celle qu'on a trouvée pour l'eau de pluie

$$1,3358 = A + 0,0313B,$$

donnera

 B =

$$B = \frac{1,4833 - 1,3358}{0,1558 - 0,0313} = 1,1847,$$

$$A = 1,3358 - 0,0313 B = 1,2988.$$

Comme toutes ces valeurs, & en particulier celles qu'on a trouvées par le moyen des huiles, s'accordent assés bien ensemble, nous les connoitrons assés exactement en prenant le milieu. Les trois valeurs trouvées pour B donneront donc d'abord

$$B = 1,1751.$$

Or, pour le nombre A, si nous voulons conserver la quantité de réfraction de l'eau de pluie trouvée par Newton, nous aurons

$$A = 1,3358 - 0,0313 B, \text{ \& partant}$$

$$A = 1,2991.$$

Nous concluons donc pour la premiere paire de ménisques, que si l'on en remplit la cavité d'un certain fluide, & qu'on en observe ensuite la distance de l'image k d'un objet éloigné à la distance f, la raison de réfraction de l'air dans ce fluide sera comme

$$1,2991 + 1,1751 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1.$$

Par là la Table de réfraction construite à la fin de mon dernier Mémoire par la premiere paire des ménisques, sera corrigée de la façon que représente la troisieme des Tables ci-jointes.

Il me reste encore de déterminer les valeurs des nombres A & B pour la seconde paire de ménisques.

La maniere la plus aisée sera de faire ces déterminations sur la même Table corrigée que nous venons de donner, par le moyen de la premiere paire.

Choisissons donc les deux fluides extremes, c'est à dire l'eau de pluie comme celui de la moindre, & l'huile de térébentine comme celui de la plus grande réfraction, & nous aurons

I. pour

I. pour l'eau de pluie

$n = 1{,}3358; \quad k = 40{,}06; \quad f = \infty,$

II. pour l'huile de térébentine

$n = 1{,}4822; \quad k = 6{,}75; \quad f = 499;$ donc

$$1{,}3358 = A + \frac{B}{40{,}06} = A + 0{,}02496\,B,$$

$$1{,}4822 = A + B\left(\frac{1}{6{,}75} + \frac{1}{499}\right) = A + 0{,}15015\,B;$$

d'où $$B = \frac{1{,}4822 - 1{,}3358}{0{,}15015 - 0{,}02496} = 1{,}1694,$$

$$A = 1{,}3358 - 0{,}02496\,B = 1{,}3066.$$

De là nous concluons que, si l'on remplit la cavité entre les deux méniſques de la ſeconde paire, d'un fluide quelconque, & qu'on en meſure enſuite la diſtance de l'image *k* d'un objet éloigné à la diſtance *f* du verre, la raiſon de réfráction de l'air dans ce fluide ſera comme

$$1{,}3066 + 1{,}1694\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{f}\right) \text{ à } 1.$$

Enfin, en corrigeant par le moyen de cette formule la réfraction des fluides trouvée à la ſuite de mes expériences précédentes, cela a donné la quatrieme des Tables ſuivantes.

QUATRIEME MÉMOIRE.

EXPÉRIENCES
SUR LA
RÉFRACTION DE QUELQUES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Expériences faites avec la paire B *de ménisques.*

Aprés avoir rempli la cavité des ménisques,	j'ai observé la longueur de la lunette de en pouces	d'où retranchant 1,56 pouces, qui est la distance de foyer de l'oculaire, on aura *k* la distance de foyer de l'objectif.	
d'eau de puits	42,50	40,94 pouces	la distance de l'objet étant infinie.
d'une solution de nitre ∇ ℥j ⊕ depur. gr. XII	38,75	37,19	
dito ∇ ℥j ⊕ depur. gr. XXIV	36,75	35,19	
dito ∇ ℥j ⊕ depur. gr. XLVIII	32,00	30,44	
dito ∇ ℥j ⊕ depur. ʒij	26,25	24,69	
d'une infusion de persil	42,50	40,94	
d'une infusion de feuilles de pêcher	41,00	39,44	
d'une infusion de safran	41,50	39,94	
d'une infusion de coquilles de noix	42,00	40,44	
d'eau de Zelter	42,25	40,69	
d'eau d'Eger	37,62	36,06	
de liqueur anodine	21,56	20,00	
d'esprit de camphre	18,50	16,94	
d'esprit de savon de Saxe	13,00	11,44	

En

(*) Lu le 21 de Janvier 1762.

En faisant ces expériences, je m'étois proposé un double dessein. Je voulois en premier lieu examiner, comment la réfraction d'une solution de sel change en y augmentant peu à peu la dose de sel: je me suis servi pour cet effet du nitre affiné au plus haut degré en le dissolvant dans de l'eau de puits.

Je voulois ensuite voir quel effet produisent dans la réfraction les infusions de diverses herbes; je versai dans cette intention de l'eau bouillante sur du persil, des feuilles de pêcher, du safran & des coquilles de noix; & après les avoir suffisamment fait tirer, je les laissai refroidir.

Si l'on compare ces expériences avec celles que j'ai faites ci-dessus avec la même paire de ménisques, on ne sera pas médiocrement surpris, que pour l'eau de puits, la longueur de la lunette ait été observée considérablement plus grande ici que dans l'expérience précédente.

C'est pourquoi il me convient de remarquer que ces expériences ont été faites dans un tems extrèmement chaud, savoir le 16 d'Aout de l'année 1761, vers midi, où le Thermometre montroit 31 degrés de Réaumur au dessus du point de la congélation; au lieu que les expériences précédentes ont été faites dans un tems très tempéré, savoir le 6 d'Avril de la même année, la hauteur du Thermometre ayant été alors tout au plus de 12 degrés.

L'on pourroit soupçonner que le changement que nous venons d'observer dans la longueur de la lunette pour l'eau de puits, ne sauroit être que l'effet de la chaleur: ce n'est encore là qu'un soupçon; je tâcherai dans un autre Mémoire non seulement de le confirmer par des preuves incontestables, mais encore, de déterminer autant qu'il me sera possible par des expériences la quantité de l'accroissement que prend la réfraction des fluides dans divers degrés de chaleur.

Faisons pour le présent abstraction de la chaleur, & déterminons pour tous ces fluides les raisons de réfraction.

Or,

Or, ayant trouvé par mes recherches précédentes que, si l'on remplit la cavité des ménisques marqués par la lettre B d'un fluide quelconque, & qu'on en observe ensuite la distance de foyer k, la réfraction de ce fluide sera telle que le sinus d'incidence soit au sinus de réfraction comme

$$1,3066 + \frac{1,1694}{k} \text{ à } 1,$$

en supposant que le rayon se rompe en passant de l'air dans ce fluide.

Donc, si l'on substitue à k successivement tous les nombres que nous venons d'observer pour tous les fluides marqués dans les expériences présentes, nous en calculerons aisément la raison de réfraction, comme on le peut voir par la cinquieme Table.

Donc, pour ce qui regarde les différentes solutions de nitre, on voit que la 41 partie du nitre augmente la réfraction de l'eau

de	0, 0029
la 21 partie de	0, 0047
la 11 partie de	0, 0099
& la 5 partie de	0, 0189;

d'où l'on peut conclure que l'accroissement de la réfraction d'une solution est à peu près proportionelle à la quantité du sel dissous: ici cet accroissement fait environ la dixieme partie de la quantité du nitre qui est dissous.

On voit ensuite que la réfraction des infusions est peu différente de celle de l'eau pure, surtout la réfraction de l'infusion de persil, qui paroit lui être égale: & pour l'infusion de feuilles de pêcher, la réfraction en est encore la plus grande.

Les

Les deux eſpeces d'eaux minérales, dont je me ſuis ſervi dans ces expériences, ont de même une réfraction à peu près égale à celle de l'eau de puits.

Enfin la liqueur anodine, l'eſprit de camphre & celui de ſavon de Saxe ont une réfraction très grande, ſurtout le dernier, dont la réfraction approche beaucoup de celle des huiles.



TABLES
DE
RÉFRACTION DE PLUSIEURS MILIEUX TRANSPARENS. (*)

I. Table de Réfraction de quelques milieux transparens, selon Newton.

Voyez son Optique L. II. P. III. Prop. 10.

Le rayon passant de l'air dans	le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
Le Pseudo-Topaze jaune	1,6429	
l'éther ou l'air raréfié	0,9997	
le verre d'antimoine	1,8889	
le sélénite	1,4878	
le verre ordinaire	1,5500	
le cryſtal de roche	1,5620	
le cryſtal d'Islande	1,6666	à l'unité
le sel de roche	1,5455	
l'alun	1,4577	
le borax	1,4667	
le salpetre	1,5238	
le vitriol	1,5000	
l'huile de vitriol	1,4285	
l'eau de pluie	1,3358	
la gomme d'Arabie	1,4771	
l'esprit de vin très rectifié	1,3698	à l'unité
le camphre	1,5000	
l'huile d'olive	1,4666	
l'huile de lin	1,4814	
l'esprit de térébentine	1,5625	
l'ambre jaune	1,5556	
le diamant	2,4390	

II. Ta-

(*) Présenté à l'Académie le 21 de Janvier 1762.

II. Table de Réfraction de plusieurs fluides, trouvée par Hawksbée.

Voyez ses Expériences Physico-méchaniques.

Le rayon passant de l'air dans	Le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
l'eau	1,3359	
l'esprit de miel	1,3359	
l'esprit du sel ammoniac	1,3377	à l'unité
l'esprit acide d'ambre	1,3377	
l'esprit de corne de cerf	1,3390	
l'urine humaine	1,3419	
le blanc d'oeuf	1,3511	
la gelée de corne de cerf	1,3541	
l'eau de vie de France	1,3626	
l'esprit de vin	1,3721	
le vinaigre distillé	1,3721	à l'unité
la gomme ammoniac	1,3723	
l'eau régale	1,3898	
l'eau régale composée d'eau forte & de l'X	1,3964	
l'eau forte	1,4044	
l'esprit de nitre	1,4076	
l'humeur cristalline	1,4635	
le beurre d'antimoine	1,6831	

II. Table de Réfraction de plusieurs fluides, trouvée par Hawksbée.

Le rayon passant de l'air dans	Le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
l'huile de vitriol	1,4262	
l'huile de cire	1,4524	
l'huile de lavande	1,4690	
l'huile de romarin	1,4719	à l'unité
l'huile d'origan	1,4770	
l'huile de genevre	1,4799	
l'huile d'orange	1,4833	
l'huile de térébentine	1,4833	
l'huile de saviner	1,4857	
l'huile de fleur de muscade	1,4878	
l'huile de menthe	1,4911	
l'huile d'ambre	1,5010	
l'huile de cumin	1,5088	
l'huile de fenouil	1,5114	à l'unité
l'huile de girofle	1,5136	
l'huile d'anis	1,5191	
l'huile de canelle	1,5340	
l'huile de sassafras	1,5443	

III. Table de Réfraction de quelques fluides, trouvée par le moyen de la premiere paire de ménisques.

Le rayon passant de l'air dans		Le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
l'eau distillée	- - - -	1,3358	à l'unité
l'eau de pluie	- - -	1,3358	
l'eau de puits	- - -	1,3366	
le vin de France	- - -	1,3453	
l'eau de vie de France	- -	1,3603	
une espece plus forte	- - -	1,3646	
l'esprit de vin rectifié	- - -	1,3685	
l'esprit de vin très rectifié	- -	1,3706	
le blanc d'oeuf	- - -	1,3685	à l'unité
le vinaigre distillé	- - -	1,3442	
une solution de gomme d'Arabie	-	1,3467	
une solution de sucre blanc	▽pl ℥j ß ℈ij	1,3457	
une solution de sel de salines	▽pl ℥j ⊖ ℈ij	1,3477	
une solution de sel d'urine	▽pl ℥j ⊖□ ℈ij	1,3400	
l'huile de Provence	- -	1,4651	
l'huile de térébentine	- - -	1,4822	

NB. Le sel de salines & le sel d'urine ont été affinés par la double cryſtallisation.

 IV.

IV. Table de Réfraction de quelques fluides, trouvée par le moyen de la seconde paire de ménisques.

Le rayon passant de l'air dans	Le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
l'eau distillée	1,3358	à l'unité
l'eau de pluie	1,3358	
l'eau de puits	1,3362	
le vin de France	1,3458	
l'eau de vie de France	1,3600	
une espece plus forte	1,3618	
l'esprit de vin rectifié	1,3683	
l'esprit de vin très rectifié	1,3705	
le thé	1,3376	
l'alcali minerale saturatum	1,3600	
l'esprit de nitre acide	1,4025	à l'unité
une solution du sel mirabilis Glauberi ∇ ℥j ⊖Gl. ℈ij	1,3430	
une solution du sel digestif Sylvii ∇ ℥j ⊖Sgl. ℈ij	1,3454	
une solution de sel ammoniac ∇ ℥j ✱ ℈ij	1,3488	
une solution de vitriol de fer ∇ ℥j ⊕ ♂ ℈j	1,3395	
l'huile de tartre per deliquium	1,3917	
l'huile de Provence	1,4648	
l'huile de térébentine	1,4822	

V.

V. Table de Réfraction de quelques fluides, trouvée par le moyen de la seconde paire de ménisques

le 16. d'Aout 1761;

la hauteur du thermometre ayant été à 31 degrés de Réaumur au dessus du point de congélation.

Le rayon passant de l'air dans :	Le sinus d'incidence sera à celui de réfraction comme	
l'eau de puits	1,3351	à l'unité
quatre solutions différentes de nitre		
▽ ℥j ⌽ depuratiss. gr. XII	1,3380	
▽ ℥j ⌽ depuratiss. gr. XXIV	1,3398	
▽ ℥j ⌽ depuratiss. gr. XXXXVIII	1,3450	
▽ ℥j ⌽ depuratiss. ʒij	1,3540	
quatre infusions différentes		à l'unité
de persil	1,3351	
de coquilles de noix	1,3355	
de safran	1,3359	
de feuilles de pêcher	1,3363	
l'eau de Zelter	1,3353	
l'eau d'Eger	1,3358	
la liqueur anodine	1,3650	
l'esprit de camphre	1,3757	
l'esprit de savon de Saxe	1,4088	

CIN-

CINQUIEME MÉMOIRE.

DE L'INFLUENCE

DE LA CHALEUR SUR LA RÉFRACTION DES FLUIDES. (*)

PAR M. J. A. EULER.

Le grand Newton a déjà ſoupçonné que les divers degrés de chaleur pouvoient bien avoir quelque influence ſur la force réfractive des corps tranſparens: mais la méthode dont il ſe ſervoit pour déterminer en général la réfraction que ſouffre un rayon de lumiere en paſſant d'un milieu dans un autre, étoit tout à fait inſuffiſante pour s'en convaincre.

Mes dernieres expériences ſur la réfraction des fluides au contraire non ſeulement confirment cette opinion de Newton, mais elles font encore voir que la méthode de mon Pere, dont je me ſuis ſervi pour les faire, a entr'autres cet avantage, qu'elle eſt très propre à faire connoitre plus exactement de quelle façon la chaleur influe ſur la quantité de réfraction.

Je tâcherai dans ce Mémoire-ci de mettre cette influence de la chaleur ſur la réfraction des rayons dans un plus grand jour, en commençant par expoſer les expériences mêmes que j'ai faites à ce deſſein.

PRE-

(*) Lu le 11 de Mars 1762.

PREMIERE PARTIE,

contenant les Expériences.

1me *Expérience.*

Je trempai une lentille ſimple objective dans de l'eau bouillante, juſqu'à ce qu'elle en eût acquis le degré de chaleur; j'en meſurai enſuite, auſſi vite qu'il me fut poſſible, la diſtance de foyer, & je la trouvai de 16 pouces.

Or, après avoir laiſſé refroidir cette lentille, juſqu'à ce qu'elle eût le degré de chaleur de l'air de dehors, j'obſervai ſa diſtance de foyer de 16 pouces & $\frac{1}{4}$.

Je fis cette expérience le 22 d'Aout de l'année 1761 au matin, la hauteur du Thermometre ayant été obſervée de 14 degrés de Réaumur.

Comme ce Thermometre marque 80 degrés pour la chaleur de l'eau bouillante, & 0 au point de congélation, on voit par cette expérience que $80 - 14 = 66$ degrés de plus au Thermometre de Réaumur ont produit, ſur une lentille de 16 pouces de foyer, une différence d'$\frac{1}{4}$ de pouce, dont la diſtance de foyer a été diminuée.

2de *Expérience.*

Je remplis la cavité de la ſeconde paire de méniſques d'eau bouillante, & j'en obſervai enſuite la diſtance de foyer, que je trouvai de 45 pouces; or, après l'avoir laiſſé refroidir, cette diſtance de foyer avoit diminué juſqu'à 41,44 pouces.

Cette expérience fut faite le 23 d'Aout de la même année, à midi, la hauteur du Thermometre ayant été obſervée de 34 degrés.

Donc $80 - 34 = 46$ degrés du Thermometre de Réaumur ont diminué la diſtance de foyer de notre lentille compoſée de 3,56 pouces.

3eme *Expérience*,

faite le 8. de Décembre 1761, le matin, la hauteur du Thermometre ayant été observée de 3 degrés au dessous du point de congélation.

Je tins une lentille simple objective au dessus de l'eau bouillante, jusqu'à ce que le Thermometre, qui étoit tout à côté de la lentille, montrât 30 degrés au dessus du point de congélation; j'en observai ensuite la distance de foyer, que je trouvai de 48, 31 pouces.

Après avoir laissé refroidir cette lentille, jusqu'à ce que le Thermometre ne montrât plus que 8 degrés de chaleur, la distance de foyer étoit augmentée d'¼ de pouce, & enfin

après que cette lentille eut acquis le même degré de chaleur que l'air de dehors, savoir de 3 degrés au dessous du point de congélation, je trouvai sa distance de foyer encore augmentée d'¼ de pouce.

Donc 30 + 3 = 33 degrés de chaleur de plus ont diminué la distance de foyer de notre lentille d'un demi-pouce.

4eme *Expérience*,

faite le même jour, la hauteur du Thermometre étant 3 degrés au dessous du point de congélation.

Je remplis d'eau de puits la cavité entre les deux ménisques de la premiere paire.

Je tins ensuite cette lentille composée au dessus de l'eau bouillante, jusqu'à ce que le Thermometre, qui étoit tout à côté, marquât 30 degrés; alors observant la distance de foyer de cette lentille, je la trouvai de 37, 56 pouces.

Puis ayant remis à l'air la lentille avec le thermometre, j'attendis que le Thermometre fût tombé jusqu'au 6eme degré au dessus du point de congélation, & je trouvai le foyer de la lentille encore à une distance de 32,44 pouces.

En-

Ensuite, la hauteur du Thermometre ayant été d'un demi-degré au dessus du point de congélation, la distance de foyer ne fut plus que de 31,44 pouces.

Enfin, le Thermometre marquant l'état de l'air de dehors, savoir 3 degrés au dessous du point de congélation, l'eau enfermée s'étant changée en glace avoit perdu sa transparence.

Or la lentille composée même conserva jusqu'à ce point de congélation sa distance de foyer de 31,44 pouces.

Nous voyons par là, que la distance de foyer de cette lentille avoit augmenté de 6,12 pouces, savoir du terme de congélation de l'eau enfermée jusqu'au 30eme degré au dessus du point de congélation.

5eme Expèrience,

faite le même jour, & la hauteur du Thermometre étant toujours de 3 degrés au dessous du point de congélation.

Après avoir rempli la cavité des mêmes ménisques d'eau de vie de France, j'en observai d'abord la distance de foyer, & je la trouvai de 18,31 pouces. Ensuite, ayant chauffé cette lentille composée, jusqu'à ce que le Thermometre marquât 30 degrés au dessus du point de congélation, j'observai que la distance de foyer en étoit devenue plus grande de 7,13 pouces.

6eme Expérience,

faite le même jour, & la hauteur du Thermometre étant toujours la même.

Je remplis la cavité des mêmes ménisques d'une solution de sel de salines, & je trouvai que la distance de foyer de cette lentille composée étoit d'abord de 21,81 pouces.

Ayant chauffé cette même lentille, jusqu'à ce que la hauteur du Thermometre fût de 30 degrés au dessus du point de congélation, la distance de foyer en fut augmentée de 2,88 pouces.

7eme Expérience,

faite le 10. de Décembre 1761 au matin, la hauteur du Thermometre ayant été de 8 degrés au dessous du point de congélation.

Je remplis la cavité des mêmes ménisques, d'huile d'olive, & j'en observai le foyer à une distance de 6,75 pouces du verre.

Je mis alors cette lentille composée avec mon Thermometre à l'ouverture d'un fourneau, dont le feu étoit déjà éteint depuis plus d'une heure, & lorsque le Thermometre marqua 50 degrés au dessus du point de congélation, je trouvai la distance de foyer de la lentille de 7,37 pouces.

Donc $50 + 8 = 58$ degrés du Thermometre de Réaumur ont augmenté la distance de foyer de notre lentille composée de 0,62 pouces.

8eme Expérience,

faite le même jour, la hauteur du Thermometre étant toujours 8 degrés au dessous du point de congélation.

Après avoir rempli d'eau d'Eger la cavité des mêmes ménisques, je fis comme dans l'expérience précédente, & je trouvai ce qui suit: Le Thermometre étant au 8eme degré au dessous du point de congélation, la distance de foyer de la lentille composée fut observée de 36, 50 pouces, &

lorsque le Thermometre étoit au 50eme degré au dessus du point de congélation, cette distance de foyer fut de 53 pouces.

Donc $50 + 8 = 58$ degrés du Thermometre ont augmenté la distance de foyer de notre lentille composée de 16,50 pouces.

Réflexions générales.

I. La premiere & la troisieme Expérience font voir, que la distance de foyer d'une simple lentille de verre diminue, à mesure que la chaleur en augmente.

II. Pour

II. Pour approfondir la cauſe de cette diminution, je remarque d'abord, qu'elle ne ſauroit être attribuée au changement de volume que tous les corps ſubiſſent étant expoſés à différens degrés de chaleur, & qu'on a meſuré par le Pyrometre. Car, d'un côté, ces changemens dans le volume des corps ſont incomparablement plus petits que ceux que je viens de découvrir dans la diſtance de foyer, & de l'autre côté ils devroient produire un effet tout à fait contraire; la diſtance de foyer des verres en devroit être augmentée par la chaleur, & diminuée par le froid, pendant que le contraire arrive actuellement.

III. Il n'y a donc aucun doute que ces changemens obſervés dans la diſtance de foyer ne ſoient cauſés par une différente réfraction dans le verre même; en ſorte que la chaleur augmente la force réfractive du verre, & vraiſemblablement auſſi de tous les autres corps tranſparens, pendant que le froid diminue cette force.

IV. On comprend aiſément que le changement dans l'air même ne ſauroit être ici d'aucune conſidération, puiſque la réfraction des rayons, lorſqu'ils paſſent du vuide dans un air quoique très groſſier, eſt preſque tout à fait inſenſible.

V. Comme on a vu par la premiere & la troiſieme Expérience, que la diſtance de foyer d'une lentille ſimple de verre diminue à meſure que la chaleur en augmente, on ne ſera pas peu ſurpris d'apprendre par les autres expériences, qu'une lentille compoſée de deux méniſques de verre, dont la cavité eſt remplie d'un fluide quelconque, acquiert une diſtance de foyer plus grande lorſqu'on augmente la chaleur, & plus petite lorſqu'on la diminue.

VI. Mais ici on ſe précipiteroit dans ſon jugement, ſi l'on en vouloit conclure, que l'eau, ou bien tel autre fluide quelconque dont on a rempli les méniſques, eſt d'une nature contraire au verre, & qu'elle produit une moindre réfraction lorſqu'il fait chaud, que lorſqu'il fait froid. La diſcuſſion de ces Expériences demande

un examen beaucoup plus soigneux, avant qu'on puisse prononcer là-dessus. Je réserve cette recherche à la fin de ma seconde Partie.

SECONDE PARTIE.

Essai pour déterminer par les Expériences précédentes la quantité de l'influence de la chaleur sur la force réfractive du verre & des fluides.

D'abord, pour déterminer l'augmentation que reçoit la réfraction du verre dans les divers degrés de chaleur, je commence par l'examen de la premiere & de la troisieme Expérience, dont le précis est contenu en ce peu de mots.

I. Exp. *Un verre objectif, dont la distance de foyer étoit de* $16\frac{1}{4}$ *pouces, le degré de chaleur étant* 14 *degrés, n'avoit que* 16 *pouces de foyer, lorsqu'il fut échauffé au degré* 80. Donc un accroissement de 66 degrés de chaleur a diminué la distance de foyer de sa 65eme partie.

III. Exp. *Un verre objectif, dont la distance de foyer étoit de* 49 *pouces, le degré de chaleur étant* — 3, *n'avoit que* $48\frac{1}{2}$ *pouces de foyer, lorsqu'il fut échauffé à* 30 *degrés de chaleur.*. Donc un accroissement de 33 degrés dans la chaleur a produit une diminution dans la distance de foyer qui en étoit la 97eme partie.

Réflexions.

I. Comme 66 degrés de chaleur ont produit $\frac{1}{65}$ partie de diminution dans la distance de foyer, 33 degrés n'en auroient du produire que $\frac{1}{130}$; or ils ont produit $\frac{1}{97}$. L'on pourroit en conclure que, lorsqu'il fait bien froid, un même changement dans le thermometre est plus efficace sur la distance de foyer des verres, que lorsqu'il fait chaud. Mais il faut bien considérer, que ces sortes d'expériences ne sont pas susceptibles d'autant de précision qu'il en faudroit pour s'assurer sur ce point. Il se pourroit bien à la rigueur, que les 66 degrés eussent causé un changement de $\frac{1}{80}$, & les 33 degrés un de $\frac{1}{160}$. Un grand

grand nombre d'expériences faites en différentes saisons décideroient peut-être cette question, surtout si l'on employoit des verres objectifs d'une plus grande distance de foyer.

II. Ici il suffit d'avoir incontestablement prouvé par des expériences, que la chaleur diminue les distances de foyer des verres, & que le froid les augmente: & je ne m'écarterai pas sensiblement de la vérité, en supposant que 66 degrés de changement sur le Thermometre de Réaumur en produisent un de $\frac{1}{80}$ dans la distance de foyer d'un verre, & que 33 degrés sur le Thermometre répondent à un changement de $\frac{1}{120}$ dans la distance de foyer. D'où l'on peut assés probablement conclure que N degrés sur le Thermometre répondent à $\frac{N}{3960}$, ou bien à $\frac{N}{4000}$ de changement sur la distance de foyer.

III. Par conséquent, si dans une température où le Thermometre de Réaumur est à M degrés, la distance de foyer d'un verre est $= k$, nous serons en état d'assigner la distance de foyer de ce même verre pour toute autre température. Car, quand le même Thermometre sera à M + N degrés, la distance de foyer de notre verre sera =

$$k\left(1+\frac{N}{4000}\right).$$

Or, pour un plus grand froid, lorsque le Thermometre montre M — N degrés, la distance de foyer sera

$$k\left(1+\frac{N}{4000}\right).$$

IV. Maintenant, pour connoitre l'augmentation de la force réfractive du verre, qui résulte de cette variation que nous venons d'observer dans la distance de foyer des lentilles, posons, pour la température où le Thermometre de Réaumur montre M degrés, la raison de réfraction de l'air dans le verre comme m à 1, & que les lettres a

&

& b marquent les rayons des deux faces du verre. Soit ensuite la distance de foyer de ce verre $= k$. Or, pour une autre température, où le thermometre montre M + N degrés, indiquons les mêmes quantités par les lettres m', a', b', & k'.

V. Cela posé, les principes de Dioptrique nous fournissent ces équations:

$$(m-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k} \quad \& \quad (m'-1)\left(\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}\right)=\frac{1}{k'}.$$

Or nous venons de voir que $k'=k\left(1-\frac{N}{4000}\right)$,

& partant $\frac{1}{k'}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}\right)$;

ensuite, puisque la plus grande chaleur de M + N degrés augmente les dimensions du verre, supposons

$$a'=a\left(1+\frac{N}{\lambda}\right) \quad \& \quad b'=b\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

où λ marque un nombre extrèmement grand, qui passe bien selon toute apparence un million. Nous aurons donc

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{N}{\lambda}\right),$$

& partant notre seconde équation prendra cette forme:

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{N}{\lambda}\right)=\frac{1}{k}\left(1-\frac{N}{4000}\right), \text{ ou bien}$$

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}\right)\left(1+\frac{N}{\lambda}\right), \text{ ou encore}$$

$$(m'-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{N}{4000}+\frac{N}{\lambda}\right).$$

Cet-

Cette équation étant divisée par la premiere fournit

$$\frac{m' - 1}{m - 1} = 1 + \frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}, \quad \text{ou}$$

$$\frac{m' - m}{m - 1} = \frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}.$$

VI. Donc, puisque pour la réfraction du verre on a $m = 1,54$ à peu près, ce qui suffit, puisqu'il s'agit ici principalement du changement que la réfraction éprouve par les différens degrés de chaleur, nous aurons

$$m' - m = \frac{0,54\ N}{4000} + \frac{0,54\ N}{\lambda},$$

ou bien, sans nous arrêter à quelque hypothese, nous aurons en général $m' = m + (m - 1)\left(\frac{N}{4000} + \frac{N}{\lambda}\right)$.

VII. Si je supposois $\lambda = 400000$, cette formule deviendroit $m' = m + (m - 1) \cdot \frac{N}{3960}$. Or il s'en faut beaucoup que nous soyons si assurés du nombre 4000, que celui de 3960 ne puisse aussi bien avoir lieu: donc, puisque le nombre λ est probablement plus petit que 400000, il est évident que nous pouvons hardiment négliger la fraction $\frac{N}{\lambda}$, & nous le pourrions, quand même le nombre λ seroit encore plus petit que 400000. Par conséquent, le changement que le verre éprouve par les différens degrés de chaleur, n'est absolument d'aucune conséquence; & dans ces recherches nous pourrons entierement négliger l'effet de la chaleur sur le volume du verre, de même que sur les autres corps transparens. En tout cas, au lieu de la fraction $\frac{1}{4000}$ conclue par les expériences, nous pourrions nous servir d'une fraction tant soit peu plus grande $\frac{1}{3800}$, qui conviendroit aussi bien aux expériences.

VIII. Cependant, pour ne laisser aucun doute sur cet article, j'observe que dans le Thermometre de M. de l'Isle chaque degré répond à un changement de $\frac{1}{10000}$ partie, produit dans le volume entier du Mercure selon les trois dimensions à la fois; donc chaque dimension n'en reçoit un que de $\frac{1}{30000}$ partie. Et partant, si le verre à cet égard étoit semblable au vif-argent, chaque degré du Thermometre de M. de l'Isle changeroit les rayons des faces d'un verre de $\frac{1}{30000}$ partie. Or les degrés du Thermometre de Réaumur étant précisément deux fois plus grands, un tel degré y produiroit un changement de $\frac{1}{15000}$ partie, ou bien le nombre λ seroit $= 15000$; donc $\frac{1}{4000} + \frac{1}{15000}$ donneroit $\frac{1}{3100}$. Mais le verre est sans doute moins assujetti à de tels changemens que le Mercure.

IX. En établissant donc cette équation:

$$m' - m = (m - 1)\frac{N}{3600},$$

puisque $m - 1 = 0,54$, on aura

$$m' - m = \frac{N}{6666} = \frac{3N}{20000} = 0,00015\,N,$$

ou bien chaque degré de chaleur sur le Thermometre de Réaumur produiroit une augmentation de 0,00015 dans le nombre m, dont la valeur moyenne est 1,54. Donc, lorsque la chaleur est augmentée de 66 degrés, l'accroissement du nombre m doit être $= 0,01$, ou bien ce nombre de 1,54 devient 1,55.

Maintenant, pour connoitre de quelle maniere la chaleur influe sur la force réfractive des fluides, il suffira d'avoir en général examiné la seconde & la quatrieme Expérience; car, quoique ces expériences ne regardent que l'eau pure, on en pourra toujours conclure par analogie la quantité du changement des autres fluides.

Voici d'abord le contenu de ces deux Expériences.

II.

III. Exp. *Un verre objectif composé de deux ménisques de la seconde paire, dont la cavité étoit remplie d'eau bouillante, avoit son foyer à 45 pouces; or, après l'avoir laissé refroidir jusqu'à 34 degrés du Thermometre de Réaumur, la distance de foyer fut 41½ pouces.*

Donc 46 degrés de chaleur de ce Thermometre avoient augmenté la distance de foyer de sa $\frac{1}{9}$ partie; & partant N degrés l'augmenteront de sa partie $\frac{N}{419}$.

IV. Exp. *En se servant de l'autre objectif composé de deux ménisques de la premiere paire, dont la cavité étoit remplie d'eau; le Thermometre montrant ½ degré, la distance de foyer fut observée de 31½ pouces.* Ensuite, ayant chauffé cet objectif jusqu'à 30 degrés, la distance de foyer s'est trouvée de 37½ pouces; & partant 29½ degrés de plus de chaleur ont augmenté la distance de foyer de 6 pouces, ou bien de $\frac{4}{21}$ partie; donc N degrés produiroient un changement de $\frac{N}{155}$, qui est certainement très considérable.

Examen.

I. Posons donc, pour entreprendre cet examen, lorsque le Thermometre de Réaumur montre M degrés, la raison de réfraction de l'air dans le verre comme m à 1, & de l'air dans l'eau comme n à 1, & que les rayons des quatre faces de nos deux ménisques soient exprimés par les lettres a, b, c, d, où a & d se rapportent aux faces extérieures entant que convexes, & b & c aux internes concaves. Soit enfin la distance de foyer de toute la lentille composée $= k$. Or, pour le cas où le même Thermometre montre M + N degrés, au lieu de ces mêmes lettres, j'écrirai

$$m', n', a', b', c', d' \ \& \ k'.$$

II. Cela posé, les principes de Dioptrique nous fournissent ces deux équations:

 (n—

$$(n-1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m-1)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k},$$

$$(n'-1)\left(\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right)-(m'-1)\left(-\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}-\frac{1}{d'}\right)=\frac{1}{k'}.$$

Suppoſons comme ci-deſſus

$$a'=a\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ b'=b\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ c'=c\left(1+\frac{N}{\lambda}\right);\ d'=d\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

pour réduire notre ſeconde équation à cette forme:

$$(n'-1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m'-1)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k'}\left(1+\frac{N}{\lambda}\right),$$

& partant

$$(n'-n)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(m'-m)\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{k'}\left(1+\frac{N}{\lambda}\right)-\frac{1}{k}.$$

III. Maintenant, pour la premiere de ces deux dernieres expériences, nous avons $k'=k\left(1+\frac{N}{419}\right)$,

ou bien $\frac{1}{k'}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{N}{419}\right)$.

Or, par le devis des deux méniſques dont cet objectif étoit composé, nous avons

$a=-\frac{15}{2}$ pouces; $b=\frac{5}{2}$; $c=2$ & $d=2$ à peu près;

donc $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{9}{10}$ & $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\frac{8}{15}$.

Prenant donc $m=1,54$ & $n=1\frac{1}{3}$, nous aurons

$\frac{1}{k}=\frac{3}{10}-\frac{36}{125}=\frac{3}{250}$, & partant

$\frac{9}{10}$

$$\tfrac{9}{10}(n' - n) - \tfrac{8}{15}(m' - m) = \tfrac{3}{250}\left(\frac{N}{\lambda} - \frac{N}{419}\right).$$

IV. Ayant donc trouvé par les premieres expériences $m' - m = \frac{N}{6666}$, nous obtiendrons pour la réfraction de l'eau:

$$\tfrac{9}{10}(n'-n) = \frac{N}{12500} + \tfrac{3}{250}\left(\frac{N}{\lambda} - \frac{N}{419}\right) = \frac{N}{12500} - \frac{N}{34916} + \frac{3N}{250\lambda},$$

donc $n' - n = \frac{N}{11250} - \frac{N}{31425} + \frac{N}{75\lambda}$, ou bien

$$n' - n = \frac{N}{17523} + \frac{N}{75\lambda};$$

où, à cause de λ, le nombre 17523 peut être pris un peu plus petit.

V. De là il est clair que, nonobstant que les expériences ayent produit un effet contraire, la chaleur augmente la réfraction de l'eau aussi bien que celle du verre: & pour pouvoir mieux comparer ce double effet, je me servirai pour le verre de la formule moins limitée $m' - m = (m - 1)\frac{N}{3600}$; & puisque pour l'eau j'ai supposé $n - 1 = \frac{1}{3}$, le changement dans la réfraction de l'eau sera exprimé de cette sorte:

$$n' - n = (n - 1)\frac{N}{5841};$$

où, au lieu du nombre 5841, il faudra en prendre un plus petit.

VI. On voit donc que pour le verre la valeur de la formule $\frac{m' - m}{m - 1} = \frac{N}{3600}$ est plus grande que pour l'eau celle de la formule semblable $\frac{n' - n}{n - 1} = \frac{N}{5841}$. Mais je remarque de plus que les va-

 leurs

leurs de ces deux formules $\frac{m' - m}{(m - 1)^2}$ & $\frac{n' - n}{(n - 1)^2}$ deviennent à peu près égales l'une & l'autre $= \frac{N}{1945}$,

Ne pourroit-on pas conclure de là, que les véritables changemens dans la réfraction de tous les corps transparens doivent être estimés par la forme $\frac{m' - m}{(m - 1)^2}$, qui représente le différentiel de la formule $\frac{1}{m - 1}$? De sorte que cette expression $\frac{1}{m - 1}$ souffriroit pour tous les corps transparens le même changement. Cependant cette derniere détermination n'est qu'une conjecture, mais qui mérite assés d'attention pour l'examiner plus soigneusement.

Il conviendroit pour cet effet de faire un grand nombre d'expériences au sujet du changement produit par les différentes températures sur la distance de foyer des lentilles simples, pour en pouvoir ensuite conclure avec plus d'exactitude, qu'il ne m'a été permis ici, l'augmentation qui en résulte dans la force réfractive du verre. Ensuite, passant aux autres expériences par lesquelles on observera les changemens produits par les différens degrés de chaleur dans la distance de foyer des objectifs composés de deux ménisques de verre & d'un fluide quelconque enfermé entre deux, on sera non seulement en état de déterminer par là la variation qui en résulte dans la force réfractive de ces fluides, mais on ne manquera pas encore de faire plusieurs belles découvertes concernant la nature essentielle de la réfraction des rayons, & propres à en perfectionner la Théorie.

NOU-

NOUVELLES RECHERCHES PRATIQUES
SUR
LES ABERRATIONS DES RAÏONS RÉFRACTÉS,
ET SUR LA PERFECTION DES LUNETTES. (*)
PREMIER MÉMOIRE.

PAR M. BEGUELIN.

La théorie de l'aberration, tant de sphéricité que de réfrangibilité, a fait depuis quelque tems l'objet des recherches des plus grands Géometres. Mrs. Euler, Clairaut & d'Alembert ont épuisé ce sujet, ou peu s'en faut; & s'il étoit possible d'ajouter quelque chose après eux à la perfection de cette théorie, ce ne seroit assûrément pas moi qui l'entreprendrois.

Mais, si la théorie des lunettes est portée au plus haut degré de précision, on ne sauroit dissimuler que jusqu'ici le succès dans la pratique n'a pas rempli entierement l'attente des Géometres; tandis que les Artistes Anglois, font, & peut-être sans s'attacher à la théorie, des lunettes dont l'effet est surprenant, celles qu'on a exécutées sur les calculs les plus exacts, ou n'ont point réussi, ou n'ont produit qu'un effet assez médiocre, en comparaison des lunettes d'Angleterre.

Diverses causes peuvent avoir contribué à ce paradoxe. D'abord les formules des Géometres sont trop générales, & précédées d'un calcul trop compliqué, pour qu'un Opticien, ou un Artiste, quelque intelligent qu'on veuille le supposer, ait la force ou du moins le cou-

(*) Lû à l'Académie le 3 Nov. 1768.

courage d'y appliquer le calcul numérique, indispensable dans la pratique. 2°. Cette généralité des formules fait que les Géometres eux-mêmes sont réduits à une espece de tâtonnement, lorsqu'il est question d'en tirer des mesures déterminées, afin de n'avoir pas des raïons de faces trop courts, ou trop longs, & des ouvertures trop petites. 3°. Il se peut aussi qu'obligés de négliger de petites quantités pour ne pas rendre ces formules trop incommodes, ces quantités, insensibles dans des lunettes d'un petit foïer, & d'une ouverture médiocre, ne le soient plus lorsqu'on exécute des lunettes d'un foyer plus long, & d'une ouverture plus considérable. 4°. Enfin le défaut de précision dans la mesure des rapports des réfractions & des dispersions, peut non seulement rendre inutile la précision géométrique des formules que la théorie donne, mais il peut encore être cause que les lunettes construites sur ces formules aïent une plus grande aberration que celle qu'on cherchoit à détruire par ce calcul scrupuleux. La suite de ce Mémoire fournira plus d'un exemple de ces inconvéniens.

J'ai cherché, par ces considérations, à envisager les aberrations sous un nouveau point de vue, qui d'un côté fût par sa simplicité à la portée de tout Opticien médiocrement intelligent, & qui de l'autre tînt immédiatement à la pratique. Puisque c'est elle qui fait le but de toutes ces recherches, il semble plus simple de commencer d'abord par les considérations pratiques, d'où l'on peut s'élever, dès qu'on le voudra, à des formules plus générales, que de débuter par celles-ci, pour les limiter ensuite avec assez de peine, & au milieu d'une espece d'obscurité, sur les restrictions que la pratique exige.

I. Le défaut des lunettes résulte, comme chacun sait, des deux aberrations, l'une de *réfrangibilité*, & l'autre de *sphéricité*. On entend par *aberration* en général, *aberration de longueur*, ou *diffusion*, l'intervalle entre les deux points de l'axe de la lunette, où deux raïons, partis d'un même point de l'objet, coupent cet axe après leurs réfractions. La sphéricité des lentilles fait que de deux raïons homogenes, partis du point de l'objet où l'axe prolongé en avant le couperoit, celui

qui

qui traverse l'objectif à une très petite distance du centre, va couper l'axe à une plus grande distance de l'objectif, qu'on nomme la *distance focale*, & que l'autre raïon qui traverse la lentille à sa circonférence, va couper cet axe dans un point moins éloigné, qu'on nomme le *foïer des raïons extremes*. L'intervalle entre ces deux foïers fait l'aberration de *sphéricité*. Je ne parle point de l'abetration *latérale*, ou du demi-diametre de confusion qui lui est égal; elle est en ce sens le quart de l'aberration en longueur, multipliée par la demi-ouverture, & divisée par la distance focale. Ainsi, quand on détruit l'une de ces aberrations, on détruit aussi l'autre. Il suffit ici de considérer l'aberration de longueur, ou la diffusion des raïons sur l'axe.

La diverse réfrangibilité des raïons hétérogenes, découverte par *Newton*, fait qu'un raïon unique tombant de l'objet sur la lentille s'y disperse en plusieurs raïons colorés, qui se réfractent inégalement. Le raïon violet va couper l'axe au point le moins éloigné de la lentille, & le raïon rouge coupe cet axe au point le plus reculé. L'intervalle entre ces deux distances, pris sur l'axe, est ce qu'on nomme *l'aberration de réfrangibilité;* & cet espace de diffusion est, selon Mr. Newton, dans le verre commun, environ la $\frac{1}{27}$ partie de la distance focale, pour les raïons qui passent près du centre de l'objectif.

Ainsi, dans la fig. 1., si MF est la distance focale, F sera le point où le raïon parallele qui traverse la lentille à la petite distance hM du centre coupe l'axe. Le raïon extreme, passant à la distance AL, sera réfracté en f; & ce même raïon, dispersé en plusieurs raïons colorés, aura le foïer des raïons violets en v, & celui des raïons rouges en r; ici l'aberration de réfrangibilité seroit $= vr$; celle de sphéricité $= f\text{F}$; l'aberration totale des raïons rouges seroit $= f\text{F} - fr$; celle des raïons violets au contraire $= f\text{F} + fr$, parce que $vf = fr$. Et en général l'aberration totale sera toujours l'aberration de sphéricité, augmentée ou diminuée de la moitié de l'aberration de réfrangibilité. Planche X. Fig. 1.

II. De là il est aisé de comprendre que, si l'aberration de sphéricité étoit détruite, les raïons moïens entre le rouge & le violet, c. à d. les raïons jaunes verdâtres, tomberoient précisément au foyer commun, qui est la distance focale, que les rouges tomberoient au delà de ce point à une distance d'environ la $\frac{1}{5}$ du foïer, & que les violets se rapprocheroient d'autant en deçà du foïer vers la lentille.

Si, en échange, l'aberration de réfrangibilité est détruite par la combinaison de deux especes de verre, alors à la vérité les raïons rouges & violets coïncident dans un même point sur l'axe avec le raïon moïen, & la diffusion des couleurs évanouit; mais, comme l'aberration de sphéricité subsiste, ce point où les raïons hétérogenes se réunissent n'est pas à la distance focale, pour les raïons qui ont passé près de la circonférence de l'objectif.

Il est donc nécessaire de détruire, au moins sensiblement, l'une & l'autre aberration pour avoir des objectifs excellens; mais en travaillant à les détruire, il est nécessaire aussi de conserver à la lunette une ouverture proportionnée au grossissement, & par conséquent à la longueur du foïer.

Au reste, si j'appuie dans ce Mémoire sur des choses déjà connues, c'est, comme je l'ai insinué dès l'entrée, que j'ai principalement en vue ici la pratique, & l'utilité des Artistes, auxquels ces matieres ne sauroient être exposées trop clairement.

III. Pour ce qui concerne l'aberration de réfrangibilité, j'ai montré dans mon Mémoire sur les couleurs prismatiques, qu'il suffit, pour la rendre insensible dans les objectifs de deux ou de plusieurs verres, de mettre entre la somme des arcs de courbures convexes, & celle des arcs de courbures concaves, le rapport inverse de celui qu'on aura découvert entre la dispersion des deux especes de verres qu'on emploiera. Si par ex. la dispersion du *crownglass* $= dm$, est à celle du *flintglass* $= dn$, comme 10 à 16, la somme des arcs convexes du *crownglass* doit être à la somme des arcs des faces concaves du *flintglass*,

glass, comme 16 à 10; bien entendu cependant que les courbures soient assez petites pour que le demi-arc de la face la plus courte puisse être pris sans erreur sensible pour son sinus; ce qu'on peut toujours effectuer en multipliant les verres de l'objectif. Dans la rigueur géométrique, la proportion inverse doit être entre le rapport des dispersions, & celui des sommes des sinus des demi-courbures convexes & concaves.

IV. Quant à l'aberration de sphéricité, elle a trois causes. L'une, c'est que les réfractions suivent les rapports des sinus, & non ceux des angles mêmes. Il n'est donc pas possible que le rapport entre l'angle de la premiere incidence & de la derniere réfraction soit le même pour le raïon qui traverse les lentilles fort près du centre, & pour celui qui les traverse près de la circonférence. Donc, à mesure que l'ouverture, & par conséquent l'arc de courbure, augmente dans un objectif d'un foïer donné, à mesure aussi le foïer des raïons extremes s'écartera du foïer des raïons du centre.

Soit, par ex. l'objectif plan-convexe ALM, que le raïon parallele *ra* traverse à la petite distance *al* de l'axe LF, & qu'un autre raïon parallele traverse à la distance AL; si l'arc *a*M est de 2′, & l'arc AM $= 10^d$, & que la raison de réfraction soit $m = \frac{3}{2}$, l'angle de réfraction du raïon *ra*F sera à celui d'incidence comme 3 à 2, puisqu'il sera de 3′, parce que dans ces petits angles la raison des sinus ne differe pas de celle des arcs. Mais l'angle de réfraction du raïon extreme RA*f* sera plus grand que dans cette raison de 3 à 2; il sera à son angle d'incidence comme $3 + \frac{1}{10}$ à 2; donc sa convergence à l'axe sera à la convergence du raïon au centre *ra*F dans une plus forte raison que n'est celle de leurs arcs AM, *am*, qui est comme 300 à 1, & par conséquent le raïon extreme coupera l'axe en un point plus près de la lentille, & le raïon au centre dans un point plus reculé. Fig. 2.

La seconde cause de l'aberration de sphéricité, & qui auroit lieu indépendamment de la premiere, nait immédiatement de la grandeur

 des

des ouvertures, ou du diametre des objectifs; quand la réfraction suivroit la raison des angles, comme on l'avoit crû jusqu'à *Kepler*, il faudroit néanmoins envisager les ouvertures al, AL, nécessaires au passage des raïons du centre & de la circonférence, comme les sinus des arcs aM, AM. Mais ces mêmes ouvertures sont aussi les sinus des angles aFM, AfM, sous lesquels ces raïons rompus vont couper l'axe. Soit le raïon de courbure Ca = r, le raïon de l'angle au foïer aF = F, l'angle aCM = c, l'angle au foïer aFM = A, la demi-ouverture al = x; on a la proportion: $\sin c : \sin \text{tot} = x : r$, ou $r = \frac{x}{\sin c}$, & par la même raison $F = \frac{x}{\sin A}$; donc $F = \frac{r \sin c}{\sin A}$.

De même, posant l'arc AM = C, l'angle AfL = Φ, & le raïon Af = f, on aura

$$\sin C : \sin \Phi = f : r, \quad \text{ou } f = \frac{r \sin C}{\sin \Phi}.$$

Or, pour le raïon parallele raF, qui passe très près de l'axe, le sinus al se confond avec l'arc extrèmement petit aM; & si la raison de réfraction du verre dans l'air est = m, l'angle d'incidence étant = c. celui de réfraction sera = mc, d'où soustraisant l'angle d'incidence, reste l'angle de convergence à l'axe $A = (m - 1)\, c$, & par conséquent aiant $r : F = A : c$, on a aussi $r : F = (m - 1)\, c : c$, ou $F = \frac{r}{m - 1}$; ce qui est la formule connue de la distance focale pour une surface courbe; ou, puisqu'on a $r = \frac{x}{\sin c}$, l'expression de cette distance focale sera $F = \frac{x}{(m - 1) \sin c}$.

De là il est aisé de voir que, si le raïon parallele traverse deux ou plusieurs surfaces convexes, dont les demi-arcs d'ouverture soient

c, c',

c, c', c'', c''' &c. & qu'on puiſſe négliger les épaiſſeurs & les diſtances des verres, l'expreſſion de la diſtance focale ſera

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''' + \&c.},$$

& que, ſi l'on peut ſubſtituer ſans erreur ſenſible les arcs aux ſinus, cette formule deviendra $F = \frac{x}{(m-1)(c + c' + c'' + c''' + \&c.},$ en donnant à l'arc d'une minute ſa valeur connue par les tables, $=$ 2, 909.

A l'égard des raïons extremes RAf, on auroit de même l'angle $\varphi = (m-1)\ C$, en poſant la réfraction en raiſon des angles, ce qui donneroit $F : f = \frac{\sin c}{(m-1)\ c} : \frac{\sin C}{(m-1)\ C}$, & en mettant les arcs pour leurs ſinus, on auroit $F = f$. Mais cette égalité n'empêcheroit pas qu'il n'y eût aberration; parce que F, & f, repréſentent, non la diſtance de foyer, mais l'hypothenuſe du triangle rectangle dont le petit côté eſt la demi-ouverture de la lentille, & l'autre la diſtance de foïer, ou le coſinus de l'angle à l'axe. Or, pour les raïons qui paſſent tout près de l'axe, nous avons pu confondre le ſinus totus avec le coſinus de l'angle A, ou l'hypothenuſe aF avec le grand côté MF, pour en conclure la diſtance focale; parce que le petit côté al, ou l'ouverture x, eſt cenſée infiniment petite: mais, quant au raïon extreme, comme l'ouverture AL a une grandeur conſidérable, on ne peut plus prendre l'hypothenuſe Af pour le grand côté Lf du triangle, ou ſubſtituer le coſinus de l'angle φ à ſon ſinus totus.

D'où il eſt évident qu'il n'eſt abſolument pas poſſible de détruire entierement cette aberration de ſphéricité dans un objectif ſimple; puiſqu'il faudroit pour cet effet que les angles à l'axe des raïons du centre & de la circonférence euſſent le même coſinus, ce qui ſuppoſeroit la même ouverture pour tous les raïons, c. à d. qu'ils paſſaſſent tous à la même diſtance de l'axe.

La

La troisieme cause de l'aberration de sphéricité est encore indépendante des deux premieres; elle résulte de ce que le foïer des raïons extremes est rapproché de la lentille de toute la longueur du sinus verse de la courbure postérieure de l'objectif. La distance focale du raïon qui passe près de l'axe se mesure depuis la face postérieure M de la lentille, parce que la flêche *l*M d'un arc infiniment petit *a*M, est insensible. Mais la distance de foïer d'un raïon qui passe près de la circonférence doit se mesurer du point L où le diametre de l'ouverture coupe l'axe; parce que la flêche d'un arc AM de quelques degrés, quand l'ouverture est de quelques pouces, n'est pas une quantité à négliger dans l'aberration.

V. Il seroit très facile de faire cesser cette derniere cause de l'aberration dans un objectif; il n'y auroit qu'à faire la face postérieure plane. Mais comme, pour conserver la même longueur de foïer, il faudroit augmenter la courbure de la face antérieure, l'aberration qui résulte de la premiere cause en devient plus considérable. Il y a donc ici un *minimum*, que les Géometres ont déterminé depuis longtems, en donnant la proportion entre les courbures des deux faces la plus propre pour diminuer l'aberration de sphéricité dans un objectif simple.

Il est de même assez facile de diminuer autant qu'on le voudra la premiere cause de l'aberration, celle qui résulte de la raison des réfractions, en multipliant les verres des objectifs; parce qu'en diminuant la courbure de chaque verre, la raison des sinus se rapproche extrèmement de la raison des angles, & qu'on peut substituer l'une à l'autre sans une erreur sensible; on peut même détruire ce reste d'erreur en faisant la derniere face concave, puisqu'alors on projette d'autant plus loin le foïer des raïons extremes. Mais la seconde cause d'aberration, celle qui résulte immédiatement de la grandeur de l'ouverture, subsiste toujours; & c'est celle-là qui dans les objectifs combinés produit la plus grande confusion.

VI. Pour appliquer tout de suite à la pratique les recherches que je me propose de faire sur l'aberration, il faut fixer une distance focale,

cale, & une ouverture qui y ſoit proportionée; & dans cette vue, le plus ſimple c'eſt de partir de l'expérience. Un célebre Géometre aſſure, d'après le rapport de M. Short à la Société Roïale, que M. Dollond a conſtruit une lunette achromatique de 3 pieds & demi de foïer, portant $3\frac{1}{2}$ pouces d'ouverture, & groſſiſſant 150 fois le diametre des objets. L'objectif de cette lunette eſt compoſé de deux lentilles convexes de *crownglaſs*, & d'une concave de *flintglaſs* placée au milieu. L'Académie poſſede actuellement une excellente lunette de M. Dollond le fils, conſtruite ſur les mêmes proportions.

Suppoſons donc une diſtance focale de 100 parties, ou $F = 100$, & une ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, on aura la demi-ouverture $x = \frac{F}{24} = 4,1666$ - - - Comme on ne ſe ſert de lunettes que pour voir plus diſtinctement les objets éloignés, que pour cet effet il faut que la lunette les groſſiſſe à proportion de leur éloignement, & qu'elle les éclaire auſſi en raiſon de leur groſſiſſement, le diametre de l'ouverture doit augmenter avec la diſtance focale, ſi l'on emploïe le même oculaire. Mais, tant qu'on peut ſe promettre le même effet d'une plus courte lunette, on n'en emploïera pas inutilement une plus longue; ainſi elle doit groſſir à proportion de ſa longueur, & être éclairée de même. Il eſt vrai qu'en proportionant toujours le diametre de l'ouverture à la longueur du foïer, les lentilles de l'objectif deviendroient d'une grandeur deméſurée, & même impraticable dès qu'il ſagiroit de lunettes de plus de 8 à 10 pieds; il eſt vrai encore que ces mêmes lentilles pour des lunettes de poche, auroient une moindre ouverture qu'on ne leur en donne aujourd'hui; il eſt vrai enfin, qu'un même oculaire ne ſauroit ſervir à des lunettes de toutes longueurs, puiſque l'image augmentant avec le foïer de l'objectif, un petit oculaire ne l'embraſſeroit plus qu'en partie, ce qui rétréciroit le champ, ſi l'on n'y remédioit par d'autres expédiens. Mais ces conſidérations n'empêchent point notre ſuppoſition fondée ſur l'égalité de clarté dans l'image;

mage; parce que le but qu'on se propose c'est d'avoir des lunettes de 3 jusqu'à 6 pieds au plus, qui tiennent lieu des plus longues qu'on ait jamais emploïées; or, dans les lunettes de cette grandeur, la proportion que j'adopte est la plus convenable pour permettre un grossissement tel qu'on peut le désirer. Et d'ailleurs, dès que nous connoîtrons l'aberration que produit l'ouverture donnée, rien n'est plus aisé que d'en conclure l'aberration pour une ouverture telle que le cas particulier l'exigera, puisque les aberrations croissent & décroissent comme les quarrés des diametres des ouvertures.

VII. Cela posé, tout ce qui nous reste à faire, c'est de chercher quel doit être l'angle BFM = A, sous lequel un raïon parti de la circonférence de la derniere face de l'objectif couperoit l'axe, s'il le coupoit précisément au point F de la distance focale. J'appellerai cet angle A qui sera ma mesure fixe, *l'angle au foïer*. Ensuite il faut trouver sous quel angle $A f L = \Phi$, un raïon parallele, après avoir traversé tous les verres de l'objectif près de la circonférence, coupe effectivement l'axe en vertu de sa derniere réfraction. J'appellerai cet angle Φ, *l'angle à l'axe;* & l'excès de cet angle-ci sur l'angle au foïer, sera l'angle GBF $= \Phi - A$, que j'appellerai l'angle *d'aberration*; d'où l'on pourra conclure immédiatement l'aberration GF elle-même, en y ajoutant la flêche LM $= fG$, si la derniere face est convexe, ou en l'en retranchant, si cette face est concave.

Fig. 3.

VIII. La mesure fixe, ou l'angle au foïer = A, se trouve sans difficulté. Il a pour sinus la demi-ouverture BM $= x$, & pour raïon l'hypothenuse BF du triangle rectangle, dont les côtés sont la distance focale MF = 100, & la demi-ouverture BM = 4, 1666. On a donc le sinus de l'angle de mesure $\sin A =$

$$\frac{4,1666}{\sqrt{(100^2 + 4,1666^2)}} = 0,04163056;$$ ce qui répond à l'angle de $2°.\ 23',156726 = 143',156726$. On peut encore trouver cet angle au foïer plus aisément en prenant la distance focale MF, pour la

la cotangente de cet angle, & la demi-ouverture BM pour le sinus totus. On a $\frac{F}{24}$: F = sin tot : cotang A = 24; ce qui répond à l'angle $2°, 23', 157564$; la différence entre ces deux valeurs n'est que de $0', 0008$, & la valeur moïenne qui en résulte est A = $143'$, 157145.

IX. J'ai déjà donné dans mon Mémoire sur les prismes achromatiques la formule de l'angle à l'axe; elle résulte immédiatement de la route du raïon au travers des lentilles. Si la derniere face est convexe, quel que soit le nombre des verres, cet angle est celui de derniere réfraction, moins le demi-arc de la derniere face. Si au contraire elle est concave, c'est le demi-arc de sa courbure, moins l'angle de derniere réfraction. Cette formule devient extrèmement aisée lorsqu'on peut mettre les arcs à la place de leurs sinus. Car, si les demi-arcs des faces convexes du crownglass sont $= c + c' + c'' + c'''$ &c. & les demi-arcs des faces concaves du flintglass $= k + k' + k'' + k'''$ &c., le rapport de la réfraction du crownglass dans l'air $= m$, celui du flintglass $= n$, on aura l'angle à l'axe $\Phi = (m - 1)(c + c' + c'' + c''' +$ &c.$) - (n - 1)(k + k' +$ &c.$)$. On suppose ici que les raïons d'un même point de l'objet tombent paralleles sur la premiere face de l'objectif, ce qui est le cas qu'on doit supposer dans la pratique; mais la formule est également applicable aux incidences obliques: il ne faut qu'y ajouter, ou en soustraire l'angle de convergence, ou de divergence du raïon incident.

Lorsqu'il sera nécessaire, pour plus de précision, de faire entrer les sinus eux-mêmes dans la formule de l'angle à l'axe, elle n'en devient gueres plus compliquée; mais il faudra alors dans l'application chercher cet angle pour chaque verre séparément, en développant la formule

$$\Phi = m \sin\left(c + c' - \frac{\sin c}{m}\right) - c', \qquad \text{ou}$$

$\phi'' = m \sin\left(c'' + c''' - \frac{\sin(c'' - \phi')}{m}\right) - c'''$, pour les verres convexes, & $\phi' = k' - n \sin\left(k + k' - \frac{\sin(k + \phi)}{n}\right)$, pour les verres concaves. Car, si l'on nomme α & β, l'angle d'incidence & de réfraction sur la face antérieure c d'une lentille convexe; γ & δ, les mêmes angles sur la face postérieure c'; que m soit la raison de réfraction du verre dans l'air; on a par les loix de la réfraction $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{m}$; & $\sin\delta = m \sin\gamma$. Or il est aisé de démontrer, comme je l'ai fait dans le Mémoire cité, que l'on a $\gamma = c + c' - \beta$, & $\phi = \delta - c'$; d'où résulte la formule de l'angle à l'axe

$$\phi = m \sin\left(c + c' - \frac{\sin\alpha}{m}\right) - c',$$

formule qui pour les verres concaves devient

$$\phi = - n \sin\left(k + k' - \frac{\sin\alpha}{n}\right) + k'.$$

En posant donc les raïons paralleles à l'axe pour le premier verre, il est clair que l'incidence de ces raïons sur la premiere face de l'objectif sera un angle α, égal à l'arc de cette face intercepté entre l'axe & le point d'incidence; qu'ainsi pour le premier verre on aura $\alpha = c$, ou $\alpha = k$, selon que ce verre sera convexe ou concave.

Quant aux verres suivans, l'angle d'incidence α sera composé de l'incidence parallele, & de l'angle ϕ du verre précédent. Car cet angle ϕ est l'angle de convergence, ou de divergence, du raïon avec l'axe, ou sa parallele en sortant du verre; le raïon tombe donc avec cette obliquité sur le verre suivant, ce qui donne $\alpha = c''' - \phi$, ou $\alpha = k''' + \phi$, pour telle lentille que l'on voudra, & même pour la premiere, si l'on ne veut pas supposer le cas des raïons paralleles.

X. La

X. La ſeule choſe qui ne ſoit pas de rigueur géométrique dans cette méthode, c'eſt que j'y ſuppoſe que le raïon ſort du dernier verre à la même diſtance x de l'axe, à laquelle il a pénétré la premiere face; mais, outre que cette ſuppoſition n'y eſt pas indiſpenſable, les géometres ſe la permettent également, & elle doit être très admiſſible dans la pratique. Si l'objectif eſt ſimple, il eſt évident que l'épaiſſeur d'une ſeule lentille, ſurtout à ſa circonférence, peut être négligée; ſi au contraire l'objectif eſt composé de pluſieurs verres, le raïon fait dans ſa traverſée des angles alternativement convergens & divergens par rapport à l'axe, ce qui le ſoutient ſenſiblement à la même diſtance de cet axe juſqu'à ſa derniere réfraction, comme on peut aiſément s'en aſſurer par le calcul, en ne donnant aux lentilles que l'épaiſſeur que leur courbure exige. Il y aura quelque légere différence à cet égard, ſelon l'eſpece de verre qu'on placera le premier. Si c'eſt le criſtal d'Angleterre qui eſt placé vers l'objet, il eſt aiſé de comprendre que le raïon parallele commence dès ſon entrée à diverger de l'axe, & que ſi toutes les faces contiguës étoient coïncidentes, & les lentilles alternativement concaves & convexes, le raïon continueroit à diverger de plus en plus pendant toute la traverſée. Si au contraire le premier verre eſt une lentille convexe de crownglaſs, & que les eſpeces alternent, le raïon commencera par converger dans le premier verre, mais il s'écartera enſuite de plus en plus de l'axe, à meſure qu'il traverſera les autres verres dont les faces coïncident. Dans tous les cas, ſi l'ouverture de la derniere face eſt plus grande ou plus petite que celle de la premiere, l'angle à l'axe en ſera à la vérité un peu plus grand, ou un peu plus petit: mais l'angle de meſure, qui ſe regle ſur la même ouverture que l'angle à l'axe, croîtra ou décroîtra ſenſiblement dans la même proportion, & l'aberration de ſphéricité ſera par conſéquent ſenſiblement la même.

XI. Je vais préſentement appliquer cette méthode à la recherche de l'aberration dans les diverſes eſpeces d'objectifs; &, quoique je n'aïe en vue dans ce Mémoire que les objectifs composés de deux ou

de plusieurs verres, je commencerai par l'objectif simple, pour avoir un terme de comparaison.

Comme il n'y a ici que deux faces, l'expression de la distance focale est $F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c')}$; & aiant $F = 100$, $x = \frac{100}{24}$, si l'on pose le rapport de réfraction du verre commun $m = 1,55$, cette expression donne l'équation

$$\sin c + \sin c' = \frac{1}{24 \times 0,55} = 0,0757575 \cdots$$

Or la somme des sinus des faces doit rester constante aussi longtems que le foïer reste le même, de quelque façon que les faces elles-mêmes varient; si l'on prend donc les faces isoscèles, on aura

$$\sin c = \sin c' = 0,0378787 \cdots$$

On trouvera la même valeur de sinus c par la formule ordinaire de la distance focale, où l'on fait entrer le raïon de courbure; elle est pour une lentille isoscele $F = \frac{r}{2(m-1)}$; d'où l'on trouve, en substituant les valeurs de F & m, $r = 110$: or on a toujours $\sin c = \frac{x}{r}$, donc ici $\sin c = \frac{4,1666 \cdots}{110} = 0,0378787 \cdots$, mais ce sinus répond à un angle de $2^\circ.\ 10',24845$. Ainsi, en négligeant les sinus, j'ai l'angle à l'axe

$$\phi = (m-1)\,2c = 1,1 \times 130',24845 = 143',27329$$

d'où retranchant $A = \underline{143,1572}$. (VIII)

reste l'angle d'aberration $\phi - A = 0',11609$,

sans compter la demi-épaisseur de la lentille; une plus grande précision n'étant pas nécessaire encore.

XII.

XII. En poſant la réfraction pour les raïons rouges, $m = 1,54$, & pour les violets, $m = 1,56$, on aura dans cet objectif ſimple iſoſcele l'angle à l'axe des raïons rouges $= 1,08 \times 130',248 = 140',668$, celui des raïons violets ſera $= 1,12 \times 130',248 = 145',978$; ainſi l'angle d'aberration de réfrangibilité ſeroit ici $= 5',31$, ou environ 46 fois plus grand que celui de ſphéricité.

XIII. Conſidérons maintenant un objectif compoſé de deux verres d'eſpece différente; poſons toujours la réfraction du crownglaſs $m = 1,55$, que celle du flintglaſs ſoit $n = 1,6$, & pour ne rien laiſſer d'indéterminé, ſuppoſons encore que la diſperſion du criſtal eſt à celle du verre ordinaire, comme 16 à 10; on aura $dn = 1,6$, & la formule de la diſtance focale,

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c') - (n-1)(\sin k + \sin k')},$$

donnera $24[1,1 \sin c - 1,2 \sin k] = 1$, ſi l'on ſuppoſe les lentilles iſoſceles.

Or, pour détruire l'aberration de réfrangibilité, il faut prendre

$$\sin k : \sin c \; (= r : R) = dm : dn = 10 : 16;$$

ce qui donne $\sin k = 0,625 \sin c$; ainſi la formule donne $24(1,1 - 0,75) \sin c = 1$, ou $\sin c = \frac{10}{84} = 0,1190476$, & par conſéquent $\sin k = 0,07440475$; donc les arcs eux-mêmes ſont

$$c = 410',228532, \quad \& \quad k = 256',0212272.$$

Mais la formule de l'angle à l'axe, en mettant les arcs pour les ſinus, ſeroit ici $\Phi' = (m-1)\,2c - (n-1)\,2k$, ou

$$\Phi' = 1,1 . c - 1,2\,k = 144',026152,$$

d'où retranchant $A = 143,1572$

reſte l'angle d'aberration $= 0',8689$.

XIV. Soit pour le raïon rouge $m = 1,54$; aiant $dn = 1,6$, on aura ici $n = 1,6 - 0,016 = 1,584$; ainsi l'angle à l'axe des raïons rouges sera $\varphi' = 1,08\, c - 1,168\, k = 144',01425$. en posant pour les raïons violets $m = 1,56$, on aura $n = 1,6 + 0,016 = 1,616$; donc $\varphi' = 1,12\, c - 1,232\, k = 144',03805$, d'où l'on voit que le foïer des raïons hétérogenes coïncide sensiblement au même point; & que l'aberration de réfrangibilité est effectivement détruite par cette combinaison; en échange l'aberration de sphéricité a considérablement augmenté; elle ne faisoit dans l'objectif simple qu'un angle de $0',116$ (XI); ici elle en fait un de $0',8689$; elle est donc accrue dans le rapport d'environ 15 à 2. A la vérité dans l'objectif simple, la demi-épaisseur de la lentille s'ajoute encore à l'aberration, au lieu qu'ici elle doit être retranchée, si le flintglass est placé derriere, à cause de sa concavité; mais ces épaisseurs ne sont ordinairement que la moindre partie de l'aberration totale.

XV. Passons à une combinaison de trois verres; deux lentilles de crownglass, & une de flintglass. Ici le verre concave reste le même que dans l'objectif à deux verres. La somme des sinus de courbure de ses deux demi-faces reste $\sin k + \sin k' = 0,14880950$, & pour les faces isosceles, $\sin k = \sin k' = 0,07440475$, ou $k = 256',0210$ (XIII).

La somme des sinus des courbures convexes ne peut pas varier non plus, le foïer restant toujours le même $F = 100$. On a donc $\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''' = 0,2380952$. Mais, comme on a ici quatre faces convexes, si on les suppose isosceles, le sinus de chaque demi-arc de face ne sera plus que $\sin c = 0,0595238$, auquel répond un arc $c = 204',74888$.

Or, en mettant les arcs pour leurs sinus, la formule de l'angle à l'axe qui est ici $\varphi'' = (m - 1)\, 4\, c - (n - 1)\, 2\, k$ devient $\varphi'' = 2,2 \times 204',74888 - 1,2 \times 256',021027$, ou $\varphi'' = 143',222212$; donc l'angle d'aberration $\varphi'' - A = 0',0649$, ce

ce qui n'est qu'environ la moitié de l'aberration de sphéricité d'un objectif simple, & à peine la $\frac{1}{13}$ partie de l'aberration d'un objectif à deux verres.

Au reste, l'angle à l'axe des raïons rouges seroit ici $\Phi'' = 2,16\,c - 1,168\,k = 143',2248$, celui des raïons violets seroit $\Phi'' = 2,24\,c - 1,232\,k = 143',21936$, ce qui donne l'angle d'aberration de réfrangibilité $= 0',027$, où il faut remarquer comme une singularité que le foïer des raïons violets tomberoit un peu plus loin de la lentille que celui des raïons rouges.

XVI. La même méthode donnera sans peine l'angle d'aberration de sphéricité pour un objectif à 4 verres, deux de chaque espece. On a encore ici, en supposant les faces isosceles, sin $c = 0,0595238$ ou $c = 204',7888$; & comme on a sin $k = \frac{0,1488095}{4} = 0,037202375$, d'où l'on tire l'arc $k = 127',9218266$, si l'on prend les arcs pour leurs sinus, la formule, qui est ici $\Phi''' = (m-1)\,4c - (n-1)\,4k$, devient $\Phi''' = 2,2 \times 204',74888 - 2,4 \times 127',9218266$, ou $\Phi''' = 450',44753 - 307',01238 = 143',43515$; donc l'angle d'aberration $\Phi''' - A = 0',2779$.

XVII. Soit maintenant un objectif à 5 lentilles, trois convexes de crownglass, & deux concaves de flintglass: la valeur de sin k & de k est la même qu'à 4 verres. Celle de sin c, en supposant les lentilles isosceles, devient sin $c = \frac{0,2380952}{6} = 0,03968253\ldots$ ce qui répond à l'arc $c = 136',45433573$. Or, en mettant les arcs pour leurs sinus, l'angle à l'axe qui est ici $\Phi^{IV} = (m-1)\,6\,c - (n-1)\,4k$ devient $\Phi^{IV} = 3,3\,c - 24k$, ou $\Phi^{IV} = 450',29942 - 307',01238 = 143',2871$, & par conséquent l'angle d'aberration $\Phi^{IV} - A = 0',1299$. Cette aberration seroit presque 4 fois plus grande que celle d'un objectif à 3 verres, & surpasseroit d'un $\frac{1}{5}$ l'aberration de l'objectif simple.

L'angle

L'angle à l'axe des raïons rouges feroit ici $\Phi^{IV} = 3,24c - 2,336\,k = 143',2866$, celui des violets eſt $\Phi^{IV} = 3,36\,.\,c - 2,464\,k = 143',2871$; par conſéquent l'angle d'aberration de réfrangibilité n'eſt que $0',0005$.

XVIII. Si l'on fait l'objectif de 6 verres, ou trois lentilles convexes de crownglaſs, & trois concaves de flintglaſs, la valeur de ſin c, & de l'arc c, reſte la même qu'à 5 verres (XVII); celle de ſin k devient (en ſuppoſant toujours les faces iſoſceles,) ſin $k = \frac{0,1488095}{6} = 0,024801583$; ce qui donne l'arc $k = 85',27023$. Or, en ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, la formule $\Phi^{V} = (m - 1)\,6\,c - (n - 1)\,6\,k$, devient ici $\Phi^{V} = 3,3\,c - 3,6\,.\,k = 450',29942 - 306',97283 = 143',32659$; donc l'angle d'aberration feroit $= \Phi^{V} - A = 0',1694$.

XIX. Mais, ſi l'objectif eſt compoſé de quatre lentilles de crownglaſs, & de trois de criſtal d'Angleterre, on aura, en poſant les faces égales, ſin k comme (XVIII), ſin $c = \frac{0,2380952}{8} = 0,0297619$; d'où l'on conclut l'arc $c = 102',329092$. En prenant donc toujours les arcs pour leur ſinus, on aura $\Phi^{VI} = (m - 1)\,8\,c - (n - 1)\,6\,.\,k$, ou $\Phi^{VI} = 4,4 \times 102',329 - 3,6 \times 85',270$; donc $\Phi^{VI} = 450',248005 - 306',97283 = 143',275176$; donc l'angle d'aberration $\Phi^{VI} - A = 0',1179$. On trouve de même l'angle à l'axe des raïons rouges $\Phi^{VI} = 4,32\,.\,c - 3,504\,.\,k = 143',27479$; celui des raïons violets fera $\Phi^{VI} = 4,48\,.\,c - 3,696\,.\,k = 143',27556$, d'où réſulte l'angle d'aberration de réfrangibilité $= 0',00077$.

XX. Si l'objectif eſt compoſé de 4 lentilles de chaque eſpece, on aura ſin c, comme dans l'objectif à 7 verres, & ſin $k = 0,01860119$, d'où l'on tire l'arc $k = 63',94978$. La formule donne

ne l'angle à l'axe $\phi^{VII} = (m-1)\ 8.c - (n-1)\ 8k$, ou $\phi^{VII} = 450',248005 - 306',958944 = 143',28906$; donc l'angle d'aberration sera $\phi^{VII} - A = 0',13186$.

XXI. Que l'objectif soit à neuf lentilles isosceles, on aura $\sin c = 0,02380952$, & sinus k, comme (XX) $= 0,0186119$; donc $c = 81',858734$, & $k = 63',94978$. Ici on a $\phi^{VIII} = (m-1)\ 10.c - (n-1)\ 8k$, ou $\phi^{VIII} = 5,5\ c - 4,8k = 450',223037 - 306',958944 = 143',26409$; donc l'angle d'aberration $\phi^{VIII} - A = 0',10689$.

L'angle à l'axe des raïons rouges seroit ici $\phi^{VIII} = 0,54 \times 10.c - 0,584 \times 8\ k = 5,4\ c - 4,672\ k = 143',26379$; celui des raïons violets sera $\phi^{VIII} = 0,56 \times 10.c - 0,616 \times 8k = 143',26439$; donc l'angle d'aberration de réfrangibilité sera $= 0',0006$.

XXII. Soit enfin un objectif à 5 lentilles de chaque espece; on aura $\sin c$, & c comme §. XXI; $\sin k = 0,01488095$; ce qui répond à l'arc $k = 51',158528$; donc $\phi^{IX} = (m-1)\ 10.c - (n-1)\ 10\ k = 5,5\ c - 6\ k = 450',223037 - 306',951168 = 143',271869$; ce qui donne l'angle d'aberration $\phi^{IX} - A = 0',1146$.

XXIII. En comparant les résultats de ce calcul, que sa grande facilité m'a fait pousser jusqu'au dixieme verre, il paroit 1°. que les combinaisons les plus avantageuses pour diminuer l'aberration de sphéricité sont celles où les lentilles sont en nombre impair; 2°. que la combinaison à 3 verres donne la plus petite, & même une très petite aberration. On pourra les comparer sur les résultats que je rapproche ici.

1 ver-

1 verre, aberration de sphér.	= 0′,116.	2 verres, aberr.	= 0′,869.
3 verres, - - -	= 0′,065.	4 verres, -	= 0′,278.
5 verres, - - -	= 0′,130.	6 verres, -	= 0′,170.
7 verres, - -	= 0′,118.	8 verres, -	= 0′,132.
9 verres, - - -	= 0′,107.	10 verres, -	= 0′,115.

La raiſon de ces deux obſervations eſt, que dans les combinaiſons paires c'eſt le nombre des lentilles de criſtal qui augmente ſeul; donc le ſinus conſtant des arcs négatifs k, étant plus ſubdiviſé, donne une ſomme ſouſtractive d'arcs k plus petite, tandis que la ſomme poſitive des arcs c n'a pas varié. D'où il doit arriver que Φ ſoit plus grand dans un ſyſteme pair, qu'il n'étoit dans la combinaiſon impaire précédente. Pour faire trouver cet angle plus petit, il n'y a donc qu'à ſubdiviſer davantage les lentilles convexes de crownglaſs, & ſubdiviſer moins celles de cryſtal qui ſont concaves; par cet expédient les arcs du crownglaſs, répondant à de plus petits ſinus, en différeront moins d'eux, & donneront une plus petite ſomme additive; & les arcs du flintglaſs, répondant à de plus grands ſinus, en différeront davantage, & donneront une plus grande ſomme ſouſtractive; & par conſéquent $\Phi = (m - 1)(c + c + c \text{ \&c.}) - (n - 1)(k + k + \text{ \&c.})$ en ſera doublement diminué. Or c'eſt préciſément là le cas d'un objectif à trois verres. Le nombre des lentilles convexes y eſt à celui des lentilles concaves dans la proportion la plus éloignée, ſavoir celle de 2 à 1, au lieu que les proportions des autres combinaiſons impaires ſe rapprochent de plus en plus de la raiſon d'égalité 3 à 2; 4 à 3; 5 à 4; &c.

Au reſte, on ne doit pas prendre ces réſultats à la lettre comme donnant l'aberration abſolue & exacte; car, outre que l'épaiſſeur de la derniere face n'y entre pas encore, comme nous avons ſubſtitué les arcs aux ſinus, il eſt clair que ces déterminations ne ſont pas exactes: celles qui s'écartent le plus du vrai ſont donc celles où les faces de l'objectif ont les plus grandes courbures; ainſi la combinaiſon à deux verres a du donner le réſultat le moins exact; puis celle à 3 & à 4 verres.

res. L'objectif simple isoscele, & celui de cinq verres, ont les faces à peu près d'une égale courbure, & peu considérable; au delà de cinq verres, le rapport des arcs, qui vont toujours en diminuant, se rapproche de plus en plus de celui des sinus eux-mêmes. Quoi qu'il en soit, ce calcul grossier de comparaison contient déjà les élémens nécessaires au calcul précis de l'aberration que je donnerai plus bas; mais, avant d'y passer, il faut encore traiter deux articles essentiels; l'un regarde la méthode de trouver l'aberration longitudinale, en connoissant l'angle à l'axe & la courbure de la derniere face; l'autre concerne l'influence des forces réfractives & réfrangibles des verres de diverses especes, sur l'aberration de sphéricité des objectifs composés.

XXIV. Le premier article n'a point de difficulté. La seule inspection de la figure 3 montre qu'en négligeant l'épaisseur de la lentille, l'aberration de longueur GF seroit la différence entre la cotangente de l'angle au foïer A, & la cotangente de l'angle à l'axe Φ, en rapportant ces tangentes à la demi-ouverture BM, comme à leur sinus totus. Or l'épaisseur LM, flêche du demi-arc AM $= c$, est la tangente de l'angle LAM, rapportée au même sinus totus AL, & il est aisé de démontrer que cet angle LAM est la moitié de l'angle AcM; on a donc LM $= x$ tang $\frac{1}{2}c$, & GF $= x$ cotang A $- x$ cotang Φ; or x cotang A $= 100$; on a donc l'aberration longitudinale fF $= 100 - 4,1666$ (cotang $\Phi \pm$ tang $\frac{1}{2}c$.)

Exemple.

En supposant par ex. pour l'objectif simple, l'angle Φ, tel que la raison des angles l'a donné §. 11, $= 2^{\circ}. 23', 2733$, & $c = 2^{\circ}. 10', 24845$, on a l'aberration de cet objectif, fF $= 100 - 4,1666$ (tang. $87^{\circ}. 36', 7267$ — tang $1^{\circ}. 5', 12422$), ou fF $= 100 - 4,1666$ $(23,961717) = 0,1595$, de ces parties dont la distance focale F en contient 100, c. à d. que l'aberration de sphéricité seroit ici 0,001595 F.

Re-

Remarque.

Comme la flêche LM est connue en parties du foïer, étant $= x \text{ tang } \frac{1}{2} c = \frac{F}{24} \text{ tang } \frac{1}{2} c$, il sera encore plus aisé de ne prendre que la cotangente de l'angle Φ, laquelle, si l'aberration n'est pas excessive, sera toujours la tangente de 87°. 36', plus le produit de la fraction décimale des minutes par la différence des tangentes de 87°. 36', & 87°. 37'; différence qui est $= 167043$, & son logarithme est $= 5,2228283$. Ainsi, dans cet exemple-ci, on a cot $\Phi = 23,859277 + (167043 \times 0,7267)$; l'aberration sera donc:

$$fF = \frac{F}{24}(24 - 23,980667) + LM, \text{ or } LM = 0,01895 \frac{F}{24};$$

donc $fF = \frac{F}{24}(0,019333 + 0,01895)$, ou $fF = \frac{0,038283}{24} . F = 0,00159512 F.$

XXV. Il est aisé de s'appercevoir que les rappors des réfractions des verres, *m* & *n*, & de leur diverse force dispersive *dn*, influe beaucoup sur la détermination de l'aberration de sphéricité. Mais, comme c'est la nature du verre qui fixe ces rapports, on n'y peut rien changer. Tout ce qu'on peut faire, c'est 1°. de choisir les especes dont les rapports *m* & *n* seroient les plus favorables à diminuer la valeur de l'angle à l'axe Φ; 2°. de s'écarter un peu, s'il est nécessaire, du rapport des dispersions *dn*, dans la combinaison des verres; en sorte que la confusion due à la réfrangibilité soit beaucoup moins augmentée par cet écart, que la confusion due à la sphéricité n'en sera diminuée.

On a pour un objectif à deux lentilles, l'une isoscele convexe, l'autre isoscele concave, la formule de la distance focale (art. XI. XIII.)

F =

$$F = \frac{x}{(m - 1)\, 2 \sin c - (n - 1)\, 2 \sin k}.$$

Or, pour détruire l'aberration de réfrangibilité, il faut prendre sin $k = \frac{\sin c}{dn}$. (art. XIII.); ainsi, aiant

$$x = \frac{F}{24}, \text{ on a } 48 \sin c = \frac{1}{(m - 1) - \frac{(n - 1)}{dn}}.$$

Mais il est évident qu'à mesure qu'une des trois indéterminées, *m*, *n*, *dn*, variera, le sinus de *c*, & par conséquent celui de *k*, varieront aussi.

I. Supposons d'abord que *dn* augmente seul. Il est clair que les sinus des arcs de courbure *c* & *k* en deviendront plus petits, & que par conséquent l'aberration de sphéricité en sera moindre. *Il est donc avantageux de prendre* dn *plutôt trop grand, que de le prendre plus petit qu'il n'est donné par l'observation.*

II. Si *n* seul augmente, sin *c*, en devient plus grand, & sinus *k* pareillement. *Il faut* donc, *pour diminuer l'aberration, choisir, pour les lentilles concaves, l'espece de verre qui aiant la plus grande dispersion, ait la moindre force réfractive.*

III. Si *m* est seul augmenté, les sinus des arcs *c* & *k* en diminueront dans la même raison, & l'aberration en sera par conséquent moindre. *Il faut* donc *prendre, pour les lentilles convexes, l'espece de verre qui réfracte le plus, & qui disperse le moins.*

IV. Si $m - 1$ augmente dans la même proportion que $\frac{n - 1}{dn}$, l'aberration reste la même, puisque la grandeur des sinus de *c* & de *k* n'aura pas varié.

 V. Si

V. Si m & n sont augmentés d'une égale quantité, dn restant invariable, l'aberration diminue, puisqu'alors le dénominateur de la fraction $\frac{1}{(m-1)-\frac{(n-1)}{dn}}$ augmentant, les arcs c & k en deviennent plus petits.

VI. Si $n-1$ & dn augmentent ou diminuent dans la même proportion, m restant invariable, la grandeur du sinus c n'aura pas changé; mais celle du sinus de k décroit à mesure que dn augmente; & cela peut influer sur l'aberration.

Il sera donc très important de déterminer avant tout, par des expériences bien exactes, les forces de réfracter & de disperser, des verres qu'on veut emploïer, pour juger ensuite de la combinaison la plus propre à diminuer ou à détruire les aberrations.

XXVI. En continuant de supposer les rapports adoptés jusqu'ici, savoir: $m = 1,55$; $n = 1,6$; $dn = 1,6$, il est tems d'appliquer la méthode que j'ai décrite au calcul exact de l'aberration de sphéricité.

I. Il est évident d'abord que, quelque grand que soit le nombre des verres d'un objectif, il n'y a que la flèche du dernier arc de courbure qui entre dans l'estimation de l'aberration, pour l'augmenter si la derniere face est convexe, ou pour la diminuer si cette derniere face est concave. Ainsi les déterminations que les Géometres ont données pour la proportion des faces d'un objectif simple, peuvent tout au plus s'appliquer à ce dernier verre, & ne conviennent point aux lentilles antérieures.

II. Comme naturellement l'angle à l'axe ϕ est toujours plus grand que l'angle au foïer A, & que c'est de l'inégalité de ces deux angles que résulte la principale aberration, on doit tâcher d'avoir cet angle à l'axe aussi petit qu'il se peut. Or, aussi longtems que dans la for-

formule de cet angle nous avons mis les arcs eux-mêmes au lieu de leurs ſinus, le *minimum* de Φ étoit le cas des lentilles iſoſceles, puiſque c'eſt celui qui donne la plus petite ſomme des arcs de courbure. Mais, quoiqu'en ſubſtituant les arcs à leurs ſinus, on trouvera dans la plupart des combinaiſons l'angle à l'axe aſſez exactement pour ne pas ſe tromper d'une dixaine, ou d'une vingtaine de ſecondes, ſur ſa grandeur véritable; cependant cette préciſion ne ſauroit ſuffire dans des lunettes de 4 pieds & au delà, où un angle d'aberration de plus d'une demi-ſeconde produiroit déja une trop forte confuſion. Il faut donc déterminer l'angle à l'axe par les ſinus des arcs de courbure, & alors le *minimum* de cet angle ne tombera plus préciſément ſur le cas des faces iſoſceles; il variera avec les valeurs de m & de n, comme nous le verrons ci-deſſous.

III. Comme les verres convexes rendent Φ poſitif, ou convergent à l'axe, & qu'au contraire les lentilles concaves le rendent négatif ou divergent, il eſt clair que, plus on pourra diminuer la valeur de Φ, Φ'', Φ^{IV} &c. dans les lentilles convexes, & augmenter la valeur de Φ', Φ''', Φ^{V} &c. dans les lentilles concaves, plus on rendra petit le dernier angle à l'axe Φ^{n}, & plus par conſéquent on diminuera l'aberration de ſphéricité poſitive, c. à d. entre la diſtance focale & l'objectif. Mais on pourroit auſſi rendre l'angle à l'axe Φ^{n} ſi petit, que l'aberration de ſphéricité deviendroit négative, c. à d. que le foïer des raïons extremes ſeroit projetté au delà de la diſtance focale; ce qui produiroit la même confuſion que celle qui réſulte de l'aberration poſitive.

IV. Comme la longueur déterminée du foïer, ſon rapport à l'ouverture, & celui des diſperſions, déterminent abſolument la ſomme des ſinus de courbure, & le rapport des concavités aux convexités; toute la queſtion ſe réduit à rechercher, lequel eſt le plus avantageux pour diminuer l'aberration à ouverture égale, ou de multiplier les verres iſoſceles, ou de donner aux verres des faces inégales; & dans quels cas il ſeroit avantageux de tolérer quelque aberration

tion de réfrangibilité pour détruire plus complettement celle de ſphéricité.

XXVII. Dans un objectif composé, l'angle à l'axe ϕ des raïons extremes ſortant du dernier verre eſt augmenté par la convergence, & diminué par la divergence que ces raïons ont eue au ſortir de chaque verre précédent; ſi l'on ne riſquoit point de rendre négative l'aberration de ſphéricité, il ne s'agiroit donc que de trouver le *minimum* & le *maximum* de la formule de l'angle ϕ, & de donner aux lentilles convexes la proportion des faces que preſcrira le *minimum*, & aux lentilles concaves celle que le *maximum* aura indiquée.

La formule de l'angle à l'axe, commune à chaque eſpece de lentille, & à toutes les incidences quelconques, eſt:

$$\phi' = \pm m \sin\left[\pm (c + c') \mp \sin \frac{(c \mp \phi)}{m}\right] \mp c'$$

(art. IX.) où il faut obſerver, 1°. que m dénotant la raiſon de réfraction du verre, devient n lorſqu'il s'agit du flintglaſs; 2°. c déſigne le demi-arc de la face antérieure, & c', celui de la face poſtérieure de la lentille; 3°. ϕ dénote l'angle à l'axe des raïons au ſortir du verre précédent: ainſi, lorſqu'il s'agit de la premiere lentille, on a $\phi = 0$, ſi les raïons incidens ſont cenſés paralleles à l'axe.

4°. Lorſque les verres convexes & concaves alternent, la convergence du raïon au ſortir de la premiere lentille convexe augmente l'angle d'incidence ſur la lentille concave qui ſuit, & rend l'angle à l'axe de cette ſeconde lentille moins divergent. Pareillement, ſi le verre concave précede, la divergence du raïon augmente l'angle d'incidence ſur la lentille convexe, & rend par conſéquent l'angle de cette ſeconde lentille moins convergent.

5°. Si au contraire les lentilles convexes ſe ſuivent immédiatement, la convergence des raïons qui paſſent d'une lentille dans l'autre rend les angles d'incidence plus petits, & les angles à l'axe d'autant plus grands. La divergence produit le même effet ſur les verres concaves

caves appliqués immédiatement les uns aux autres. Il semble donc que, de quelque maniere que l'on combine les verres d'un objectif, il n'en résulte aucun changement dans la grandeur du dernier angle à l'axe; mais il sera toujours avantageux de placer en dernier lieu un verre concave, pour rendre négative l'aberration qui est produite par l'épaisseur de la derniere courbure.

Il est certain que si la réfraction suivoit la raison des arcs, rien ne seroit, par rapport à l'angle ϕ, plus indifférent que l'arrangement des lentilles; on auroit dans toutes les combinaisons possibles, & quel que fut le nombre des verres v, l'angle à l'axe au sortir de l'objectif

$$\phi^{v} = (m - 1)\,(c + c + c + \&c. + c' + c' + c' + \&c. - \\ - (n - 1)\,(k + k + \&c. + k' + k' + \&c.).$$

Mais, puisque la réfraction suit la raison des sinus, & qu'une différence d'une seule seconde sur l'angle à l'axe augmente ou diminue considérablement l'aberration, il ne sera pas inutile dans les cas où il resteroit quelque aberration à détruire après avoir donné aux faces la meilleure proportion possible, de chercher aussi l'arrangement des verres le plus avantageux.

Quant à la proportion des faces de chaque lentille, je laisse aux Géometres à déterminer par l'analyse le *minimum* de l'angle à l'axe; quelque simple que soit la formule de cet angle, le calcul de son *minimum* ne laisseroit pas d'être assez compliqué; mais il est aisé de se dispenser de ce calcul: car, outre qu'il sera rarement besoin de prendre le *minimum* de ϕ, pour détruire l'aberration, il suffira pour la pratique de déterminer ce *minimum* à l'aide d'un simple raisonnement métaphysique. Nous avons déjà observé plus haut que, si l'on peut substituer les arcs aux sinus, on aura le *minimum* de $\phi = m\left(c + c' - \frac{(c - \phi)}{m}\right)$ $- c'$, lorsque la somme des arcs $c + c'$ sera la plus petite, ce qui est le cas des faces isosceles, parce qu'alors la somme constante des

 sinus

finus de courbure $\sin c + \sin c' = \sin a$, donneroit chaque arc $=$ *ang fin* $\frac{1}{2}a$, & par conféquent $\phi' = 2\,(m-1)$ ang (fin $\frac{1}{2}a + \phi$).

Par la même raifon on aura le *maximum* de ϕ', lorfque l'une des deux faces fera plane, fi l'on ne veut pas pouffer jufqu'aux ménifques; on aura pour ce *maximum* $\phi' = (m-1)$ ang (fin $a + \phi$), & il eft évident que l'angle du finus a eft toujours plus grand, que le double de l'angle du finus $\frac{1}{2}a$. Enfin, fi l'on veut emploïer des ménifques, le *maximum* de ϕ' fera lorfqu'on aura *finus totus* $-$ *fin* c $=$ *fin* a, c'eft à dire lorfque la face concave du ménifque fera une demi-fphere, & que la face convexe aura pour demi-arc de courbure un arc dont le finus fera $=$ *fin tot* $-$ *fin* a.

Or, quoique la réfraction fuive la raifon des finus, & non celle des arcs, il eft clair que le *maximum* de la formule: m fin $\left(c + c' - \text{fin}\left(\frac{c-\phi}{m}\right)\right) - c'$, refte tel que je viens de le déterminer; car tout ce qui augmente ici la fomme des arcs $c + c'$, augmente à plus forte raifon l'angle qui répond au finus de ces arcs multiplié par le facteur m. Mais il n'eft plus indifférent laquelle des deux faces c, ou c', doit être plane. Si l'on fait $c = 0$, la formule devient $\phi' = m$ fin $\left(c' + \frac{\text{fin}\,\phi}{m}\right) - c'$, au lieu que fi l'on pofe $c = 0$, elle fera $\phi' = m$ fin $\left(c - \text{fin}\left(\frac{c-\phi}{m}\right)\right)$. Or il eft aifé de voir que la premiere valeur de ϕ' fera la plus grande, puifque m, ou n, eft plus grand que l'unité, & qu'en augmentant les finus, on augmente les arcs correfpondans dans une plus forte proportion. Il faudroit donc faire les verres intermédiaires de flintglafs plans-concaves, & tourner leur concavité vers l'œil, fi l'on vouloit augmenter autant qu'il eft poffible la divergence du raïon, ou l'angle à l'axe négatif, fans emploïer des ménifques.

Que

Que si l'on fait la face antérieure de ce verre convexe, la formule devient $\phi' = n \sin\left(-c + c' - \text{ang} \sin\frac{(c+\phi)}{m}\right) - c'$, où il est également aisé de voir que le *maximum* sera lorsque c' aura la plus grande valeur possible, ce qui donne $c' = 90^d$. & *sin c* = *sin tot* — *sin* a.

Il n'en est pas de même du *minimum* de la formule; dès que la réfraction suit le rapport des sinus, la plus petite valeur de l'angle à l'axe n'est plus précisément dans le cas des faces isosceles, parce que les arcs & leurs sinus ne diminuent pas suivant une même proportion. La formule contient des arcs donnés par eux-mêmes, & d'autres qui ne sont donnés que par leurs sinus, multipliés ou divisés par des quantités constantes; & puisque l'augmentation des sinus opere une augmentation plus forte dans les arcs correspondans, il importe ici de diminuer le sinus préférablement aux arcs. Ainsi la formule étant: $\phi' = m \sin\left(c + c' - \sin\frac{(c-\phi)}{m}\right) - c'$, pour rendre ϕ un *minimum*, il faut plutôt augmenter la quantité soustractive: ang sin $\frac{(c-\phi)}{m}$, que l'autre quantité soustractive c'. Mais, dans le terme sin $\frac{(c-\phi)}{m}$, on n'a de variable que c; c'est donc la courbure de la face convexe antérieure qu'il faut augmenter. Cette augmentation doit néanmoins avoir ses bornes, puisqu'on ne sauroit augmenter la courbure d'une face, qu'aux dépens de celle de l'autre, le foïer restant le même; & qu'ainsi en augmentant c, on diminue la valeur soustractive c', qui contribue aussi à rendre ϕ plus petit. Pour ne pas perdre d'un côté ce qu'on gagne de l'autre, il faut donc balancer exactement l'angle de sin $\frac{(c \pm \phi)}{m}$ avec l'angle c, ce qui donne *l'équation du minimum*

$\sin \frac{(c \pm \phi)}{m} = \sin c'$, ou $\sin (c \pm \phi) = m \sin c'$, & dans la premiere lentille où l'on suppose l'incidence parallele à l'axe, comme on a alors $\phi = o$, l'équation du *minimum* sera: $\sin c = m \sin c'$.

Corollaire I.

Puisque le *minimum* de la formule

$$m \sin \left(c + c' - \sin \frac{(c \mp \phi)}{m}\right) - c',$$ est en posant, *sin* $c \mp \phi = m$ *sin* c', & le *maximum* lorsqu'on pose $c = o$, on aura en changeant les signes le *maximum* de la formule :

$$k' - n \sin \left(k + k' - \sin \frac{(k \pm \phi)}{n}\right),$$ si l'on fait $\sin (k \pm \phi) = n \sin k'$, & son *minimum* en posant $k' = o$.

Corollaire II.

Pour ne pas confondre les divers cas, je donnerai ici les formules particulieres de l'angle à l'axe ; elles n'ont besoin que d'être indiquées, puisqu'elles résultent immédiatement de la figure des verres. En gardant les dénominations précédentes, & δ dénotant toujours l'angle de réfraction au sortir d'une lentille, on a:

I°. Pour la lentille convexe.

1°. L'angle à l'axe *convergent*, ou positif, $\phi' = \delta - c'$; ainsi la formule donne $\phi' = m \sin \left(c + c' - \sin \frac{(c \mp \phi)}{m}\right) - c'$, dont le *minimum* sera lorsqu'on prendra *sin* $(c \mp \phi) = m$ *sin* c'.

2°. L'angle à l'axe *divergent*, ou négatif, est $\phi' = c' \mp \delta$; ainsi la or-

formule devient $\Phi' = c' \mp m \sin \left[\pm (c + c') \mp \sin \frac{(c \pm \Phi)}{m} \right]$,

dont le *maximum* suppose $\sin (c \pm \Phi) = m \sin c'$.

II°. Pour *un verre concave.*

3°. L'angle à l'axe *convergent*, ou positif, donne $\Phi' = k' \mp \delta$; ainsi la formule devient $\Phi' = k' \mp n \sin \left[\pm (k + k') \mp \sin \frac{(k \pm \Phi)}{n} \right]$,

dont le *minimum* est $k' = o$.

4°. L'angle à l'axe *divergent*, ou négatif, donne $\Phi' = \delta - k'$; ainsi la formule est dans ce cas: $\Phi' = n \sin \left(k + k' - \sin \frac{(k \pm \Phi)}{n} \right) - k'$, dont le *maximum* est $k = o$.

Corollaire III.

A l'aide de ces déterminations, la formule de l'angle à l'axe deviendroit encore plus simple, & plus aisée à développer. On aura *le plus petit angle à l'axe positif*, au sortir d'une lentille convexe,

$$\Phi'' = ang\ m\ fin\ c - c';$$

& au sortir d'une lentille concave,

$$\Phi'' = ang\ n\ fin \left(ang\ fin \frac{(k + \Phi)}{n} - k \right).$$

Pareillement on aura *le plus grand angle à l'axe négatif*, au sortir d'une lentille convexe,

$$\Phi'' = c' \mp ang\ m : fin\ c;$$

& au sortir d'une lentille concave,

$$\Phi'' = ang\ n\ fin\ (k' \pm ang\ \frac{fin\ \Phi)}{n} - k'.$$

XXVIII. La regle générale qu'on doit se proposer dans les moïens de détruire l'aberration, tant pour la facilité de l'exécution, que pour la perfection des verres, c'est de s'écarter le moins qu'il sera possible des faces isosceles; d'éviter la trop grande inégalité des raïons, & de ne passer aux ménisques que lorsqu'on ne pourra détruire autrement la confusion qui résulte de la sphéricité. Pour suivre cette regle, je supposerai d'abord les verres de chaque espece à faces isosceles; & l'aberration restante indiquera, dans chaque combinaison, le changement le plus avantageux à choisir, pour détruire cette aberration.

XXIX. *Calcul de l'aberration de sphéricité dans un objectif simple à faces isosceles.*

Je suppose toujours qu'on a $m = 1,55$, $n = 1,6$, & $dn = 1,6$. Je donnerai ici le calcul entier, pour que les Artistes puissent appliquer ce procédé à tous les cas qui se présenteront.

La formule de l'angle à l'axe pour une lentille bi-convexe isoscele est (art. VIII. IX.): $\varphi = \text{ang}\, m \sin \left(2c - \dfrac{\text{ang} \sin c}{m}\right) - c$;

or on a ici $\sin c = 0{,}0378787$, &
l'arc $c = 2^\circ.\ 10', 24845$. (art. XI.) $= 2^\circ.\ 10', \frac{722}{2908}$.

$$\log : \sin c = 8{,}5783950$$
$$- \log : m = 0{,}1903317$$
$$\log : \frac{\sin c}{m} = 8{,}3880633,$$

$$\text{donc } \frac{\sin c}{m} = 0{,}02443787,$$

$$\text{donc } \text{ang} \frac{\sin c}{m} = 1^\circ.\ 24', \tfrac{56,7}{2908} = 1^\circ.\ 24', 019497.$$

$$\text{donc } 2c - \text{ang} \frac{\sin c}{m} = 2^\circ.\ 56', 4774,$$

dont

dont le finus eft $= 0{,}0511{,}740 + (2905 \times 0{,}4774 = 0{,}0513127$;

donc $m \sin\left(2c - \text{ang}\,\frac{\sin c}{m}\right) = (0{,}0513127 \times 1{,}55) = 0{,}07953468$;

donc ang $m \sin\left(2c - \text{ang}\,\frac{\sin c}{m}\right) = 4^\circ.\,33',\frac{2056{,}8}{2900} = 4^\circ.\,33',7092$,

d'où otant l'arc $c = 2^\circ.\,10',2484$

refte l'angle à l'axe $\Phi = 2^\circ.\,23',4608$;

mais l'angle de mefure A. eft (VIII) $= 2.\ 23',1571$

donc l'angle d'aberration $\Phi - A = 0',3037$.

REMARQUE 1.

En fubftituant les arcs à leurs finus, cet angle d'aberration n'eft que de $0{,}116'$. (art. XI.) & par conféquent au delà de deux fois & demie plus petit que le calcul exact ne vient de le donner. D'où l'on voit que, dès que les courbures font de quelques degrés, il ne feroit pas fûr de s'en tenir au rapport des angles, pour eftimer l'aberration, puifqu'une différence de $\frac{18}{100}'$, ou $\frac{18}{100}'$, fait une erreur très confidérable fur la longueur de la diffufion, pour peu que le foïer de l'objectif foit grand.

REMARQUE 2.

L'aberration en longueur étant $fF = 100 - \frac{100}{24}$ (cotang Φ — tang $\frac{1}{2}c$) (art. XXIV.) on a ici la cotangente Φ, ou la tangente de $87^\circ.\,36',54 = 23{,}859277 + (167043 \times 0{,}54)$;

donc on a cot $\Phi = 23{,}949346$;

on a (art. XXIV.) tang $\frac{1}{2}c = 0{,}019165$;

donc cot Φ — tang $\frac{1}{2}c = 23{,}930181$;

donc $Ff = 100 - 99{,}7091 = 0{,}2909$, centiemes du foïer $= 0{,}00291.F$.

Remarque 3.

Par la formule de M. Euler, (*Mém. de l'Acad.* Tome XVII. pag. 129.) on a, en posant $m = 1,55$, l'aberration de longueur d'un objectif simple isoscele $= \frac{xx}{F}(1,529)$; ce qui, pour $F = 100$ & $x = \frac{100}{24}$, donne cette aberration: $fF = 0,26545$. Ainsi la formule de M. Euler donne, à $\frac{1}{11}$ près, la véritable aberration de sphéricité.

Remarque 4.

Sur un foïer de 50 pouces, l'aberration de sphéricité d'un objectif simple isoscele de crownglass seroit donc $= 0,1454$ pouces. Par conséquent elle seroit environ 38 fois plus grande que la diffusion tolérable, qu'on estime $= 0,00375$ pouces. Il faudroit donc rendre l'ouverture plus de six fois moindre que je ne la pose, c'est à dire $\frac{F}{12,6} = \frac{50}{78}$ pouce, ou environ 8 lignes. Mais, comme M. Huygens donne cette ouverture de plus d'un pouce, pour une lunette de 4 pieds, malgré l'aberration de réfrangibilité, dont je ne tiens pas même compte ici, il semble qu'on peut tolérer dans la pratique une diffusion plus que double de celle de $\frac{3}{800}$ de pouce, que l'on prend communément pour la mesure d'une diffusion insensible, & qu'il suffit de la prendre 16 à 17 fois moindre que l'ouverture $\frac{F}{12}$ ne l'a donnée, c. à d. environ $= 0,009$ pouces. Au reste la détermination de la valeur absolue d'une aberration, pour qu'elle soit insensible, doit être rélative à une amplification déterminée; & celle-ci l'est par le rapport du foïer de l'oculaire à la distance focale de l'objectif. Celle que j'adopte ici, & qui suppose le moindre angle sensible dans l'œil d'environ $3'',5$, sera donc, pour un foïer F quelconque réduit en pouces:

$$fF = \frac{0,00375''}{50} F = 0,000075''.F.$$

XXX. *Calcul de l'aberration de sphéricité d'un objectif à deux verres, dont chaque lentille a ses faces isosceles ; en supposant toujours* m = 1,55, n = 1,6, dn = 1,6.

Dans les objectifs composés, si l'on nomme *sin* c la somme des sinus de courbures des lentilles de *crownglass*, & *sin* k la somme des sinus de courbures du *flintglass*, on a (art. XIII.)

$$F = \frac{x}{(m-1)\sin c - (n-1)\sin k},$$ & substituant les valeurs adoptées de F, x, m & n, on aura

$$24 = \frac{1}{0,55 \sin c - 0,6 \sin k}.$$

Mais, pour détruire la réfrangibilité, aiant ici $dm : dn = 1 : 1,6$, il faudra prendre $\frac{1}{\sin c} : \frac{1}{\sin k} = 1 : 1,6$, ce qui donne $\sin k = 0,625 \sin c$;

substituant cette valeur de sin k dans l'équation précédente, on aura

$24 = \frac{1}{0,175 \sin c}$, d'où l'on tire le sinus constant $c = 0,238095238$,

& le sinus constant $k = 0,148809523$.

Quel que soit présentement le nombre des verres d'un objectif, & le rapport des faces de ces verres, aussi longtems que la distance focale & l'ouverture resteront les mêmes, la somme des sinus de courbure de chaque espece de verre restera constamment telle que nous venons de la déterminer pour le cas de deux lentilles, l'une plane-convexe, l'autre plane-concave, pourvu que les dispersions & les réfractions aïent les rapports que nous leur avons supposés.

Ainsi, dans le cas présent, d'un objectif à deux lentilles isosceles, on a pour le demi-arc de chaque face convexe,

$\text{ſin } c = \frac{0,2380952}{2} = 0,1190476$, & de chaque face concave,

$\text{ſin } k = \frac{0,1488095}{2} = 0,0744047$, ce qui donne

$$\text{l'arc } c = 6^\circ.\ 50'.\ \tfrac{660}{2888} = 6^\circ.\ 50',22853,$$

$$\&\ \text{l'arc } k = 4^\circ.\ 16'.\ \tfrac{61}{2901} = 4^\circ.\ 16',021027.$$

Maintenant, pour diminuer l'aberration de ſphéricité, il convient de rendre l'épaiſſeur de la derniere face négative, ce qu'on obtient en plaçant la lentille convexe vers l'objet, & la concave vers l'œil.

I. Pour le verre convexe.

La formule de l'angle à l'axe des raïons extremes au ſortir du premier verre ſera donc: (art. IX.) $\phi = m \text{ ſin}\left(2c - \frac{\text{ſin } c}{m}\right) - c$;

or on trouve $\frac{\text{ſin } c}{m} = 0,0768049$;

donc, $\text{ang } \frac{\text{ſin } c}{m} = 4^\circ.\ 24',\tfrac{858}{2901}$;

donc, $2c - \text{ang } \frac{\text{ſin } c}{m} = 9^\circ.\ 16',1609136$;

donc, $m \text{ ſin}\left(2c - \frac{\text{ſin } c}{m}\right) = 1,55 \times 0,16107588 = 0,2496676$,

ce qui répond à l'arc $14^\circ.\ 27',\tfrac{1326}{2817} = 14^\circ.\ 27',4707136$;

d'où ôtant l'arc $c = 6^\circ.\ 50',2285318$,

reſte l'angle à l'axe $\phi = 7^\circ.\ 37',2421818$.

II. Pour le verre concave.

La formule de l'angle à l'axe ϕ', eſt

$$\phi' = k - n \text{ ſin}\left(2k - \text{ſin}\left(\frac{k + \phi}{n}\right)\right);$$

or

or on a ici $k + \phi = 11^{\circ}.\ 53',263209$;

donc $\frac{\sin(k + \phi)}{n} = \frac{0,2059944}{1,6} = 0,1287465$;

donc ang $\sin \frac{(k + \phi)}{n} = 7^{\circ}.\ 23',82981$,

lequel soustrait de $2k = 8^{\circ}.\ 32',042054$,

reste l'angle $2k -$ ang $\frac{\sin(k + \phi)}{n} = 1^{\circ}.\ 8',212244$,

dont le sinus $= 0,0198308$, multiplié par n, répond à un arc de $1^{\circ}.\ 49',095631$.

Aiant donc ici $k' = 4^{\circ}.\ 16',021027$.

$-\ n \sin\left(2k - \sin\frac{(k+\phi)}{n}\right) = 1^{\circ}.\ 49',095631$,

j'ai ϕ' angle à l'axe $= 2^{\circ}.\ 26',925396$.

Mais l'angle de mesure A $= 2^{\circ}.\ 23',157145$;

donc l'angle d'aberration $\phi' - A = 3',768251$.

Remarque 1.

Il est aisé de voir que la confusion qui résulteroit d'une si grande aberration de sphéricité seroit insupportable. En substituant les arcs à leurs sinus, je n'avois trouvé cet angle d'aberration que de 0, 8689' (art. XIII.) ce qui n'est que $\frac{3}{13}$ du véritable angle que nous venons de trouver. Mais la raison en est évidente. Les arcs de courbures, qui vont dans cette combinaison à environ 7^{d}, sont trop grands pour être substitués sans erreur à leurs sinus.

Remarque 2.

Pour connoitre l'aberration de réfrangibilité qui résulte de la combinaison des deux lentilles, il n'y a qu'à chercher l'angle à l'axe des

raïons rouges, & des raïons violets, par un calcul pareil à celui qui nous a donné l'angle à l'axe des raïons moïens.

I. Pour les raïons rouges.

Posant ici, comme dans l'article XIV, $m = 1,54$, $n = 1,584$, on trouvera 1°. *pour la lentille convexe* :

$$\frac{\sin c}{m} = \frac{0,1190476}{1,54} = 0,0773036;$$

$$\text{ang}\,\frac{\sin c}{m} = 4^{\circ}.\ 26',015517;$$

$$2c - \text{ang}\,\frac{\sin c}{m} = 9^{\circ}.\ 14,441547;$$

$$m \sin\left(2c - \frac{\text{ang}\,\sin c}{m}\right) = 0,1605823 \times 1,54,$$

$$\text{ou } \sin \delta = 0,247296742;$$

$$\text{donc } \delta = 14^{\circ}.\ 19',056068,$$

$$-c = 6.\ 50',22853,$$

$$\Phi = \delta - c = 7^{\circ}.\ 28',827538.$$

2°. *pour la lentille concave*:

$$\text{on aura donc } k + \Phi = 11^{\circ}.\ 44,848565,$$

$$\sin\frac{(k+\Phi)}{n} = \frac{0,20359865}{1,584} = 0,1285352,$$

$$\text{ang}\,\sin\frac{(k+\Phi)}{n} = 7^{\circ}.\ 23',0974,$$

$$\text{ang}\ 2k - \sin\frac{(k+\Phi)}{n} = 1^{\circ}.\ 8',944654,$$

n sin

$$n \sin\left(2k - \sin\frac{(k+\Phi)}{n}\right) = \sin \delta' = 0{,}0200538 \times 1{,}584$$

$$= 0{,}031765219, \quad \text{donc } \delta' = 1°.49',21912.$$

Or aiant ici $\Phi' = k' - \delta'$,

$$\begin{aligned} \& \; k' &= 4{,}16',021027, \\ - \delta' &= 1{,}49{,}21912, \end{aligned}$$

j'ai Φ' angle à l'axe $= 2°.26',801907.$

II. Pour les raïons violets.

Posant, ici comme dans l'article XIV, $m = 1{,}56$; $n = 1{,}616$, on trouve

1°. pour la lentille convexe:

$$\frac{\sin c}{m} = \frac{0{,}1190476}{1{,}56} = 0{,}07631256,$$

$$\text{ang. } \frac{\sin c}{m} = 4°.22',59848,$$

$$\text{ang}\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 9°.17',858584,$$

$$m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 1{,}56 \times 0{,}1615632,$$

$$\text{donc } \sin \delta = 0{,}252038592,$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \delta &= 14°.35',89376, \\ -c &= 6.50,22853, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \Phi = \delta - c = 7°.45',66523.$$

2°. pour la lentille concave:

on aura donc $k + \Phi = 12°.1',686257$,

$$\sin\frac{(k+\Phi)}{n} = \frac{0{,}20839144}{1{,}616} = 0{,}1289551,$$

 ang

$$\text{ang sin } \frac{(k + \phi)}{n} = 7^\circ.\ 24',55286,$$

$$\text{ang } \left(2k - \text{sin } (\frac{k + \phi)}{n}\right) = 1^\circ.\ 7',489194,$$

$$n \text{ sin } \left(2k - \text{sin } (\frac{k + \phi)}{n}\right) = 1,616 \times 0,01963055,$$

$$\text{ou } \quad \text{sin } \delta' = 0,0317229688,$$

$$\text{donc } \quad \delta' = 1^\circ.\ 49',073852.$$

Or aiant ici $\phi' = k' - \delta$,

$$\& \quad k' = 4^\circ.\ 16,021027,$$

$$- \delta = 1.\ 49,073852,$$

on a l'angle à l'axe $= 2^\circ.\ 26',947175,$

celui des raïons rouges étoit $\phi' = 2^\circ.\ 26,801907,$

angle d'aberration $= 0',145268.$

REMARQUE 3.

En ſubſtituant les angles aux ſinus j'avois trouvé cet angle de l'aberration de réfrangibilité $= 0',0238$, plus de ſix fois moindre qu'il n'eſt en effet, ce qui eſt encore une ſuite de la grandeur des arcs de courbure. Si l'on compare les angles à l'axe des raïons hétérogenes, on trouvera que la différence entre celui des raïons rouges & celui des raïons moïens fait un angle de $0',12349$, au lieu que la différence entre l'angle des raïons moïens & celui des violets n'eſt que de $0',021779$, d'où il paroit que le foïer des raïons moïens n'eſt pas à une diſtance égale des deux couleurs extrêmes; & pour peu que la lunette fût longue, l'aberration de réfrangibilité ſeroit aſſez conſidérable pour donner des couleurs ſenſibles.

REMARQUE 4.

Puiſque, malgré l'énorme aberration de ſphéricité qui ſurpaſſe ici 25 fois celle de réfrangibilité, M. Dollond le pere a réuſſi à conſtruire

ſtruire d'excellentes lunettes avec un objectif à deux verres, d'une très grande ouverture, il en faut conclure, ou que les rapports des réfractions & des diſperſions que nous avons emploïés dans ce calcul ne ſont pas les vrais rapports pour le crownglaſs & pour le criſtal d'Angleterre, bien qu'on les adopte ordinairement; ou qu'on peut détruire cette aberration par l'inégalité des faces de l'une ou de l'autre lentille ou de toutes les deux.

Je ſuis bien convaincu, par les obſervations que j'ai rapportées dans mon Mémoire *ſur les Priſmes achromatiques*, que les rapports que j'emploie ici d'après de très grands Géometres, ne ſont pas exactement juſtes; mais je ne penſe pas non plus que la ſubſtitution des vrais rapports pût ſuffire à détruire une grande aberration; c'eſt ce que je me propoſe d'examiner à la ſuite de ce Mémoire; il eſt queſtion ici de chercher la proportion des faces la plus propre à corriger cette aberration.

XXXI *Recherche de la proportion des faces d'un objectif à deux verres la plus convenable pour détruire l'aberration de ſphéricité.*

Comme, dans un objectif à deux verres, c'eſt la lentille convexe qui a les plus grandes courbures, & qu'en rendant les faces inégales on augmenteroit encore cette diſproportion, il convient de chercher d'abord, ſi, en laiſſant la lentille de crownglaſs iſoſcele, on peut détruire l'aberration de ſphéricité par le rapport des faces du verre concave ſeul.

Or, puiſqu'il s'agit de diminuer l'angle ϕ', il faudra prendre le *minimum* de la formule

$$\phi' = k' - n \sin\left(k + k' - \sin\frac{(k + \phi)}{n}\right),$$

c'eſt à dire, que par l'article XXVII. cor. II. n. 3, il faudra poſer $k' = o$, ce qui donne

$\phi' =$

$$\Phi' = n \sin \left(\frac{k + \Phi}{n} - k \right). \quad \text{(ibid. cor. III.)}$$

Mais, aiant le ſinus conſtant des demi-courbures du flintglaſs, ſin $k =$ 0,148809523 (art. XXX.) & n'y aiant ici qu'une ſeule face courbe,

j'ai $k = 8°. 33', 476538$,
j'ai (art. XXXII.) $\Phi = 7°. 37, 242182$,
donc $k + \Phi = 16°. 10', 71872$.

$$\text{donc } \sin \frac{(k + \Phi)}{n} = \frac{0,2786332}{1,6} = 0,1741457,$$

$$\text{donc ang } \sin \frac{(k + \Phi)}{n} = 10°. 1', \tfrac{2111}{2865} = 10°. 1', 73682,$$

d'où ôtant l'angle $k = 8°. 33, 47654$,

$$\text{reſte ang} \left(\sin \frac{(k + \Phi)}{n} - k \right) = 1°. 28', 26028;$$

or n ſin $1°. 28, 26028 = 1,6 \times 0,0256711 = 0,0410737$,
donc $\Phi' =$ ang ſin $0,0410737 = 2°. 21', \tfrac{700}{1987}$.

Mais l'angle de meſure eſt A $= 2°. 23', 157145$. (VIII.)
Ici on auroit $\Phi' = 2. 21, 2408$,
angle d'aberration négative $A - \Phi = 1', 9163$.

Remarque I.

Il eſt donc évident que, ſans rien changer aux faces de la lentille convexe qui reſtent égales, on n'a cependant pas beſoin d'emploïer le *minimum* pour détruire l'aberration de ſphéricité par la proportion des faces du flintglaſs; puiſque ce *minimum* donneroit une aberration négative, & projetteroit le foïer des raïons extremes au delà de la diſtance focale. Ainſi la face poſtérieure du flintglaſs ne doit pas être plane; elle doit être concave, mais moins concave que la face antérieure; & par là la courbure de celle-ci, que *le minimum* donnoit de 8°. 33', ſe rap-

rapprochera plus de l'égalité avec celles du crownglass, qui sont de $6^\circ. 50'$.

REMARQUE 2.

Comme, pour trouver la juste valeur des arcs k, & k', il faudra recourir à une espece de tâtonnement, on peut aisément se dispenser du calcul rigoureux des fractions, & se borner à l'évaluation des moitiés ou tiers de minutes. On peut d'ailleurs approcher tout d'un coup, à quelques minutes près, de la valeur de l'arc k', par une simple analogie qui n'est pas à la vérité de rigueur géométrique. La voici: lorsque j'ai eu $k' = 4^\circ. 16'$, l'aberration résultante étoit $= 3',768$; lorsque j'ai pris $k' = o$, il en a résulté une aberration négative $= 1', 9163$; donc une différence de 256 minutes sur l'arc k', produit une différence d'aberration de $5',684$. De combien de minutes faut-il augmenter l'arc $k' = o$, pour produire une différence d'aberration de $1', 9163$, c'est à dire, pour détruire l'aberration négative que donne le cas $k' = o$? L'analogie donne ici $k = o + \frac{256' \times 1,9163}{5,684} = 86',307$, ou $k' = 1^\circ. 26'$.

REMARQUE 3.

En posant donc $k' = 1^\circ. 25'$, on trouve $k = 7^\circ. 7', 68$, & $\phi' = 2^\circ. 23', 628$, d'où l'on voit que l'aberration redevient positive; l'angle d'aberration est ici $\phi' - A = 0',47$, & la différence des aberrations entre les cas $k' = o$, & $k' = 85'$, est $= 1', 9163 + 0',47 = 2',3863$; on a donc, par la même analogie, une nouvelle valeur approchée de k', savoir:

$$k' = 85' - \frac{85' \times 0,47}{2,3863} = 85' - 16',74 = 1^\circ. 8', 26.$$

REMARQUE 4.

Cette nouvelle valeur approchée de $k' = 1^\circ. 8'$, est déjà si exacte, qu'on pourroit s'en contenter dans la pratique, puisque l'Artiste

ste aura peine à répondre de sa précision à une ou deux minutes près sur la courbure d'un arc de lentille. En effet, la différence d'une minute, sur un arc k' de $1°.\ 8'$, ne suppose que la différence d'une $\frac{1}{68}$, sur la longueur du raïon du bassin qui sera $= \frac{x}{\sin\ k'}$. Cependant, comme ce raïon sera au moins une fois plus long que le foïer de l'objectif, vu la petitesse de l'arc; la différence d'un 88eme, si la lunette est de 4 pieds, emporteroit plus d'un pouce; & je ne pense pas qu'un habile ouvrier puisse se tromper d'autant sur un bassin de 8 pieds de raïon.

Remarque 5.

Quoi qu'il en soit, pour continuer l'approximation, en posant $k' = 1°.\ 8'$, on trouve $k = 7°.\ 24', 813$, & $\Phi' = 2°.\ 23,19547'$; donc l'angle d'aberration $\Phi' - A = 0{,}03833$. Or, lorsque l'on avoit $k' = 1°.\ 25'$, cet angle étoit $= 0{,}47'$. Ainsi, en diminuant l'arc k' de $17'$, on a diminué l'aberration de $0{,}432'$; donc, pour détruire le reste d'aberration $= 0{,}03833$, il faut encore diminuer k' de $\frac{17' \times 0{,}03833}{0{,}432}$, c'est à dire de $1', 508$, ce qui donne l'arc précis $k' = 1°.\ 6', 492$.

Remarque 6.

Puisque le raïon des faces est égal à la demi-ouverture x, divisée par le sinus des arcs c, c', k & k', & qu'on a ici $c = c' = 6°.\ 50', 228$, $k = 7°.\ 26', 161$, & $k' = 1°.\ 6', 5$, on trouve les quatre raïons des faces comme suit:

$$r = + 0{,}35\ F,$$
$$r' = - 0{,}35\ F,$$
$$r'' = - 0{,}322\ F,$$
$$r''' = + 2{,}1488\ F,$$

& posant $F = 100$, le devis d'un objectif à deux verres sans aberration sera, pour une ouverture de $\frac{100}{12}$ parties du foïer:

Crown-

Crownglass.	Flintglass.
raïons,	raïons,
35; 35;	32,3; 214,9.

REMARQUE 7.

Comme le dernier raïon devient fort long, si le foïer est considérable, on pourroit le raccourcir en augmentant la courbure c du premier verre; c'est à dire, en posant sin $c = m$ sin c', pour avoir le *minimum* de l'angle Φ', si l'on ne craint pas de rendre r trop petit: on aura alors $c = 8^\circ. 19'$, $c' = 5^\circ. 21'$, $\Phi = 7^\circ. 36', 3318$, & aiant ainsi diminué Φ de $0', 91$, l'angle δ' sera augmenté, & par conséquent Φ' diminué d'autant. L'angle d'aberration réduit par là à $2,8578'$, donnera par l'analogie

$$k' = 4^\circ. 16' - \frac{256' \times 2,8578}{5,684} = 2^\circ. 8',$$

d'où l'on conclura $k = 6^\circ. 24'$. Les quatre faces auront donc à très peu près les demi-arcs de courbure suivans:

$$c = 8^\circ. 19',$$
$$c' = 5^\circ. 21',$$
$$k = 6^\circ. 24',$$
$$k' = 2^\circ. \ 8',$$

qui détermineront les raïons r, r', r'', r''', à fort peu près:

$$r = +\ 0,2879.\ F,$$
$$r' = -\ 0,4462.\ F,$$
$$r'' = -\ 0,3734.\ F,$$
$$r''' = +\ 1,1193.\ F.$$

Je ne crois pas nécessaire de les déterminer avec plus de précision, puisqu'on a plus d'avantage à emploïer des objectifs à trois verres, que de ceux à deux.

XXXII. *Calcul de l'aberration de sphéricité d'un objectif à trois lentilles isosceles; en supposant encore*

$m = 1,55; \; n = 1,6; \; dn = 1,6.$

Puisqu'il y a ici quatre faces convexes égales, pour les deux lentilles de crownglass, on a sin $c = \frac{0,2380952}{4} = 0,0595238$, (art. XV.) ce qui donne l'arc $c = 3°. 24',7488$. On a donc

I. Pour le premier verre, convexe:

formule $\Phi = m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) - c.$

$\frac{\sin c}{m} = 0,0384024,$

donc ang $\frac{\sin c}{m} = 2°. 12', 05022,$

donc $2c$ — ang $\frac{\sin c}{m} = 4°. 37', 4475,$

donc $m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 0,0806186 \times 1,55 = 0,1249588,$

donc ang $m \sin\left(2c - \frac{\sin c}{m}\right) = 7°. 10', 70236,$

d'où retranchant l'arc $c = 3°. 24', 74888,$

reste l'angle à l'axe $\Phi = 3°. 45', 95348.$

Pour diminuer l'aberration, si l'on place le verre concave vers l'œil afin que l'épaisseur de la derniere face soit négative, on aura:

II. Pour le second verre, convexe:

formule $\Phi' = m \sin\left(2c - \frac{\sin(c - \Phi)}{m}\right) - c.$

L'angle $c - \Phi = - 0°. 21', 2046.$

sin

$\text{fin}\ \frac{(c - \phi)}{m} = \frac{0{,}0061681}{1{,}55} = 0{,}0039794,$

donc $\text{ang fin}\ \frac{(c - \phi)}{m} = -\ 13', 68032,$

donc $2c - \text{fin}\ \frac{(c - \phi)}{m} = 7°.\ 3', 17809,$

donc $m\ \text{fin}\left(2c - \text{fin}\ \frac{(c - \phi)}{m}\right) = 1{,}55 \times 0{,}1227869,$

ou fin $\delta' = 0{,}1903198,$

donc $\delta' = 10°.\ 58', 28686,$

ôtant $c = 3.\ 24, 74888,$

reste $\phi' = \delta' - c = 7°.\ 33', 53798.$

III. Pour le troisieme verre bi-concave isoscele de Flintglass.

La formule est ici:

$$\phi'' = k' - n\ \text{fin}\left(2k - \text{fin}\ \frac{(k + \phi')}{n}\right).$$

Or on a, comme dans l'objectif à deux verres, $k = 4°.\ 16', 021027,$

$\phi' = 7.\ 33, 53798,$

donc $k + \phi' = 11°.\ 49', 559007,$

donc $\text{fin}\ \frac{(k + \phi')}{n} = \frac{0{,}2049344}{1{,}6} = 0{,}1280839,$

donc $\text{ang fin}\ \frac{(k + \phi')}{n} = 7°.\ 21', 5329,$

donc $2k - \text{fin}\ \frac{(k - \phi')}{n} = 1°.\ 10', 50915,$

donc

donc $n \sin \left(2k - \frac{\sin (k + \phi')}{n}\right) = 1{,}6 \times 0{,}0205089$,

ou $\sin \delta'' = 0{,}0328142$,

donc $\delta'' = 1^\circ.\ 52',8273$,

donc $\phi'' = k' - \delta = 2^\circ.\ 23',1937$,

d'où ôtant l'angle $A = 2.\ 23,1571$,

reſte l'angle d'aberration $= 0',0366$.

REMARQUE 1.

Cet angle d'aberration eſt ici plus petit que je ne l'ai trouvé (art. XV.) en ſubſtituant les arcs au ſinus, où il étoit $= 0{,}0649$. Il ſemble néanmoins que le calcul des arcs devroit toujours donner l'aberration de ſphéricité plus petite qu'elle n'eſt réellement. La raiſon de cette exception eſt qu'ici la lentille concave a les plus grands arcs, & que les arcs conçaves rendent l'aberration négative; ce qui devient plus ſenſible lorſqu'on emploie les ſinus dans le calcul, que lorſqu'on y ſubſtitue les arcs.

REMARQUE 2.

Comme l'arc k' eſt de $4^\circ.\ 16'$, la flêche de la derniere courbure, ou la concavité du dernier verre eſt aſſez conſidérable pour ne la pas négliger, & puiſqu'elle eſt négative elle diminue l'aberration trouvée. Mais, comme il eſt plus aiſé de réduire l'angle d'aberration en parties de l'axe, que de changer la flêche en parties d'arc, il faut pour connoitre la véritable aberration chercher le foïer des raïons extremes; ce foïer eſt (*art.* XXIV.) $= x \operatorname{cotang} \phi'' + x \operatorname{tang} \frac{1}{2} k$, ou $Lf + LM = \frac{100 \times \operatorname{tang} 87^\circ.\ 36',8063}{24} + \frac{100 \times \operatorname{tang} 2^\circ.8'}{24}$; or la tangente de $87^\circ.\ 36',8063$, eſt $= 23{,}859277 + (0{,}167043 \times 0{,}8063) = 23{,}993958$; on a donc $Lf = x \cot \phi'' = \frac{2399{,}3958}{24} = 99{,}9748$; ainſi l'aberration poſitive feroit $fF = 0{,}$

0252.

0252. Mais la flêche du dernier arc LM $= x$ tang $\frac{1}{2}k$, est ici $= \frac{100 \times 0{,}0372509}{24} = 0{,}15521$; on a donc LM + L$f$ = 100,13, & la distance focale étant toujours MF = 100, l'aberration devient ici négative = 0,13, centiemes de foïer, ou = 0,0013.

REMARQUE 3.

Pour une lunette de 50 pouces, l'aberration de sphéricité seroit $= 0{,}065''$; elle seroit donc au moins huit fois trop grande, & par conséquent il faudroit prendre l'ouverture trois fois plus petite, ou $\omega = \frac{F}{36}$, si l'on veut laisser les trois lentilles isosceles.

REMARQUE 4.

Comme l'aberration résulte ici principalement de la grandeur de la flêche LM, il semble qu'en partageant la lentille concave en deux autres aussi isosceles, on auroit un objectif à 4 verres sans aberration sensible; la flêche du dernier arc seroit alors LM $= x$ tang 1°. 4′ = 0,0776. Voïez cependant la Remarque 1.

REMARQUE 5.

Comme la transposition des verres n'altere point la distance focale, & ne sauroit altérer qu'extrêmement peu l'angle ϕ'', ou le foïer des raïons extremes, il en résulte que, si l'on plaçoit le flintglass entre les deux lentilles de crownglass, on auroit encore, comme nous l'avons trouvé ici, Lf = 99,974 à très peu près. Mais alors la flêche de la derniere courbure seroit LM $= x$ tang $\frac{1}{2}c = x$ tang 1°. 42′ = 0,124; & comme la derniere face seroit convexe, le foïer seroit Lf − LM = Mf = 99,85, & par conséquent l'aberration de sphéricité positive = MF − Mf = 0,15 = 0,0015 F. On augmenteroit donc l'aberration de 0,02, en plaçant le flintglass au milieu; il sera par conséquent plus avantageux de le laisser en dernier lieu, & de chercher la proportion de ses faces propre à détruire l'aberration.

RE-

REMARQUE 6.

Puisque, dans cette position, il faut ou augmenter l'angle ϕ'', afin que l'aberration positive compense la flêche, ou diminuer la flêche, afin de diminuer l'aberration négative, il s'agit d'examiner lequel de ces deux expédiens est le plus convenable. On a ici $\phi'' = k' - \delta$; or, en diminuant l'arc k', je diminue à la vérité un peu la longueur de la flêche qui est $= x$ tang $\frac{1}{2} k'$; mais je diminue l'angle ϕ'', de toute la diminution de k', & cette diminution sur l'angle ϕ'' doit opérer un allongement du foïer Mf, qui augmenteroit beaucoup plus l'aberration négative que le raccourcissement de LM ne la diminueroit. Au contraire, en augmentant un peu l'arc k', j'augmente presque d'autant l'angle ϕ'', & par conséquent l'aberration positive, qui balancera bien vite l'aberration négative LM, malgré l'allongement que l'augmentation de l'arc k' produit dans sa flêche.

REMARQUE 7.

Mais comme, dans une combinaison de trois verres, celui de flintglass a déjà les plus grandes courbures, dans l'état isoscele, il vaudra mieux conserver l'égalité des faces à la lentille de flintglass, & chercher à détruire l'aberration par l'inégalité des faces de l'une des deux lentilles de crownglass. Si l'on y parvient sans donner à l'une de ces faces un arc plus grand que 4°.16', qui est l'arc de chaque face du flintglass, on pourra laisser l'autre lentille de crownglass isoscele; sinon, pour éviter les grandes courbures, il faudra répartir l'altération sur les deux lentilles convexes.

REMARQUE 8.

Puisqu'il s'agit donc d'augmenter l'angle à l'axe $\phi'' = k' - \delta''$ sans changer la valeur de k', il faut diminuer d'autant l'angle de derniere réfraction δ''. Or cet angle augmente ou diminue sensiblement d'autant que l'angle d'incidence α'' est diminué ou augmenté; plus α est petit, plus δ est grand, toutes choses d'ailleurs égales; & réciproquement.

Pour

Pour détruire ici l'aberration, nous devons avoir $Lf + LM = MF = 100$; or, en laissant $k = k'$, on a $LM = 0,1552$; il faut donc avoir $Lf = 99,8448 = x \cot \phi''$, donc $\cot \phi'' = 24 \times 0,998448 = 23,962752$; donc le complément de $\phi'' = 87°. 36,\frac{19344}{16763}$; donc $\phi'' = 2°. 23', 38055$. Or les trois verres isoscèles avoient donné $\phi'' = 2°. 23', 1937$; il faut donc, pour détruire l'aberration, augmenter l'angle ϕ'' de $0', 1868$.

XXXIII. *Recherche de la proportion des faces* c'', c''', *de la seconde lentille de crownglass, propre à détruire l'aberration de sphéricité dans un objectif à 3 lentilles, dont les deux autres resteroient isoscèles.*

Nous venons de trouver que, pour détruire l'aberration, il faudroit augmenter ϕ'' de $0', 1868$; il faudroit donc diminuer d'autant l'angle de derniere réfraction δ'', & par conséquent augmenter à peu près d'autant l'angle d'incidence α'' sur la troisieme lentille; or cet angle d'incidence α'' est $= k + \phi'$; & puisque le verre concave doit rester isoscele, c'est ϕ' qui doit seul augmenter de $0', 1868$. Mais j'ai $\phi' = m \sin \left(c'' + c''' - \sin \frac{(c'' + \phi)}{m} \right) - c'''$. Lorsque nous avons pris la seconde lentille isoscele, en posant $c'' = c''' = c$, nous avons trouvé $\phi' = 7°. 33', 53798$ (XXXII.), & nous voulons qu'il devienne $= 7°. 33', 72478$. Si l'augmentation étoit plus considérable, il faudroit prendre le *maximum* de ϕ', qui est (XXVII. Cor. I.) lorsqu'on prend $c'' = 0$. Mais, puisque l'augmentation est si petite, il suffira de prendre c'' un peu plus petit que c'''.

Dans les faces isoscèles on avoit $c'' = c''' = 3°. 24', 7488$, & 2 sin $c'' = 0,1190476$; supposons $c'' = 3°. 8'$, on aura sin $c''' = 0,0643879$, (puisque la somme des sinus $c'' + c'''$ doit rester constante,) donc $c''' = 3°. 41', 50258$: or ϕ n'aiant pas varié, puisque la premiere lentille reste isoscele, j'ai $c'' - \phi = - 37', 9534$;

donc ang sin $\frac{(c'' - \phi)}{m} = - 24', 4861$;

donc $c'' + c''' - \sin \frac{(c'' - \phi)}{m} = 7^{\circ}.13', 9886$;

donc $m \sin \left(c'' + c''' - \sin \frac{(c'' - \phi)}{m} \right) = 1{,}55 \times 0{,}1259071$,

ou $\sin \delta' = 0{,}1951560$;

donc	$\delta' =$	$11^{\circ}.15', 23004$,
d'où ôtant c'''	$=$	$3.\ 41, 50258$,
reste $\phi' = \delta' - c'''$	$=$	$7^{\circ}.33', 72746$.
Or la lentille isoscele donnoit ϕ'	$=$	$7^{\circ}.33, 53798$,
on a donc l'augmentation de ϕ', ou α	$=$	$0^{\circ}.\ 0', 18948$,

à peu près telle qu'on la cherchoit.

REMARQUE I.

Une simple analogie suffiroit pour donner présentement l'arc c'', avec toute la précision requise: en le diminuant de $16', 7488$, on a augmenté ϕ' de $0', 18948$; donc, pour n'augmenter ϕ' que de $0'$, 1868, il n'eût fallu diminuer c'' que de $16', 511$. Mais, quoique c'est peut-être là toute la précision que la pratique comporte; comme il n'est cependant pas rigoureusement vrai que l'angle δ de réfraction diminue autant que l'angle d'incidence α augmente, il ne sera pas inutile de calculer immédiatement l'angle ϕ'' sur cette nouvelle valeur de ϕ', en posant la derniere lentille concave isoscele.

La formule donne:

$$\phi'' = k - n \sin \left(2k - \sin \frac{(k + \phi')}{n} \right);$$

or

or k n'aiant point changé est $= 4^\circ.\ 16', 02102$,
nous venons de trouver $\phi' = 7.\ 33, 72746$,
donc $k + \phi' = 11^\circ. 49', 74848$;

donc $\sin \frac{(k + \phi')}{n} = \frac{0,2049939}{1,6} = 0,1281212$;

donc $\text{ang} \sin \frac{(k + \phi')}{n} = 7^\circ.\ 21', 66227$;

donc $2k - \sin \frac{(k + \phi')}{n} = 1^\circ.\ 10', 37978$;

donc $n \sin \left(2k - \sin \frac{(k + \phi')}{n}\right) = 1,6 .\ 0,0204712$,

ou $\sin \delta'' = 0,0327539$;

donc δ'' - - $= 1^\circ.\ 52', 61988$;

donc $\phi'' = k - \delta'' = 2^\circ.\ 23', 40114$.

REMARQUE 2.

Nous avons vû (XXXII. Rem. 8.) que, pour détruire l'aberration, il faudroit avoir $\phi'' = 2^\circ.\ 23', 38055$. Mais, en posant dans la seconde lentille convexe la premiere face $c'' = 3^\circ.\ 8'$, nous venons d'avoir $\phi'' = 2^\circ.\ 23, 40114$; il est donc trop grand de $0', 02059'$: or, si une diminution de $16', 7488$ sur l'arc c'' isoscele a augmenté ϕ'' de $0', 2074$, il faudra, pour n'augmenter ϕ'' que de $0', 2074 - 0', 02059 = 0', 1868$, prendre l'arc $c'' = c - \frac{16', 7488 \times 0, 1868}{0, 2074} = c - 15', 0852$; ce qui donne l'arc $c'' = 3^\circ.\ 9', 6636$; $\sin c'' = 0,0551429$; donc $\sin c'''$ $(= 0, 1190476 - \sin c'') = 0,0639047$, & par conséquent $c''' = 3^\circ.\ 39', \frac{2483}{2963}$, ou $c''' = 3^\circ.\ 39', 8381$.

 RE-

REMARQUE 3.

Toutes les faces étant ainsi déterminées, il est aisé d'en inférer les raïons de courbure par l'équation $r = \frac{x}{\sin c}$; on aura donc pour un objectif à trois lentilles sans aberration, avec les raïons les plus égaux qu'il soit possible, la construction suivante; en posant l'ouverture $= 8,333$.

Crownglass.		*Crownglass.*		*Flintglass.*	
raïons		*raïons*		*raïons*	
70;	70;	75,5346;	65,221;	56;	56;

ou en général, pour une distance focale quelconque F, & une ouverture $\frac{F}{12}$, on aura:

$$r = + 0,7. F,$$
$$r' = - 0,7. F,$$
$$r'' = + 0,7553. F,$$
$$r''' = - 0,65221. F,$$
$$r^{IV} = - 0,56. F,$$
$$r^{V} = + 0,56. F.$$

REMARQUE 4.

Il est évident qu'il ne sauroit y avoir de construction plus aisée dans la pratique, ni plus avantageuse, que celle que je viens de déterminer, soit pour l'égalité des raïons des faces, soit pour diminuer les courbures; & il est clair qu'en plaçant le flintglass entre les deux lentilles convexes, on augmenteroit l'aberration de sphéricité du double de la flèche de la derniere face; ce qu'on ne sauroit détruire qu'en donnant de plus grandes courbures à quelques surfaces, & en rendant les raïons des bassins plus inégaux.

Cependant, comme toutes les lunettes de Mrs. Dollond à trois verres, ont le flintglass au milieu, & que cette disposition diminue l'épais-

paiſſeur de l'objectif à ſa circonférence, ce qui peut n'être pas indifférent dans de grandes ouvertures, je vais appliquer ma méthode à la recherche des courbures les plus avantageuſes, dans un objectif à trois verres, lorſque le verre concave eſt placé entre les deux lentilles convexes.

XXXIV. *Recherche de la proportion des faces, la plus avantageuſe pour détruire l'aberration de ſphéricité dans un objectif à 3 lentilles dont le verre concave eſt placé entre les deux convexes.*

Si les trois verres étoient iſoſceles, on auroit à très peu près, comme je l'ai obſervé (XXXII. Rem. 5.) $\Phi'' = 2°. 23,1937$; à cet angle ſe joindroit encore celui qui réſulte de la flèche de la derniere face. Or cet angle eſt à l'angle au foïer A à très peu près, comme la flèche eſt à la diſtance focale. On auroit donc (fig. 3.) $100 : 0,124 = 143',157 : fBG = 0',1775$. Ainſi l'angle total ſeroit $\Phi'' + fBG = 2°. 23,3712$, d'où ôtant l'angle de meſure $A = 2°, 23, 1572$, il reſte un angle d'aberration de $0',214$. Fig. 3.

Pour détruire cette aberration, il s'agit donc de faire en ſorte que le dernier angle à l'axe Φ'' devienne $\Phi'' = A - fBG = 2°. 22',9797$; & pour éviter les trop grandes courbures, il faut laiſſer s'il ſe peut le flintglaſs iſoſcele, & obtenir la diminution de ces $0',214$, en donnant aux lentilles convexes la proportion des faces qu'exige le *minimum*.

Mais il eſt aiſé de prévoir une difficulté, c'eſt que le *minimum* ne s'écartant gueres de l'égalité des faces, il ne pourra pas produire toute la diminution requiſe ſur l'angle Φ'', qui réſulte des verres iſoſceles; en ce cas il faudra altérer encore les faces du verre concave, pour achever de détruire l'aberration.

L'opération la plus ſimple c'eſt de chercher le *minimum* de l'angle Φ, pour la premiere lentille; ſi cet angle eſt plus petit de $0'$, 214, que dans la lentille iſoſcele, (XXXII.) tout eſt fait; & les deux

 autres

autres verres peuvent rester isoscèles, puisqu'alors on peut compter que Φ' sera augmenté de la même quantité, & que Φ'' sera diminué d'autant à très peu près, par la remarque 8. de l'art. XXXII.

I. Calcul du minimum *de l'angle* Φ *pour la premiere lentille.*

La formule du *minimum* est ici:

$$\Phi = m \sin c - c' \text{ (XXVII. Cor. 3.)},$$

& la condition est $\sin c = m \sin c'$; or, la somme des sinus étant constante, j'ai $\sin c + \sin c' = 0,1190476$,

donc $2,55 . \sin c' = 0,1190476$,
ce qui donne $\sin c' = 0,0466853$; $c' = 2°. 40', \frac{1600}{2500}$,
& $\sin c = 0,0723623$; $c = 4°. 8', \frac{2846}{2502}$,
donc $m \sin c = 0,1121615$,
donc ang $m \sin c = 6°. 26', 39584$,
d'où ôtant $c' = 2. 40, 55072$,
j'ai donc $\Phi = 3°. 45', 84512$.

REMARQUE I.

En comparant cet angle Φ, à celui que la lentille isoscele a donné (XXXII), on trouvera que le *minimum* l'a diminué de $0', 108$; ce qui n'est que la moitié de la diminution nécessaire pour détruire l'aberration. Il semble donc qu'en prenant encore le *minimum* de la derniere lentille convexe, on achevera de détruire l'autre moitié de cette aberration sans toucher au verre concave. Mais cela n'est vrai qu'autant que le *minimum* de la derniere lentille mettra la même inégalité entre les faces c'' & c''' que nous venons de trouver entre les faces c & c'. Or c'est ce qui ne sauroit arriver ici, puisque le cas du *minimum* suppose l'équation: $\sin (c'' + \Phi') = m \sin c'''$; ce qui diminue la disproportion des faces de presque toute la valeur de l'angle Φ', & les ramenera fort près de l'état isoscele; auquel cas, en ne touchant point au verre concave, on n'aura obtenu qu'une diminution de $0', 108$, au lieu de celle de $0', 214$ qui est requise. Il faut donc se résoudre d'altérer

térer l'égalité des faces concaves, pour augmenter l'angle négatif φ'. Mais il ne sera pas besoin de recourir au *maximum* de φ', parce que l'état isoscele s'éloignant déjà du *minimum*, pour peu qu'on augmente la face antérieure k, on s'en éloigne toujours plus, ce qui fait croître plus sensiblement l'angle φ', qu'il ne décroîtroit par l'opération contraire.

II. Calcul de l'angle φ' pour le verre concave.

Dans l'état isoscele on avoit $k = k' = 4^\circ.\ 16', 021027$. Supposons, pour augmenter φ', que la courbure de la premiere face soit augmentée de $32'$, en sorte que l'on ait $k = 4^\circ.\ 48'$; puisqu'on a le sinus constant des faces concaves $\sin k + \sin k' = 0,1488095$;

si l'on soustrait $\sin k\ (4^\circ.\ 48) = 0,0836778$,

on aura $\sin k' = 0,0651317$,

& par conséquent $k' = 3^\circ.\ 44', 06478$;

or $k + \varphi = 8^\circ.\ 33', 84512$,

donc $\sin \dfrac{(k + \varphi)}{n} = \dfrac{0,1489155}{1,6} = 0,0930772$,

donc $\beta' = 5^\circ.\ 20', 42236$,

donc $k + k' - \beta' = \gamma' = 3^\circ, 11', 6424$,

donc $n \sin \gamma' = 1,6 \times 0,0557176$,

ou $\sin \delta' = 0,08914824$,

donc $\delta' \quad - \quad - \quad = 5^\circ.\ 6', 87642$,

d'où retranchant $k' \quad = 3.\ 44, 06478$,

reste l'angle $\varphi' \quad = 1^\circ.\ 22', 81164$.

Remarque 2.

On sera peut-être surpris que, voulant augmenter l'angle φ' négatif, dont le *maximum* est lorsqu'on pose $k = 0$ (XXVII. Cor. 2. n. 2.), j'augmente k au lieu de le diminuer. Mais c'est afin de n'augmen-

menter les courbures que le moins qu'il eſt poſſible. Le *minimum* de l'angle φ' négatif, ou de la formule $\varphi' = \delta - k'$, eſt lorſqu'on poſe ſin $(k + \varphi) = n$ ſin k', ou lorsſqu'on a à peu près $k + \varphi = 1,6\,k'$; or aiant trouvé ici $\varphi = 3°. 46$, & la ſomme des angles $k + k'$ étant $8°. 32$, on a $k + k' = 2,6k' - \varphi$, ou $8°. 32' = 2,6k' - 3°. 46'$, donc $k' = \frac{12°. 18'}{2,6} = 4°. 43'$, donc $k = 3°. 49'$. Mais, par la nature du *minimum*, ſoit que je prenne k plus grand ou plus petit que $3°. 49'$, je ſuis ſûr d'augmenter l'angle φ'; & puiſque je n'ai pas beſoin d'en prendre le *maximum*, je ſuis libre de choiſir le chemin le plus court. Or, partant du cas iſoſcele qui donne $k = 4°. 16'$, je m'écarte bien moins de l'égalité des faces en augmentant k, de $32'$, que ſi en le diminuant je paſſois par le *minimum* pour deſcendre juſqu'à $k = 59'$, qui me donneroit approchant la même valeur de φ', que me donne $k = 4°. 48'$.

Remarque 3.

Comme il faut connoitre d'avance ſi l'angle φ' qu'on cherche ſera poſitif, ou négatif, afin de ſavoir s'il faut augmenter ou diminuer la courbure antérieure du verre concave, il y a un moïen très aiſé d'y parvenir; car on a ici, à moins d'une minute près,

$\varphi - \varphi'' = \varphi'$; & comme φ & φ'' ſont donnés; on a $3°. 46' - 2°. 23' = \varphi' = 1°. 23'$, ce qui étant plus petit que $k' = 4°. 16'$, indique la formule $\varphi' = k' - \delta$, ou l'angle d'émerſion divergent de l'axe. Dans tous les cas, quel que ſoit l'arrangement des verres, il eſt toujours facile de connoitre d'avance, à très peu près, la valeur d'un angle φ quelconque; en ſubſtituant les arcs aux ſinus. (art. IX. ſeq.)

III. Calcul de l'angle φ'', au ſortir de la troiſieme lentille convexe, en prenant le minimum *de cet angle.*

La formule du *minimum* eſt ici:

$$\text{ſin}\,(c'' + \varphi') = m\ \text{ſin}\ c''',$$

ce

ce qui donne à très peu près

$$\sin c'' = m \sin c''' - \sin \phi',$$

donc $\sin c'' + \sin c''' = 0,1190476 = (m+1) \sin c''' - \sin \phi'$,

donc $\sin c''' = \frac{0,1430953}{2,55} = 0,0561158$,

d'où l'on conclud $\sin c'' = 0,0629318$,

donc l'arc $c''' = 3°. 13',013425$,

& l'arc $c'' = 3°. 36,486738$,

or j'ai $\phi' = 1. 22,81164$,

donc $\alpha'' = c + \phi' = 4°. 59,298378$,

donc $\sin \beta'' = \frac{0,0869524}{1,55} = 0,0560983$,

donc $\beta'' = 3°. 12',95317$,

donc $\gamma'' = c'' + c''' - \beta = 3°. 36', 54699$,

donc $m \sin \gamma'' = 0,06294929 \times 1,55$,

ou $\sin \delta'' = 0,0975714$,

donc $\delta'' = 5°. 35',960276$,

d'où ôtant $c''' = 3^d. 13,013425$,

reste l'angle cherché $\phi'' = 2°. 22',946851$.

REMARQUE 4.

Nous avons trouvé au commencement de cet article que, pour détruire totalement l'aberration, il falloit avoir $\phi'' = 2°. 22',9797$. Après avoir pris le *minimum* des deux angles ϕ & ϕ'', & posé $k = 4°. 48'$, nous trouvons $\phi'' = 2°. 22,94685$; ainsi il y auroit un angle d'aberration au delà de la distance focale de $0',03285$; il faut donc diminuer ϕ' dans le verre concave de cette quantité, sans rien toucher à la derniere lentille, dont le *minimum* ne varie point par cette légere altération de ϕ'. Pour trouver tout d'un coup, & sans beau-

coup de tâtonnement la valeur de k, qui donnera $\phi'' = 2°. 22', 9797$, il faut recourir à l'analogie; ſuppoſant donc que les trois verres iſoſceles auroient donné, lorſque le flintglaſs eſt placé au milieu, $\phi'' = 2°. 23', 1937$, on auroit eu $k = k' = 4°. 16, 021$. Mais nous avons ici $k = 4°. 48'$, & $\phi'' = 2°. 22, 9468$. Ainſi une diminution de $0', 2469$ ſur ϕ'', demandoit une augmentation de $32'$ ſur k; donc la diminution requiſe de $0', 214$ ſur ϕ'' n'exigeoit qu'une augmentation de $\frac{32' \times 214}{247}$ ſur k, c'eſt à dire d'environ 27 minutes, ce qui indique $k = 4°. 43'$, ou un peu moins, parce que l'analogie n'eſt pas rigoureuſement exacte.

En poſant donc $k = 4°. 42'$, on aura $k' = 3°. 50, 0572$, & l'on trouve

$$\alpha' = k + \phi = 8°. 27', 845,$$
$$\beta' \quad - \quad - = 5°. 16, 697,$$
$$\gamma' \quad - \quad - = 3°. 15, 359,$$
$$\delta' \quad - \quad - = 5°. 12, 838,$$
$$\phi' = \delta' - k' = 1°. 22, 7809.$$

Or $k = 4°. 48'$ donnoit $\phi' = 1°. 22', 8116$,

& pour détruire l'aberration, il faut avoir $\phi' = 1°. 22, 7788$, qui ne differe de l'angle trouvé que de $0', 0021$; donc, ſi en diminuant k de $6'$, on a diminué ϕ' de $0', 0307$, pour le diminuer encore de $0', 0021$, il faudra encore diminuer k de $\frac{6' \times 21}{307} = \frac{2}{5}'$; ce qui donne enfin $k = 4°. 41', 6$, & $k' = 3°. 50', 457$.

XXXV. Toutes les faces étant ainſi déterminées de maniere à donner les plus petites courbures poſſibles, on a:

$$c = 4°. 8', 981; \ \sin c = 0,0723623,$$
$$c' = 2°. 40', 5507; \ \sin c' = 0,0466853,$$

$k =$

$k = 4^\circ. 41', 6;$ sin $k = 0,0818225,$
$k' = 3^\circ. 50', 457;$ sin $k' = 0,0669870,$
$c'' = 3^\circ. 36', 4867;$ sin $c'' = 0,0629318,$
$c''' = 3^\circ. 13', 0134;$ sin $c''' = 0,0561158,$

ce qui donne la construction suivante, pour un foïer $F = 100$.

Ordre des verres.	I. Lentille convexe de crownglaſs.	II. Lentille concave de flintglaſs.	III. Lentille conv. de crownglaſs.
Raïons des faces.	57,58; + 89,25.	50,923; 62,201.	66.209; 74,264.

Ou en général pour une diſtance focale $= F$,

$r = + 0,575806.\ F,$
$r' = - 0,892500.\ F,$
$r'' = - 0,509232.\ F,$
$r''' = + 0,622012.\ F,$
$r^{IV} = + 0,662092.\ F,$
$r^{V} = - 0,742644.\ F.$

REMARQUE.

Pour rendre le raïon r' plus petit & mettre un peu plus d'égalité entre les courbures, il n'y auroit eu qu'à ne pas prendre *le minimum* de la premiere lentille, & choiſir pour c' une courbure moins éloignée de $3^\circ. 24'$, en laiſſant c'' & c''' tels qu'ils ſont. Mais il auroit fallu augmenter k, & diminuer k'; or k étant déjà néceſſairement la plus grande courbure lorſque Φ & Φ'' ſont à leur *minimum*; il ne convenoit pas de l'augmenter, ou de rendre r'' encore plus petit qu'il n'eſt ici.

XXXVI. En comparant ces déterminations avec celles qu'un illuſtre Géometre a données dans les *Mémoires de l'Académie de Paris* pour 1764, pag. 144, on les trouvera bien différentes, quoique calculées ſur les mêmes rapports que j'adopte ici pour la réfraction & la diſperſion des verres. Mais j'ai lieu de croire qu'il s'eſt gliſſé dans celles-là quelque erreur de calcul, ou d'impreſſion; car en calculant ſur

 les

les dimensions indiquées l'angle ϕ'', je l'ai trouvé de 2°. 44, 51, ce qui supposeroit une aberration de sphéricité de plus de 21 minutes, comme on peut s'en convaincre par un calcul très aisé. Les raions des faces sont:

$$r = + 0,5986.\ R,$$
$$\rho = - 0,3255.\ R,$$
$$r' = + 0,9135.\ R,$$
$$\rho' = - 1,2058.\ R;$$

surquoi il faut observer que la distance focale n'est pas R, mais $\frac{R}{1 + \frac{1}{60}}$, en sorte qu'ici on a $R = \frac{61}{60} F$. En substituant donc cette valeur de R, on aura:

$$r = + 0,60857.\ F,$$
$$\rho = - 0,33092.\ F,$$
$$r' = + 0,92872.\ F,$$
$$\rho' = - 1,22589.\ F;$$

donc aiant $\sin c = \frac{x}{r} = \frac{F}{24 r}$,

on a $\sin c = 0,0684657$; $c = 3°.\ 55', 552$,
$\sin c' = \sin k = 0,1259096$; $c' = k = 7°.\ 13', 997$.
$\sin k' = \sin c'' = 0,0448642$; $k' = c'' = 2°.\ 34', 28389$,
$\sin c''' = 0,0339887$; $c''' = 1°.\ 56', 8672$.

Or, comme en prenant les arcs pour leurs sinus, on ne se trompe pas d'une minute sur l'angle d'aberration, il n'y a qu'à poser

$$\phi'' (m - 1)(c + c' + c'' + c''') - (n - 1)(k + k'),$$

c'est à dire: $\phi'' = 0,55\ (940', 68) - 0,6\ (588', 27)$,

on trouvera ϕ'' = 164', 412,
d'où ôtant l'angle de mesure A = 143, 157,
resteroit l'angle d'aberration = 21', 255.

Il eſt tout clair, qu'il s'eſt gliſſé ici par mépriſe quelque erreur dans l'application des formules générales au calcul numérique. En effet la diſtance focale devroit donner:

$$F = 100 = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''') - (n-1)(\sin k + \sin k')}$$

$$= \frac{100}{24\,[(0,55 \times 0,273228) - (0,6 \times 0,1707739)]},$$

ce qui ſuppoſeroit $1', 147468 = 1$, & par conſéquent $\frac{R}{1 + \frac{1}{60}}$ ne ſeroit pas la diſtance focale, mais la $\frac{1147468}{1000000}$ partie de cette diſtance, ou $R = 1,166592466.\,F$. Ainſi les dimenſions des raïons doivent être:

$$\begin{aligned} r &= + 0,69833.\ F, \\ \rho &= - 0,37972.\ F, \\ r' &= + 1,06568.\ F, \\ \rho' &= - 1,40667.\ F, \end{aligned}$$

ce qui donneroit

$$\begin{aligned} &\sin c = 0,0596670; && c = 3^\circ.\ 25', 242, \\ &\sin c' = \text{ſ}k = 0,1097280; && c' = k = 6^\circ.\ 17, 980, \\ &\sin k' = \text{ſ}c'' = 0,0390987; && k' = c'' = 2^\circ.\ 14', 446, \\ &\sin c''' = 0,0296207; && c''' = 1^\circ.\ 41, 844; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en ſubſtituant les arcs aux ſinus:

$$\Phi'' = 0,55\,(819,512') - 0,6\,(512,416) = 143,276.$$

Ici l'angle d'aberration devient incomparablement plus petit qu'auparavant, ſavoir $\Phi'' - A = 0,119'$. Cependant la confuſion ſur une lunette de 3 à 4 pieds ſeroit encore environ dix fois trop ſenſible, ſi l'on donnoit à l'objectif une ouverture égale à la $\frac{1}{12}$ partie du foïer.

En répétant le calcul ſur les ſinus eux-mêmes, je trouve

ſin

$\sin c = \sin \alpha = 0{,}0596670$; $\alpha = c = 3^\circ.\ 25',242$,
$\sin \beta = 0{,}0384948$; $\beta = 2^\circ.\ 12',369$,
$\sin \gamma = 0{,}1307720$; $\gamma = 7^\circ.\ 30',8529$,
$\sin \delta = 0{,}2026861$; $\delta = \alpha' = 11^\circ.\ 41',6856$,
$\sin \beta' = 0{,}1266850$; $\beta' = 7^\circ.\ 16',6863$,
$\sin \gamma' = 0{,}0220300$; $\gamma' = 1^\circ.\ 15',7396$,
$\sin \delta' = 0{,}0352480$; $\delta' = \alpha'' = 2^\circ.\ 1',19883$,
$\sin \beta'' = 0{,}0227406$; $\beta'' = 1^\circ.\ 18',18328$,
$\sin \gamma'' = 0{,}0459752$; $\gamma'' = 2^\circ.\ 38',1067$,
$\sin \delta'' = 0{,}0712615$; $\delta'' = 4^\circ.\ 5',18689$.

$\phi'' = \delta'' - c''' = 2^\circ.\ 23',34289$,
$- A = 2^\circ.\ 23'.\ 15714$,

angle d'aberration $\phi'' - A = 0^\circ.\ 0',18575$.

XXXVII. J'avois choisi l'objectif que je viens d'examiner, par ce qu'étant calculé sur les mêmes rapports de réfractions & de dispersions que j'emploie ici, il étoit possible de comparer les dimensions des raïons. Mais, comme l'illustre Géometre qui le propose en a simplement conclû les dimensions d'après celles d'un autre objectif qu'il avoit calculées en supposant la dispersion des verres $dn = \frac{3}{2}$, j'ai cru devoir chercher aussi quelle seroit l'aberration de ce dernier objectif, pour une ouverture de $\frac{F}{12}$.

Les dimensions, telles qu'on les trouve (*Mêlanges de la Soc. Roy. de Turin* Tom. III. p. 395, & *Mém. de l'Acad. de Paris* pour 1764. p. 101.) sont, en posant la distance focale $= R$. $m = 1{,}55$, $n = 1{,}6$, $dn = 1{,}5$.

$r = +\ 0{,}5986.\ R$,
$r' = -\ 0{,}3255.\ R$,
$r'' = +\ 0{,}7288.\ R$,
$r''' = -\ 1{,}8116.\ R$;

en

en posant donc l'ouverture $= \frac{R}{12} = \frac{100}{12}$,

on aura $\sin c = 0{,}0696068$; $c = 3°.\ 59',48415$,
$\sin c' = \sin k = 0{,}1280081$; $c' = k = 7°.21',270111$,
$\sin c'' = \sin k' = 0{,}0571716$; $c'' = k' = 3°.\ 16',64876$,
$\sin c''' = 0{,}229999$; $c''' = 1°.\ 19',07494$;

donc, en substituant les arcs aux sinus, on a:

$$\Phi'' = 0{,}55\ (956',47796.) - 0{,}6\ (637',91887,)$$

ou $\Phi'' = 143',3155$;

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',1583$.

En calculant rigoureusement par les sinus eux-mêmes, je trouve:

$$\Phi = 6°.\ 19',111347,$$
$$\Phi' = 0°.\ \ 8',4907254,$$
$$\Phi'' = 2°.\ 23',320268;$$

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',163$,

ce qui ne permettroit qu'une ouverture d'environ 1 pouce sur une lunette de 4 pieds.

Il est vrai qu'ici R n'est pas non plus bien exactement la distance focale; car, comme on doit avoir pour cette distance:

$$F = \frac{x}{(m-1)(\sin c + \sin c' + \sin c'' + \sin c''') - (n-1)(\sin k + \sin k')},$$

$$\text{ou } F = \frac{R}{24\ [0{,}55 \times 0{,}2777864 - 0{,}6 \times 0{,}1851797]},$$

$$\text{on a } F = \frac{R}{1{,}0001939};$$

donc chaque raïon donné doit être encore multiplié par 1,0001939, ce qui donne les nouvelles dimensions que voici:

$r =$

$$r = 0{,}5987158.\ F,$$
$$r' = 0{,}3255630.\ F,$$
$$r'' = 0{,}7289410.\ F,$$
$$r''' = 1{,}81195.\ F;$$

d'où l'on tire:

$$\sin c = 0{,}0695934;\quad c = 3^\circ.\ 59',437974,$$
$$\sin c' = \sin k = 0{,}1279834;\quad c' = k = 7^\circ.\ 21,\ 184466,$$
$$\sin c'' = \sin k' = 0{,}0571605;\quad c'' = k' = 3^\circ.\ 16,\ 610537,$$
$$\sin c''' = 0{,}0229955;\quad c''' = 1^\circ.\ 19,\ 059835.$$

Mais ces nouvelles valeurs ne diminuent pas l'angle d'aberration; car on aura par le calcul:

$$\sin \beta = \frac{\sin c}{m} = 0{,}0448900,$$
$$\gamma = c + c' - \beta = 8^\circ.\ 46',2501,$$
$$\sin \beta' = \frac{m}{n} \sin \gamma = 0{,}1477177;$$
$$\gamma' = k + k' - \beta' = 2^\circ.\ 8',11374,$$
$$\sin \beta'' = \frac{n}{m} \sin \gamma' = 0{,}0384600,$$
$$\gamma'' = c'' + c''' - \beta'' = 2^\circ.\ 23',422,$$
$$\sin \delta'' = n\gamma'' = 0{,}6464688;$$
$$\Phi'' = \delta'' - c''' = 2^\circ.\ 23',33458;$$

donc l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',1773.$

XXXVIII. On trouve dans les *Mémoires de l'Académie de Paris* pour l'année 1762. diverses constructions d'objectifs à trois verres, proposées par feu Mr. Clairaut; j'ai eu la curiosité d'examiner celle qui donne les raïons les moins inégaux, & qui laisse le verre de flintglass isoscele, ce que j'ai montré n'être pas possible dans le cas de $dn = 1{,}6$, si l'on

si l'on veut détruire exactement l'aberration de sphéricité en laissant les lentilles convexes d'un même foïer (art. XXXIV.). Calcul fait, je suis obligé d'avertir les Artistes que les dimensions dont je parle sont très fautives, de quelque source que l'erreur s'y soit glissée; voici les dimensions proposées (*Mém. de Paris* de 1762. p. 631.):

$$r = r^{V} = \frac{10000}{12636} R,$$
$$r^{I} = r^{IV} = \frac{10000}{20697} R,$$
$$r^{II} = r^{III} = 0{,}45.\ R',$$

où il faut noter que la distance focale est $= R'$, & qu'on a (ibid. §. 6) $R = 1{,}2 R'$; les rapports sont $m = 1{,}55$; $n = 1{,}6$; $dn = 1{,}5$: on aura donc, en posant $R' = 100$,

$$r = r^{V} = 94{,}9668,$$
$$r^{I} = r^{IV} = 57{,}9793,$$
$$r^{II} = r^{III} = 45;$$

& posant la demi-ouverture $x = \frac{R'}{24}$, on aura:

$$\sin c = \sin c^{III} = 0{,}0438750,$$
$$\sin c^{I} = \sin c^{II} = 0{,}0718646,$$
$$\sin k = \sin k^{I} = 0{,}0925926.$$

Or, comme on a à très peu près:

$$\sin \Phi^{II} = (m-1)(\sin c + \sin c^{I} + \sin c^{II} + \sin c^{III}) - (n-1)\sin k + \sin k^{I},$$

on a $\sin \Phi^{II} = 1{,}1\ (0{,}12731356) - 1{,}2\ (0{,}0925926)$,

ou $\sin \Phi^{II} = 0{,}0162024$; donc $\Phi^{II} = 55\frac{1}{2}'$.

Ainsi l'aberration négative seroit $A - \Phi^{II} = 1^{\circ}.\ 27'$, ce qui passe toute exagération.

Il est donc évident que R' ne sauroit être ici la distance focale: en effet, soit cette distance $= F$, on aura:

$$F = \frac{R'}{0,55\left(\frac{2}{0,949668} + \frac{2}{0,579793}\right) - 0,6\left(\frac{2}{0,45}\right)},$$

ou $F = \frac{R'}{3,055525 - 2,666666} = \frac{R'}{0,388859}$;

d'où l'on voit que R' eſt à la diſtance focale comme 2, 571626 à 1. En diviſant donc chaque raïon, & en multipliant chaque ſinus, par 2,571626, on aura les vraies dimenſions de l'objectif propoſé, ſavoir:

$r = r^{V} = 0,369262F$; $\int c = \int c''' = 0,1128300$; $c = c''' = 6°.28',70865$,

$r' = r^{IV} = 0,225458F$; $\int c' = \int c'' = 0,1848081$; $c' = c'' = 10°.38',9965$,

$r'' = r''' = 0,1749866F$; $\int k = \int k' = 0,2381135$; $k = k' = 13°,46',51344$.

Les arcs donnent: $\varphi'' = 1,1\,(c + c') - 1,2k = 138',6595$; donc l'angle d'aberration négative eſt $A - \varphi'' = 4',5$. Mais, quelque intolérable que fût une telle âberration, celle de cet objectif ſeroit au moins quatre fois plus grande, parce que les arcs des courbures étant ſi conſidérables, le calcul par les arcs doit donner l'aberration bien au deſſous de ſa grandeur effective.

XXXIX. Dans ce même Mémoire de feu Mr. Clairaut, ce grand Géometre donne les dimenſions de trois objectifs, qui ont été réellement exécutés avec le plus grand ſuccès, l'un par M. Anthéaulme, & les deux autres par M. de l'Eſtang. Il ſera donc très intéreſſant de rechercher par notre méthode juſqu'à quel point l'aberration dans l'axe, qui par les formules devoit être nulle, étoit en effet détruite dans ces lunettes. On en pourroit même conclure avec la plus exacte préciſion quelle eſt la quantité d'aberration tolérable dans la pratique, ſi les ouvertures des lunettes avoient été indiquées.

Le prémier objectif, (*Mém. de Paris* 1762. p. 613.) eſt à deux verres, dont celui de criſtal tourné vers l'œil eſt un méniſque; les dimenſions des raïons ſont:

$r =$

$$r = \frac{F}{1,034};\quad r' = \frac{-F}{5,633};\quad r'' = \frac{-F}{5,555};\quad r''' = \frac{-F}{1,111},$$

d'où posant $\sin c = \frac{x}{r} = \frac{F}{24r}$, on tire:

$$\sin c = 0,0430833;\quad c = 2^\circ.28',15519,$$
$$\sin c' = 0,2347033;\quad c' = 13^\circ.34',4657,$$
$$\sin k = 0,2314815;\quad k = 13^\circ.23',058657,$$
$$\sin k' = 0,0462963;\quad k' = 2^\circ.39',211975.$$

Les arcs donnent: $\phi' = 0,55\,(c + c') - 0,6k + 0,6k'$, ou $\phi' = 143',13348$, donc l'angle d'aberration négative est: $A - \phi' = 0',02366$. Cette aberration peu considérable est encore diminuée par la flèche de la derniere courbure, puisqu'elle est convexe. En faisant donc le calcul exactement, je trouve:

$$\alpha = 2^\circ.28',15519;\quad \alpha' = 22^\circ.33',9352,$$
$$\beta = 1^\circ.35',5669;\quad \beta' = 13^\circ.52',61862,$$
$$\gamma = 14^\circ.27,054;\quad \gamma' = 3^\circ.\ 8',77194,$$
$$\delta = 22^\circ.45,3423;\quad \delta' = 5^\circ.\ 2,27760,$$
$$\phi = 9^\circ.10',8766;\quad \phi' = 2^\circ.23',06063;$$

donc le complément de $\phi' = 87^\circ.36,93937;$

donc l'aberration dans l'axe est:

$$fF = \frac{F}{24}(24 - 24,016192) + \frac{F}{24}.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}k',$$

ou $$fF = (0,0231606 - 0,016192)\,\frac{F}{24} = 0,00029.F.$$

Or, puisque M. Anthéaulme a exécuté sur ces dimensions une lunette de 7 pieds, célebre par sa bonté, & qui équivaut à des lunettes ordinaires de 30 ou 35 pieds, on a ici $F = 84''$, & par conséquent l'aber-

berration de cette lunette, pour notre ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, feroit $=$ 0,02439 pouces. Si donc, fuivant la regle des Opticiens, l'aberration ne doit aller qu'à 0,000075''F (XXIX.), elle ne devroit être ici que 0,0063''; celle-ci feroit 3,87 fois trop grande. Il a donc fallu donner à cette lunette une ouverture $\omega = \frac{F}{12\sqrt{(3,87)}} = \frac{84''}{23,6}$ $= 3'',557$, ce qui feroit, felon la table de M. Huygens, l'ouverture d'une lunette ordinaire de 43 pieds. Mais celle-ci n'a produit que l'effet d'une lunette de 30 à 35. Il faut donc, ou que l'aberration infenfible foit encore moindre que nous ne la pofons, (contre la remarque 4. de l'art. XXIX.) ou que les arcs de courbure c' & k de l'objectif de M. Clairaut étant fi grands, il en ait réfulté des aberrations irrégulieres affez fortes pour diminuer la bonté de cette lunette. Pour connoître l'aberration tolérable dans la pratique, d'après cet objectif, en fuppofant l'ouverture d'une lunette ordinaire de 30 à 35 pieds $=$ $3'',1$, il n'y a qu'à pofer cette aberration: $a = \frac{0,02439''}{y}$; & l'on aura $\frac{F}{12.\sqrt{y}} = 3'',1$, ou $y = 5,098$; ce qui donne $a = 0,00478''$ pour ce cas-ci, ou en général $a = \frac{0,00478''F}{84''} = 0,000057''F$. Il faudroit donc diminuer d'un quart la mefure adoptée.

Le fecond objectif, (ibid. p. 615.) eft le même que le précédent, mais qui devoit avoir fur lui l'avantage, qu'en même tems que l'aberration feroit nulle dans l'axe, elle feroit auffi petite que poffible dans les autres directions. Les dimenfions indiquées font:

$$r = 0,6371\,F;\quad r' = 0,1962\,F;\quad r'' = -\,0,1995\,F;$$
$$r''' = -\,1,7630\,F,$$

d'où

d'où l'on tire les demi-courbures, & leurs sinus, pour une ouverture $\omega = \frac{F}{12}$, comme suit:

$$\begin{aligned}
\sin c &= 0{,}0654050; & c &= 3^\circ.45',0065449,\\
\sin c' &= 0{,}2123899; & c' &= 12^\circ.15',746657,\\
\sin k &= 0{,}2088554; & k &= 12^\circ.\ 3',317047,\\
\sin k' &= 0{,}0236339; & k' &= 1^\circ.21',254814;
\end{aligned}$$

par conséquent $\Phi' = 0{,}55\,(c + c') - 0{,}6\,k + 0{,}6\,k' = 143{,}1769213$, & l'aberration $\Phi - A = 0',0197$.

Le calcul rigoureux donne ici:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 3^\circ.45',006545; & \alpha' &= 21^\circ.\ 9',50096,\\
\beta &= 2^\circ.25',104955; & \beta' &= 13^\circ.\ 2',260409,\\
\gamma &= 13^\circ.35',648247; & \gamma' &= 2^\circ.20',198176,\\
\delta &= 21^\circ.21',930576; & \delta' &= 3^\circ.44',414197,\\
\Phi &= 9^\circ.\ 6',183919; & \Phi' &= 2^\circ.23',159383.
\end{aligned}$$

L'angle d'aberration paroit ici très petit, c'est $\Phi - A = 0',00224$. Mais il est dans le même sens que la flèche. On a le complément de $\Phi' = 87^\circ.36',84062$, ce qui donne l'aberration totale de sphéricité dans l'axe:

$$fF = \frac{F}{24}(24 - 23{,}999697) + \frac{F}{24}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}k',$$

$$\text{ou}\quad fF = (0{,}000303 + 0{,}011817)\frac{F}{24} = 0{,}000505.F,$$

aberration qui excede de $\frac{2}{5}$ celle de ce même objectif avant que M. Clairaut l'eût rendu théoriquement le plus parfait de tous. En supposant donc que M. de l'Estang en ait exécuté aussi une lunette de 7 pieds;

 elle

elle auroit eu une aberration de 0,04242″, avec une ouverture de 7″; ainsi, pour la réduire à la regle, il auroit fallu lui donner une ouverture $\omega = \frac{F}{12\sqrt{6,733}} = \frac{84''}{31,13} = 2'',7$, ce qui n'eût équivalû qu'à une lunette ordinaire de 25 pieds. Or il est à présumer qu'on n'aura pas donné à cet objectif perfectionné une moindre ouverture qu'au précédent, d'environ 3″, 1 pouces; il en faudroit donc conclure qu'une aberration de 0″,000099 F, n'est pas sensible. Du reste, si dans l'exécution cet objectif s'étoit trouvé supérieur au premier, quoique leurs aberrations soient comme 5 à 3, il en faudroit sans doute chercher la raison dans la diminution des grandes courbures, plus petites de 1°. 20′, dans ce second objectif que dans le précédent.

Enfin le troisieme objectif, aussi exécuté par M. de l'Estang avec beaucoup de succès pour des lunettes de 2 ou 3 pieds, a pour dimensions (ibid. p. 627.)

$$r = r' = r'' = r''' = r^{IV} = 0,45\,F, \ \& \ r^{V} = \infty;$$

la lentille de cristal bi-concave est entre une bi-convexe de verre commun & une autre convexo-plane: on a donc

$$\sin c = \sin c' = \sin k = \sin k' = \sin c'' = 0,0925925;$$
$$\sin c''' = 0,$$
$$c = c' = k = k' = c'' = 5^{\circ}.18',76623;$$
$$c''' = 0;$$

donc, en négligeant les sinus, on auroit

$$\Phi'' = 0,55\,(3 \times 318',7623) - 0,6\,(2 \times 318',7623),$$

ou $\Phi'' = 143',4548$, & l'angle d'aberration $\Phi'' - A = 0',2977$, ce qui est beaucoup trop grand.

Le

Le calcul des finus donne :

$\alpha = 5^\circ.18',76623;$

$\beta = 3^\circ.25,48347;$ $\beta' = 6^\circ.58,4825;$ $\beta'' = 3^\circ.46,12612;$

$\gamma = 7^\circ.12',04899;$ $\gamma' = 3^\circ.39,04996;$ $\gamma'' = 1^\circ.32',664011;$

$\text{fin}\,\delta = f\alpha' = 0,1942884;$ $f\delta' = f\alpha'' = 0,1018815;$ $\delta'' = \Phi'' = 2^\circ.23',616787;$

ainfi le complément de $\Phi'' = 87^\circ.36',383213;$

donc l'aberration totale dans l'axe eft :

$$fF = \frac{F}{24}(24 - 23,92329) = 0,003196.\ F.$$

L'aberration feroit donc, félon la regle ordinaire, 42 fois trop grande dans une lunette de deux pieds, & 40 fois trop grande dans une lunette de trois pieds; celle-là n'auroit pû admettre qu'une ouverture de 0, 306 pouces, & celle-ci, qu'une de 0'',468, tandis que les lunettes ordinaires permettent une ouverture de 0, 77 pouce dans une lunette de deux pieds, & de 0, 95 pouce dans une de trois. Quand on n'auroit donné que ces ouvertures à l'objectif de M. Clairaut, il en réfulteroit dans le premier cas que l'aberration infenfible feroit $a = 0'',000475\ F$; & dans le fecond, $a = 0'',00032\ F$, c'eft à dire, environ fextuple, ou quadruple de celle que j'ai prife pour regle. En fuppofant néanmoins qu'on n'aura pas adapté à cet objectif des oculaires d'un plus grand foïer, ou d'un moindre effet que ceux des lunettes ordinaires de 2 & de 3 pieds.

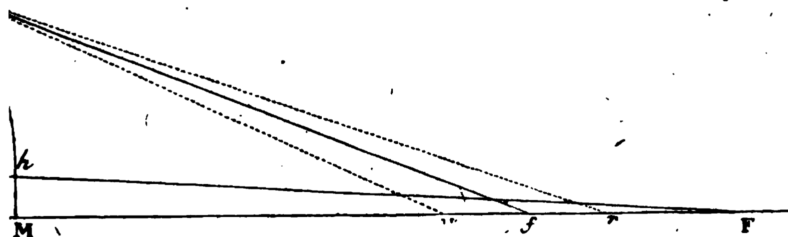
CONCLUSION.

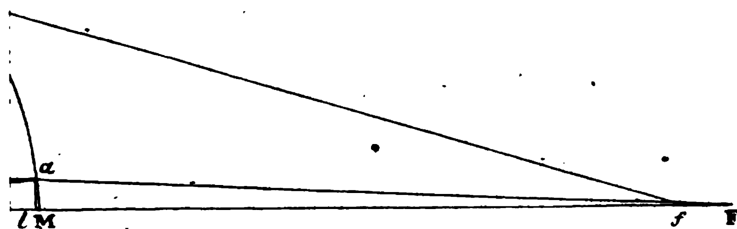
Mon deffein, en commençant ce Mémoire, étoit d'étendre ces recherches à des objectifs de plus de trois verres ; d'examiner l'effet de l'aberration des raïons partis d'un point hors de l'axe; & de

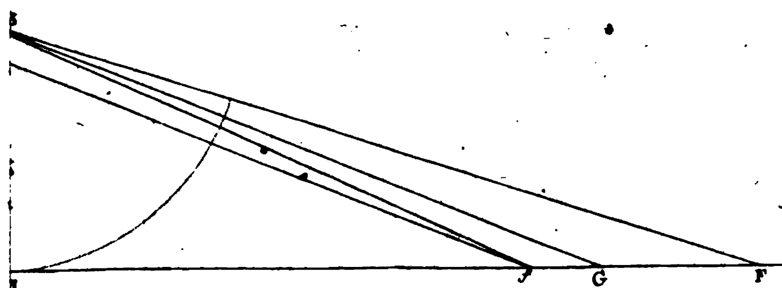
de comparer l'imperfection qui résulte dans les lunettes de la diverse réfrangibilité, avec la confusion qu'y produit l'aberration de sphéricité, le tout rélativement à la pratique seule. Mais l'étendue de ce Mémoire m'oblige de réserver ces recherches pour un autre, dans lequel, au lieu des rapports emploïés ici, pour *m*, *n* & *dn*, je me servirai de ceux que, d'après un grand nombre d'expériences, j'estime être les vrais rapports de réfraction & de dispersion du crownglass, & du cristal d'Angleterre.



Mé-


h
M
f
r
F


a
l M
f
F

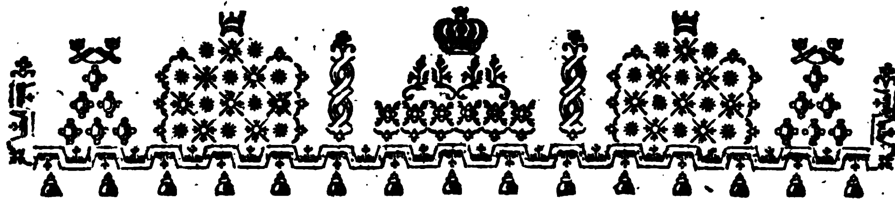

f
G
F

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.



SUR

L'ETERNITÉ DU MONDE. (*)

PAR M. BEGUELIN.

Si la Métaphysique a plus d'une fois contribué à embarasser la Théologie de questions aussi inutiles qu'épineuses: si elle a été la source de la plûpart des hérésies que le zele trop amer des uns, & la vaine subtilité des autres ont fait éclorre dans les premiers siecles du Christianisme; il faut convenir aussi que la Théologie a tenu pendant longtems la Métaphysique dans un esclavage funeste au progrès des sciences; qu'elle l'a resserrée dans un petit cercle de notions peu fécondes par elles-mêmes; & qu'elle lui a souvent prescrit des décisions arbitraires, dont il n'eût pas été permis de s'écarter impunément.

Les tems ont changé. Le siecle où nous vivons est devenu, du moins dans nos contrées, le siecle de la liberté pour les Etres pensans. Avantage inestimable, si la pente qui entraine incessamment les hommes au delà des bornes, ne fait pas succéder à cette heureuse liberté de penser, une licence effrénée, aussi nuisible au bien de la société, que l'esclavage précédent l'étoit à la culture de l'esprit!

Je ne mets point au rang des abus qu'on peut faire de cette liberté, les doutes que des Philosophes de bonne foi exposent modestement

(*) Lû à l'Académie le 13 Oct. 1768.

ment & avec candeur ſur divers dogmes de la Théologie poſitive. L'eſprit du Chriſtianiſme, & celui de la Réformation autoriſent manifeſtement cette liberté. Vouloir l'interdire, ce ſeroit ramener dans les Egliſes proteſtantes l'autorité humaine dont elles font profeſſion de ſecouer le joug. Le vrai Chriſtianiſme n'a proprement qu'un dogme, c'eſt que tout homme peut & doit, ſuivant l'étendue de ſes lumieres, puiſer dans ſa propre raiſon, & à l'aide de celle-ci, dans la révélation qu'elle lui montrera, les vérités qui intéreſſent ſon bonheur préſent & futur.

De ce ſeul dogme, qui auroit pû réunir tant de ſectes diviſées, il réſulte, par une conſéquence bien immédiate, qu'il ne ſauroit y avoir d'oppoſition entre les vérités de la Religion, & celles de la raiſon; que ce qui ſera vrai en Philoſophie le ſera encore en Théologie, & réciproquement; en un mot que la ſaine Théologie, & la bonne Métaphyſique concourent de concert à bâtir l'édifice de nos connoiſſances les plus importantes, ſans jamais ſe heurter entr'elles.

Mais, ſi des diſcuſſions dictées par l'eſprit philoſophique ne ſont jamais un abus de la liberté de penſer, quel que puiſſe être leur objet, on n'en peut pas dire autant de ces brochures multipliées à l'infini, dont les Auteurs plus déciſifs que Philoſophes penſent avoir ſappé les fondemens de la Religion, pour avoir raſſemblé diverſes objections plauſibles contre quelques dogmes reçus. On ſait que les ſyſtemes théologiques ſont l'ouvrage des hommes. Il ne ſeroit donc pas étonnant qu'il s'y fût gliſſé des dogmes erronnés; il le ſeroit bien plus, qu'il y eût une ſeule ſecte de Religion où il n'y auroit rien à rectifier. Mais la Religion elle-même ne reçoit point d'atteinte de ces coups qu'on croit lui porter. Ces dogmes attaqués avec tant d'efforts redoublés, il n'y a qu'à les abandonner tout ſimplement à la merci de ceux qui les combattent, & le prétendu triomphe s'évanouit.

On avoit beaucoup écrit pour & contre le fataliſme. Plus les Théologiens s'efforçoient d'éclaircir les matieres épineuſes de la liberté,

té & de l'imputation, plus leurs adverſaires découvroient de nouveaux côtés par où les attaquer. On s'étoit jetté de part & d'autre dans un labyrinthe, dont l'iſſue devenoit plus difficile à meſure qu'on s'enfonçoit plus avant. Ces diſputes alloient devenir le ſcandale de la Religion, & le triomphe de l'incrédulité. Un Philoſophe s'aviſe de rechercher impartialement ce qu'il réſulteroit à l'égard de la Religion, & de la Morale, du ſyſteme du fataliſme, quand on le ſuppoſeroit vrai. Il démontre évidemment que ni la Morale ni la Religion n'en recevroient la moindre atteinte. Depuis la publication de la *Lettre ſur la fatalité*, les queſtions concernant la *liberté* n'intéreſſent plus que les Philoſophes: l'Eſprit fort ne peut rien gagner, ni le Théologien rien perdre à leur déciſion.

Je me propoſe dans ce Mémoire de prouver que la queſtion ſur l'éternité du monde eſt préciſément dans le même cas. Quelques vues que l'on ait eues en l'agitant ſi ſouvent, elle n'intéreſſe ni la Religion ni ſes adverſaires. Je ne ſerai ſans doute pas le premier qui ait fait cette remarque, mais il n'eſt peut-être pas inutile de la mettre dans tout ſon jour.

Quand on demande ſi le monde exiſte de toute éternité, la queſtion peut avoir deux ſens très différens. Le premier, c'eſt de diſcuter ſi l'univers exiſte par lui-même, en vertu d'une néceſſité intrinſeque, ou s'il a un auteur. Je ne prétends point toucher ici à la queſtion priſe dans ce premier ſens. La contingence du monde, ſa dépendance d'un Etre intelligent, ſupreme auteur de tout ce qui exiſte, ſe manifeſtent ſi clairement, elles ont été démontrées avec tant d'évidence, qu'il ſeroit très ſuperflu de répéter ici ce que perſonne ne peut ignorer.

Mais, en poſant pour principe, comme tout homme qui conſulte ſa raiſon le fait, que ce monde eſt l'ouvrage d'un Etre éternel & intelligent qui exiſte par lui-même, on demande encore, & c'eſt le ſecond ſens de la queſtion, ſi Dieu a créé l'univers de toute éternité, ou

 ſi ce

si ce monde n'existe que depuis quelques milliers d'années? Le plus ancien des Ecrits qui contiennent les vérités révélées atteste positivement la nouveauté du monde: la raison abandonnée à elle seule semble décider pour l'existence éternelle. Ces deux propositions paroissent contradictoires dans les termes, mais au fond elles peuvent signifier la même chose, & n'avoir rien qui ne se concilie parfaitement.

Sans entrer dans l'examen des distinctions que les Théologiens ont imaginées sur l'ordre des decrets divins, il paroit évident qu'un Dieu immuable dans ses volontés, dont la puissance est invariablement la même, de la notion duquel tout caractere de succession est nécessairement exclu, n'a pû différer de créer l'univers, dès que l'entendement divin en a approuvé l'existence. On ne sauroit trouver ni dans cet Etre supreme, ni hors de lui, la moindre raison d'un pareil délai. Bien plus, on conçoit très distinctement qu'il n'y en pouvoit avoir aucune. L'idée du monde actuel étoit présente à l'intelligence infinie de toute éternité. Les motifs d'approbation étoient contenus dans cette idée. La toute-puissance créatrice coëxistoit avec la volonté supreme, & nul obstacle au dehors n'empêchoit son énergie. Le plûtot ou le plus tard dans l'exécution, quand il seroit concevable, ne pouvoit ni diminuer, ni accroitre la perfection de cet immense ouvrage. Le plan en étoit invariablement arrêté, & il seroit contradictoire qu'il ne l'eût pas été. Toutes ces considérations découlent si nécessairement de la notion distincte des perfections divines, qu'on ne sauroit se refuser à leur évidence. Il en faut donc conclure que le monde a réellement commencé d'exister de toute éternité.

Mais, si cette conclusion est légitime, comment pourra-t-il être vrai, que ce même monde n'existe que depuis environ six mille ans? Je ne rechercherai point si, entre ce que Moyse rapporte à l'entrée de la *Genese*, & le récit qu'il fait de la création d'*Adam*, il ne s'est pas écoulé des milliers de siecles, & si la terre n'a pas éprouvé une ou plusieurs révolutions avant de tomber dans le chaos qui précéda immédiatement la naissance de nos premiers parens. Quand on auroit re-culé

culé la création de l'univers de plusieurs milliards de siecles au delà de cette époque, on n'en seroit pas plus proche de l'éternité. Autant vaut-il pour le sujet que je traite ici s'en tenir à l'opinion commune; qu'Adam a existé à la naissance du monde; qu'il ne s'est encore écoulé depuis lors qu'environ cinquante sept siecles; & que la génération présente est tout au plus la 230eme dans l'ordre successif.

Je demande maintenant à ceux que l'idée de l'éternité du monde peut effaroucher, quelle différence ils conçoivent qu'il y auroit dans l'état actuel de l'univers, si *Adam*, au lieu d'avoir été créé *dans le tems*, comme on a coutume de s'exprimer, avoit réellement été créé de toute éternité? Pensent-ils que nous fussions plus reculés de l'instant de sa naissance, que nous ne le sommes actuellement? que le soleil auroit fait de lui à nous un plus grand nombre de révolutions annuelles? que les générations qui se sont succédées depuis les premiers hommes jusqu'à présent ne seroient pas précisément les mêmes dans les deux cas? Je les prierois d'expliquer quelle idée ils attachent à une premiere création *faite dans le tems*. Voudroit-on insinuer par cette expression que le tems existoit comme un être réel, avant qu'il y eût quelque chose de successif dont il pût être la mesure? Peut-on concevoir une succession dans l'Etre nécessaire? Et avant une premiere création, y avoit-il des êtres contingens dont les diverses modifications venant à la suite l'une de l'autre servissent à produire les notions du *tems* & de la *durée*?

Je ne vois qu'un seul sens intelligible, suivant lequel on pourroit dire que le monde a été créé *dans le tems*. C'est en concevant que l'idée du tems, renfermée dans celle d'un Univers possible, existoit par cela même dans l'entendement divin, & qu'elle y exprimoit, dès avant la création, l'ordre des changemens successifs contenus dans cet univers idéal; il faudroit concevoir ensuite que la premiere partie de cet univers-là n'aiant pas l'approbation de l'intelligence supreme, elle n'auroit voulu donner l'existence qu'à la partie suivante, en sorte que le monde actuel auroit, pour ainsi dire, un commencement tron-

qué,

qué, & ne feroit que la continuation d'un monde antérieur qu'il n'auroit pas plû à Dieu de réalifer. A' la faveur de ces fuppofitions, on pourroit dire effectivement que l'univers a non feulement été créé *dans le tems*, mais encore que la fageffe divine a choifi le tems le plus convenable pour le faire exifter, aiant pris pour cet effet l'inftant du monde idéal où la fuite renfermoit le plus de perfections, & aiant fupprimé tout ce qui devoit précéder, parce qu'il n'eût fervi qu'à rendre l'enfemble moins parfait.

Mais en accordant toutes ces fuppofitions, il eft aifé de voir que le monde n'en pourroit pas moins exifter de toute éternité. C'eft l'imperfection de notre intelligence qui nous oblige de confidérer l'une après l'autre deux chofes qui de leur nature font coëxiftentes, & que faute d'embraffer à la fois, notre foible entendement fe repréfente comme fucceffives. La notion du tems contenue dans l'idée de l'univers a fans doute toujours exifté en Dieu; mais la volonté de créer, & l'acte de la création, que nous imaginons comme poftérieurs en ordre & en tems à cette idée, n'en font féparés que par nos abftractions, & ne font qu'un tout indivifible dans l'Etre fupreme. Par les perfections & la néceffité de fa nature, il eft à la fois tout ce qu'il eft fans changement ni fucceffion quelconques. Ainfi, à fuppofer que Dieu n'eût réalifé qu'une partie du plan total de l'univers; cette partie, qui rélativement à la proportion fupprimée auroit commencé *dans le tems*, pouvoit n'en être pas moins produite de toute éternité rélativement au Créateur.

D'ailleurs la fuppofition d'un monde tronqué paroit un peu forcée. Il eft vrai que quel qu'ait été le premier état de l'univers, l'ordre & la régularité qui y regnent permettent d'imaginer des états antérieurs, d'où ce premier état auroit pû réfulter. Ainfi, par rapport aux grands corps céleftes, rien n'empêcheroit de conftruire des éphémérides, & de calculer des éclipfes pour des tems qui n'ont point exifté, & qui remonteroient beaucoup plus haut encore au delà de l'origine du genre humain, que ne fait la *période Julienne*. Mais ces globes,

bes, dont la course est si réguliere, ne sont pour ainsi dire que la charpente du monde, c'est l'édifice matériel de l'univers. Les êtres animés, destinés à l'habiter successivement, sont vraisemblablement le premier & le grand objet de la création; & bien que ceux-ci aïent aussi des modifications réglées, & des successions constantes, les individus eux-mêmes ne subsistent que d'une génération à l'autre; il faut donc nécessairement remonter dans chaque espece à une premiere génération, qui fixe l'état primitif du monde animé, dans le plan idéal aussi bien que dans le plan réalisé; celui-ci sera donc l'expression totale, & non un simple fragment de l'archétype.

Pour ne parler, par exemple, que de la petite planete que nous habitons, s'il avoit plû au Créateur de n'en réaliser que la portion contenue depuis le déluge en deçà, quoique cette époque soit la plus favorable à la supposition, il seroit cependant entré moins d'ordre, & plus d'arbitraire dans la premiere production des especes; il y auroit dans la nôtre huit individus de créés sans liaison primitive entr'eux; & de cela seul on peut aisément conclure à l'irrégularité qu'un plan tronqué entraineroit nécessairement dans le tout.

Il est difficile, je l'avoue, de se familiariser avec l'idée qu'un monde qui existe de toute éternité, subsiste à peine depuis six mille ans; cependant il n'est pas mal aisé de comprendre que cette difficulté ne provient que de la confusion de nos idées. Si l'on regardoit le monde comme un être nécessaire, indépendant, éternel, & qui existât par sa propre nature, il seroit assurément faux qu'il ne fût que depuis si peu de tems, ou plutôt, les notions de tems, d'années, de siecles, ne seroient pas plus applicables à sa maniere d'exister, qu'elles ne le sont à l'existence du Créateur. Mais, dès qu'on est obligé de reconnoitre que le monde n'a aucun des caracteres qui conviennent à l'Etre suprême, & nécessaire en soi; dès que sa contingence prouve qu'il a eû un Auteur, dire que cet Auteur du monde l'a créé de toute éternité, c'est dire exactement ce que *Moyse* a exprimé avec une justesse & une précision admirables, que Dieu le créa *au commencement*, puisqu'en effet c'est

c'eſt préciſément à la naiſſance du monde qu'a dû commencer le tems, la durée, l'eſpace, & les révolutions qui ſont le partage des êtres contingens.

Ce ſeroit donc très improprement parler, ou plutôt il ſeroit très faux de dire que le monde eſt *éternel*. Cette propoſition renfermeroit une contradiction manifeſte. Ce qui eſt contingent, variable, créé, ne ſauroit être éternel. Un attribut ſi relevé ne peut convenir qu'à Dieu ſeul; & cette éternité étant unique, hors du cours de la nature, incommenſurable avec toutes les idées que nous pouvons acquérir par nos ſens, doit naturellement reſter inconcevable pour des intelligences bornées. Qu'il nous ſuffiſe qu'avec nos foibles lumieres nous puiſſions appercevoir diſtinctement la raiſon de cette éternité en Dieu, ſans prétendre nous former une notion exacte d'une maniere d'être qui n'a rien de commun avec nos conceptions. L'idée d'un être éternel eſt inévitable, quelque ſyſteme qu'on veuille ſe forger. Si on la refuſe à l'Intelligence ſupreme, il faudra l'accorder à la matiere la plus brute; & ceux qui ne voudront pas admettre cette exiſtence éternelle dans le ſeul Etre dont les perfections l'exigent, ſeront contraints de la ſuppoſer dans des millions de corpuſcules qui, ſans avoir un ſeul des caracteres convenables à l'Etre éternel, ont tous ceux qui repugnent le plus indubitablement à la nature d'un tel être.

Le penchant que nous contractons dès l'enfance à nous faire des images ſenſibles des choſes que nous tâchons de concevoir, a donné lieu aux emblemes par leſquels on exprime la notion de l'éternité. C'eſt ou une ligne courbe rentrante en elle-même, & formant un cercle parfait, ou une ligne droite dont chaque extrémité va ſe perdre dans l'infini. On ſent aſſez que ni l'une ni l'autre de ces images ne ſauroit exprimer la maniere d'exiſter de l'Etre éternel. Elles repréſentent une durée ſans borne, mais c'eſt une durée ſucceſſive, telle qu'on peut la concevoir dans des êtres contingens qui ne ſont pas à la fois tout ce qu'ils ſeront. Auſſi ces emblemes qui donneroient une idée bien fauſſe de l'Eternité de Dieu, peuvent très bien aider à faire con-

cevoir

cevoir l'éternité du monde. Repréſentons-nous la chaine des générations depuis le premier homme, les premiers animaux, les premieres plantes créées, jusqu'aux hommes, aux brutes, aux plantes qui couvrent aujourd'hui la ſurface de la terre. Cette chaine, dont chaque génération forme un chainon, eſt une durée déterminée; c'eſt une ligne dont la longueur finie eſt la ſomme des petits eſpaces qu'on voudra aſſigner à chaque génération. Mais le nombre de ces générations actuellement éteintes eſt fixe & invariable; ainſi l'intervalle entre les deux extrémités de la chaine l'eſt auſſi. En quelque point donc du grand cercle, ou de la ligne infinie, qu'on place la création du monde, ou le prèmier chainon des générations ſucceſſives, nous nous retrouverons toujours à la même diſtance de l'origine du monde. Il n'y aura jamais que le même intervalle du premier homme à nous.

Qu'un arbre déraciné par l'impétuoſité des vents ſoit entrainé dans le vaſte océan qui entoure notre globe, ſous quelque méridien, dans quelque degré de latitude qu'on imagine cet arbre flottant, la diſtance de ſa racine à ſa trentieme branche ſera invariablement la même; ou pour donner une comparaiſon encore plus préciſe, qu'un ſablier ait commencé à s'écouler de toute éternité, ou qu'il ne marche que d'aujourd'hui, le cent-millieme grain écoulé aura ſuccédé au premier au bout d'un même intervalle de tems.

Mais, ſi la nouveauté du monde n'eſt pas incompatible avec ſa création de toute éternité, il ſemble qu'on en pourroit inférer, ou que le premier homme a dû coëxiſter avec Dieu; ou que Dieu lui-même n'exiſte que depuis la création; deux propoſitions qui ſeroient également révoltantes, & abſurdes. A' cela je n'ai qu'un mot à répondre. Tant qu'on ſe livrera à l'imagination ſeule, j'avoue qu'on ne ſauroit s'empêcher de joindre au moins implicitement la notion du tems à celle de l'exiſtence de Dieu; & cette illuſion doit ſans doute conduire, quelque ſentiment que l'on adopte, à des conſéquences qui choquent la raiſon. Mais, dès qu'on voudra conſulter celle-ci, elle nous

montrera évidemment que la source de cette illusion vient de ce que toutes les existences dont nous avons reçu l'idée par nos sens, renferment la notion du tems, & de la durée. Elle nous fera sentir avec la même clarté, que l'existence de Dieu est d'une nature aussi différente de la nôtre, que son essence differe de celle des choses créées; que l'idée du tems y est aussi peu applicable que celles de succession, de modification, de variabilité, de commencement, ou de fin. Si l'on convient de cette vérité, toutes les objections tombent; si l'on n'en convient pas, il seroit aussi inutile d'en disputer davantage, après que la chose a été si souvent discutée, qu'il le seroit d'opposer l'incommensurabilité à celui qui soutiendroit qu'un son peut être jaune. Les premieres notions doivent être senties, & ne se prouvent point.



RE-

RÉFLEXIONS PHILOSOPHIQUES SUR LES SONGES.

PAR M. DE BEAUSOBRE.

PREMIER MÉMOIRE.

La constitution du corps humain est telle que sa conservation demande qu'il s'y fasse alternativement une dépense & une réparation de forces: sa foiblesse a exigé que le repos succédât à l'action, & il a fallu que près d'un tiers de la vie se passât dans l'inaction, afin que les deux autres pûssent être emploiés. Heureux encore les hommes qui jouissent de ces deux tiers de réveil, & dont la vie n'est pas un sommeil perpétuel!

Le corps fatigué pendant le jour a une tendance naturelle vers le repos ou l'inaction: les mouvemens vitaux se rallentissent insensiblement; les mouvemens volontaires, après être devenus moins fréquens, cessent tout à fait; il faut se faire violence pour résister à l'assoupissement, & ce combat dure quelquefois aussi longtems que notre ame se représente clairement quelques objets ou quelques idées: quand une fois les idées obscures ont pris la place des idées claires, le sommeil est complet. C'est ainsi que l'homme qui s'endort tous les jours a tous les jours sous ses yeux une vive image de la mort.

Pendant tout le tems que dure le sommeil, l'ame paroit ne point avoir de sensations; elle en a cependant, mais de très foibles; ainsi qu'il nous arrive dans la veille d'avoir des momens où nous croions que nous n'avons pensé à rien, quoique nous aïons eu réellement des re-

préſentations qui ont fixé notre attention plus ou moins, de même il nous arrive auſſi de n'avoir ſouvent pendant le ſommeil que des repréſentations obſcures, dont l'ame ne s'apperçoit que foiblement, & que par conſéquent elle ne ſe rappelle pas au réveil. Quand on reflêchit ſur ſoi-même, on ſe perſuade aiſément qu'il y a dans notre ame une infinité de repréſentations qui y ſont, ſi j'oſe ainſi parler, à notre inſçu.

L'ame étant une force repréſentative de l'univers rélativement à la ſphere des ſenſations, elle ſe répréſente pendant le ſommeil comme pendant le réveil ſon état actuel; pendant le ſommeil elle ſe le repréſente obſcurément. Ce qu'il y a alors de clair dans les repréſentations de l'ame, c'eſt ce que lui ſuggere l'imagination, qui reproduit différentes repréſentations: l'enſemble de ces repréſentations clairement apperçues eſt ce qu'on appelle Songe, dès qu'on peut ſe les rappeller au réveil.

Ce n'eſt que par le degré de clarté des repréſentations de notre ame, que nous jugeons que les objets repréſentés ſont préſents, & que nous les diſtinguons de ceux qui n'étant pas préſents nous ſont repréſentés par l'imagination. Ce degré de clarté eſt donc rélatif, nous apprenons à en juger par l'expérience; il eſt donc tout naturel que ce qui nous eſt repréſenté clairement dans le ſommeil, nous y ſoit repréſenté comme préſent. Ici l'on trouvera un rapport ſenſible entre un homme qui rêve & un fou; celui-ci confond les ſenſations avec les fantômes de l'imagination, & ne diſtingue plus par conſéquent le préſent de ce qui ne l'eſt pas; dans le ſommeil les ſenſations n'étant que très foibles, (car on ne peut appeller autrement les repréſentations obſcures de l'action des objets extérieurs,) tout ce que l'imagination repréſente paroît d'autant plus clair qu'aucune autre clarté ne lui eſt comparée; en faut-il d'avantage pour que ces productions de l'imagination ſoient priſes pour autant d'objets actuels & exiſtants? il ne reſte à l'ame aucun moien pour ſe détromper, elle eſt la dupe de ce degré de clarté que l'imagination donne à ſes fantômes. C'eſt ſurtout lorſque le ſommeil n'eſt pas bien profond que l'ame s'arrête aux objets que lui préſente l'imagination, parce qu'alors

lors la disposition du corps facilite le travail de l'imagination, & que l'impression plus sensible des objets extérieurs la rend plus active.

L'ame d'un homme qui s'assoupit & s'endort, conserve surement une suite de représentations quelconques, mais il ne se les rappelle pas toujours au réveil: l'action d'un objet extérieur, ou un changement quelconque dans le corps, peut faire naitre pendant le sommeil une représentation moins obscure que les autres, & celle-ci amene d'autres représentations à la faveur de l'association des idées; il ne s'agit plus d'autre chose, si ce n'est que l'ame se rappelle ces représentations au réveil. Si le rapport qui se trouve entre les représentations produites par la loi de l'imagination n'a rien d'essentiel, le songe sera un amas confus où il n'y aura en apparence ni ordre ni liaison; si au contraire ce rapport renferme des choses essentielles, qui sont prises dans la nature même des objets représentés, le songe sera une suite d'événemens naturels.

Que nous aïons au reste des sensations pendant le sommeil, c'est ce qu'on ne sauroit nier: c'est à la faveur des sensations devenues plus fortes que le sommeil s'interrompt, & qu'on s'éveille. Aussi a-t-on remarqué que les songes sont plus fréquens & plus clairs vers le matin; c'est ce qui a fait croire que ce qu'on rêvoit dans ce tems-là annonçoit l'avenir. HORACE (*) a dit

Vetuit me tali voce Quirinus
Post mediam noctem visus, cum somnia vera.

On a cru que l'estomac étant déchargé de ce qui s'y trouvoit, l'ame étoit plus libre, & par conséquent plus en état d'entrevoir l'avenir & de se représenter le présent: ce qu'il y a de vrai, c'est que les sensations étant plus vives lorsque les nerfs sont plus tendus, & les mouvemens vitaux plus forts, il est naturel que les sensations soient plus vives vers le matin qu'immédiatement après l'assoupissement, & que les songes ame-

(*) L. I. Sat. 10.

amenés par de semblables sensations soient plus clairs, que ceux qui arrivent dans des circonstances opposées.

Si l'on dit qu'on rêve ordinairement de ce dont on a beaucoup parlé la veille, que les songes sont plus fréquens dans le tems des évenemens extraordinaires, & lorsque l'ame est fort occupée, soit de sujets qui lui inspirent beaucoup de joie ou de tristesse, soit de sujets qui l'affectent autrement, je ne vois là rien qui ne s'accorde avec ce que je viens de dire. En effet, les objets qui occupent l'ame ou longtems ou fortement, se trouvant liés à une infinité de choses, l'ame ne peut se représenter quoi que ce soit qui n'ait avec eux quelque rapport, & ce rapport, quelque étranger qu'il leur soit, suffit pour que l'imagination les ramene dans le sommeil comme dans la veille.

Les malades & les personnes d'une constitution foible rêvent plus souvent que les gens qui se portent bien & qui sont robustes: cela arrive parce que les premiers ont un sommeil plus léger, & que les objets extérieurs qui agissent sur eux trouvent un corps plus sensible: les sensations sont par conséquent plus fortes, & plus vivement apperçues.

Si donc les maladies, les indigestions, les échauffemens produits par le vin, les grands chagrins, les grands sujets de joie sont accompagnés d'un état où l'on rêve plus fréquemment, ce ne sont pas à proprement parler ces dispositions du corps ou de l'ame qui font rêver, mais c'est que le sommeil est alors inquiet & foible; c'est un état presque mitoïen entre la veille & le sommeil, où il est naturel que les objets extérieurs agissent sur le corps avec plus d'effet. Un état irrégulier ou extraordinaire dérange le sommeil, une partie de cet état est représentée obscurément à l'ame, l'imagination devient active, & elle le devient d'autant plus aisément que cet état extraordinaire l'a beaucoup exercée pendant la veille.

Aussi y a-t-il lieu de croire que les hommes qui ont le plus d'imagination, qui l'exercent le plus, rêvent aussi le plus souvent. Ces hom-

hommes accoutumés à considérer dans les objets & dans les évenemens tout ce qui n'y est pas essentiel, mais qui est susceptible d'être représenté sous des images sensibles, comme le lieu, la maniere d'être, &c. ces hommes, dis-je, ont une facilité étonnante de trouver des rapports fort peu réels; leurs songes doivent être aussi variés que fréquens. Supposés deux hommes qui quittent un cercle de femmes; que l'un ait pris garde aux habits, à la parure, à la figure, aux *pompons*, à tous les propos, à tout ce qui se trouvoit dans la chambre; tandis que l'autre n'a fait qu'une légere attention à tous ces objets, & s'est contenté de suivre tranquillement une conversation honnête & qui n'avoit rien d'extraordinaire; n'arrivera-t-il pas naturellement à ces deux hommes, que l'un rêvera, tandis que l'autre aura peut-être le sommeil le plus profond? Il ne faut au premier qu'une étincelle pour donner à son imagination une activité étonnante: le magazin des fantômes est rempli, il ne faut qu'un rien pour les faire paroitre.

Je conclus de là que, s'il étoit vrai qu'il pût y avoir des gens doués du talent de se procurer des songes amusans & agréables (*), ce ne pourroit être qu'à la faveur de la malheureuse habitude qu'auroient contracté ces personnes, d'occuper beaucoup leur imagination, & de la tourner continuellement vers certaines images. C'est encore ce qui explique les rêves des animaux: un levrier aboie en dormant: Lucrece a dit des chevaux

Quippe videbis equos fortes, cum membra jacebunt,
In somnis sudare tamen, spirareque sæpe —

Il est tout naturel que les animaux, n'aiant qu'un très-petit nombre de représentations, en aient de bien vives qui reviennent fré-

(*) On a cru qu'il y avoit des moiens propres à faire rêver: telle devoit être la vertu de la Corne d'Ammon. Pline parle, au livre XXXVII. chap. 12. de son *Hist. Natur.* d'une pierre, appellée *Eumetris*, qui étant mise sous le chevet avoit la vertu de procurer des songes qui dévoiloient l'avenir.

fréquemment, & ſe retrouvent pendant le ſommeil. Mais ſi les animaux ont des rêves, ils n'ont pas des ſonges: ils ne ſont pas en état de diſtinguer les repréſentations de leur ame pendant le ſommeil de celles qui s'y trouvent pendant la veille. Les hommes eux-mêmes ont ſouvent des ſonges ſi clairs & ſi ſuivis qu'il leur eſt bien difficile de les diſtinguer de la réalité: combien de fois n'arrive-t-il pas que la clarté des repréſentations eſt ſi grande qu'elle nous éveille: quelquefois il arrive qu'on eſt la dupe de cette clarté, on croit avoir éprouvé ce qu'on n'a fait que rêver. Auſſi Deſcartes déſeſpéroit-il de trouver une marque caractériſtique qui ſervît à diſtinguer les ſonges de la réalité: „*Quæ dum cogito*, dit-il dans ſes Méditations P. I. p. 6, *attentius, tum plane video, nunquam certis indiciis vigiliam a ſomno poſſe diſtingui.*

Mais, pour en revenir au pouvoir que les hommes peuvent avoir ſur leurs ſonges, c. à d. ſur leur imagination dans le tems du ſommeil, il eſt bien clair que ce pouvoir n'eſt qu'indirect: ce n'eſt qu'après l'avoir bridée pendant la veille, & s'être fait une heureuſe habitude de la contenir dans de juſtes bornes, qu'on peut eſpérer que pendant le ſommeil elle n'extravaguera pas ſi aiſément. Tous les hommes ne trouvent pas à cet égard les mêmes facilités; la nature de leur tempérament, les circonſtances où ils vivent, la ſanté, l'éducation, la ſociété, tout cela influe ſur l'imagination & ſur l'empire auquel on voudroit la ſoumettre. De là il s'enſuit qu'on peut juger avec quelque probabilité du caractere & des mœurs d'un homme, en examinant la nature de ſes ſonges: non qu'on puiſſe dire ſans reſtriction, comme Pythagore & Zénon, que les ſonges dévoilent les vices & les vertus des hommes; car, ſi une ſuite de ſonges peut ſervir à en découvrir quelque choſe, ce n'eſt pas avec une certitude complette. Combien de tempéramens ardens, qui ont bien de la peine à ſe vaincre! Combien de gens vertueux, qui ne peuvent combattre les mouvemens de la nature ſans ſalir leur imagination! Combien de perſonnes, qui vivant dans le monde ſont obligées de voir ce qui remue les paſſions, d'écouter ce qui donne à l'imagination plus d'empire qu'on ne voudroit lui en laiſſer!

Des-

Descartes a cru qu'il y avoit entre les représentations de l'ame dans le tems du sommeil, & celles que nous avons pendant la veille, cette différence remarquable, que les songes comme isolés & sans liaison se rappellent difficilement à notre mémoire. Mais Descartes convenant qu'il y a des songes si frappans, & dont le souvenir nous reste si longtems, qu'il y en a de si vivement représentés, qu'il arrive à ceux qui en ont de semblables, non seulement de se les rappeller jusqu'à la fin de leur vie, mais encore de les confondre avec ce qui peut leur être arrivé pendant la veille; Descartes, dis-je, convenant de ce fait, convenoit par là même, que les songes appartiennent à la chaine des représentations de notre ame; comment pourroit on sans cela se les rappeller au réveil? Il y a plus: on conclut mal en supposant que la difficulté de se rappeller un rêve est une preuve de ce manque de liaison: ne nous arrive-t-il pas pendant la veille, qu'il se présente à notre esprit des idées, dont nous ne nous souvenons plus un instant après, & qui étoient cependant liées aux représentations que notre ame avoit alors? Si l'on dit que, même pendant la veille nous avons des représentations qui semblent n'avoir aucune liaison avec l'état actuel de notre ame, je réponds que cela paroit ainsi parce que dans la chaine des représentations il y en a d'obscures & de claires. Une idée obscure devient claire; le passage de l'obscurité à la clarté nous paroit brusque, parce que nous ne voïons pas parfaitement par quelle association d'idées, en partie claires en partie obscures, cette nouvelle idée a été reproduite. Tout est lié dans la nature, mais tout ne l'est pas de façon que la liaison ne nous échappe jamais. Comme il n'y a rien sans raison suffisante, quelqu'étranges que nous paroissent certains évenemens, ils sont tout aussi naturels que ceux qui nous paroissent les plus conformes aux loix ordinaires: ils ne different de ces derniers que par notre maniere de voir: les raisons qui expliquent ce qu'ils sont & comment ils le sont, ne nous sont pas aussi connues que celles qui expliquent ces évenemens qui n'ont rien de frappant pour nous: ici nous sommes plus éclairés, là plus ignorans; voilà la différence. Quand on ne peut regarder les objets que d'un point de vue, il doit nécessaire-

 ment

ment y avoir des choſes moins bien vues que d'autres. Tout ce que l'ame ſe repréſente pendant le ſommeil eſt une ſuite de l'état où elle ſe trouve : quelque profond que ſoit le ſommeil, on ne ſauroit en exclure une action quelconque des objets extérieurs, une activité quelconque de l'ame, & cela ſuffit pour prouver cette liaiſon que Deſcartes vouloit nier.

Comme toutes les repréſentations de l'ame ſont liées les unes aux autres ſuivant un certain ordre, il ſeroit poſſible de ſçavoir d'avance le ſonge qu'un tel homme aura, ſi l'on pouvoit connoitre toutes les repréſentations qu'a eu ſon ame, toutes celles qu'elle a au moment où le ſommeil commence, & toutes les ſenſations qui auront lieu pendant ce tems-là. Ce probleme ſeroit ainſi énoncé : toutes les repréſentations paſſées, & toutes les repréſentations actuelles d'une ame, dans le moment où commence le ſommeil, étant données, les objets extérieurs & leur action étant connus, l'état du corps étant déterminé, découvrir quel ſera le rêve de cet homme-là.

On dira ſans doute qu'en ſuppoſant poſſible la ſolution de ce probleme, il ſemble qu'on enviſage l'ame comme une machine, qui ne s'écarte jamais de la route que ſes reſſorts lui font tenir. Mais, ſans entrer dans la queſtion épineuſe de la liberté, je me contenterai de remarquer, qu'il s'agit ici ſeulement des idées obſcures qui deviennent claires à la faveur des ſenſations, dont l'ame ne ſauroit être maître. D'ailleurs, quand l'ame ſeroit un eſclave pendant que le corps repoſe, elle pourroit toujours être libre pendant le tems de la veille : & c'eſt tout ce qu'il faut.

On a voulu diſtinguer les ſonges en naturels, en extraordinaires, & en ſurnaturels ; & on a entendu par extraordinaires, ceux à la production deſquels concourt une cauſe finie & étrangere ; & par ſurnaturels, ceux où intervient l'action de l'Etre infini. Mais, ſi un ſonge eſt extraordinaire dès que l'on peut ſuppoſer le concours d'une cauſe étrangere & finie, tous les ſonges le ſont, ou l'on ne ſçait ce que l'on dit : tous les ſonges ; comme toutes les repréſentations de l'ame, doivent

vent leur origine aux ſenſations, l'imagination fait le reſte. Si au contraire on ſoutenoit que quelqu'autre cauſe étrangere & finie, qui ne ſeroit point une ſenſation, pût agir ſur l'ame de celui qui rêve, on avanceroit une abſurdité qui ne mérite aucune réfutation. Quand il ſe trouveroit dans les ſonges des repréſentations qui ſembleroient ne pouvoir être ni la ſuite d'une ſenſation, ni le réſultat d'autres repréſentations, ce ſeroit notre maniere de voir qu'il faudroit accuſer de cette erreur. Dès qu'on ne regarde pas l'ame pendant le ſommeil comme un être inactif, dès qu'on ſe repréſente l'ame avec une foule d'idées plus ou moins obſcures, on ne ſe fait point des ſonges des idées auſſi fauſſes. Quant aux ſonges miraculeux ou ſurnaturels, ce n'eſt pas ici le lieu d'examiner comment un Etre infini peut donner à l'ame pendant le ſommeil une ſuite de repréſentations claires: les conjectures de la Philoſophie ceſſent là où l'on commence à ſuppoſer l'action d'une puiſſance infinie.

Il nous arrive pendant la veille quelque choſe de bien ſemblable aux ſonges, & qui mérite qu'on y faſſe attention. On voit des hommes, qui tout à coup rentrant en eux-mêmes n'éprouvent plus aucune ſenſation: les repréſentations de leur ame les occupent à un point que leur état reſſemble en quelque façon à celui du ſommeil. Deux eſpeces d'états très différens ſe rangent ſous la même claſſe: un Mathématicien, comme un autre Archimede, abſorbé dans ſes calculs, n'a que des repréſentations diſtinctes, avec une foule de repréſentations obſcures qu'il n'apperçoit pas: un homme, livré à ſes paſſions & s'en occupant ſans ceſſe, ſe tranſporte dans un palais enchanté, & n'a que des repréſentations claires avec une foule de repréſentations obſcures qu'il n'apperçoit pas plus que le premier. Pendant le ſommeil, celui qui rêve a quelques repréſentations claires: il reſſemble aux deux autres en ce que les ſenſations ſont réputées nulles, & avec le dernier il a de plus la conformité de croire préſent ce qui n'eſt que dans ſon imagination. Mais ce qui reſſemble encore plus aux ſonges ce ſont les viſions, ou les repréſentations vives & claires de quelque choſe qui n'exiſte que dans l'imagination. Malheur à ceux qui pourroient en avoir facilement: la folie n'eſt que le triſte ta-

lent de donner aux fantômes de l'imagination les apparences de la réalité.

J'ai dit que, si l'on ne se rappelloit pas toujours au réveil les représentations qu'on a eues, pendant le sommeil, ce n'étoit pas une preuve qu'on n'en ait pas eu. Comme il nous arrive d'oublier souvent ce qui nous a été clairement représenté pendant la veille, la même chose ne nous arriveroit-elle pas pour les représentations qui ont été claires pendant le sommeil? Mais, sans entrer ici dans des discussions subtiles, je ne veux pour preuve de la vérité de ce que j'avance, que ce qui arrive aux Noctambules. Nous savons qu'il y a des gens capables pendant le sommeil d'une adresse bien supérieure à celle qu'ils peuvent avoir pendant la veille. Une suite d'actions visiblement conséquentes & rélatives à un but; des actions qui reviennent à point nommé; une ignorance totale de ce qu'on a fait, voilà ce qu'on voit dans les Noctambules. Irons-nous avec quelques Philosophes chercher dans la Lune la raison de ces phénomenes, & croirons-nous que les phases de cet astre influent sur le corps humain au point de donner à un homme, plongé dans le sommeil, une adresse qu'il n'a point lorsqu'il veille? On a appellé à cause de cela les Noctambules des lunatiques; je ne sçai pas trop pourquoi ce nom leur est resté depuis qu'on a laissé aux jardiniers & aux charlatans, gens toujours portés à en appeller à l'expérience & à en abuser, ces préjugés qu'aucune ombre de raison ne peut colorer. Si la Lune pouvoit produire de pareils effets, elle en produiroit plus souvent, & n'agiroit certainement pas par prédilection sur quelques individus.

Croira-t-on qu'un mouvement irrégulier du sang, que des humeurs, des obstructions, en un mot un état extraordinaire du corps soient cause de ces effets singuliers? que des vapeurs, semblables à celles qui étourdissent les gens ivres, & leur font entreprendre des choses très périlleuses, montent au cerveau des Noctambules, & les guident? Renvoierons-nous ces Noctambules aux incurables, puisque la Médecine n'a pas encore trouvé de remede bien sûr pour les rétablir?

blir? Non, nous ferons mieux d'envisager ce qui se passe en eux comme l'ouvrage de l'imagination, qui peignant avec beaucoup de vivacité & de clarté ce qu'il faut faire pour exécuter ces actions difficiles, entraine ces malheureux à les entreprendre. Il est assez naturel de croire, que ces gens aiant considéré pendant le jour des chemins difficiles à pratiquer, se les représentant pendant le sommeil, les entreprennent, & évitent des dangers qu'ils ne voient & ne se représentent pas: il suffit sans doute qu'ils se représentent vivement les actions qu'il faut faire, pour que le corps fasse les mouvemens analogues à ces représentations. Cela paroitra d'autant plus vrai, qu'on a guéri plusieurs personnes attaquées de ce mal, en les fouettant au retour de leurs courses.

Je conclus de tout ce que je viens de dire, qu'on ne peut pas juger de ce qui a été dans l'ame par le souvenir qui nous en reste: on ne juge pas même de ce qui s'y trouve par les représentations actuelles. Les idées obscures sont dans l'ame, quoiqu'elles ne soient point apperçues. Cela nous servira à répondre à ceux qui pourroient demander pourquoi il y a des gens qui ne rêvent jamais, & d'autres qui ne rêvent que rarement; nous leur ferons remarquer dabord qu'il ne peut s'agir ici que des songes, ou des représentations que l'ame se rappelle au réveil: nous dirons en second lieu, que si effectivement il y a des hommes qui n'ont jamais eu à leur réveil aucun souvenir de ce qu'ils ont rêvé, on ne peut en chercher la raison que dans le double avantage dont ces hommes ont toujours joui, d'avoir un sommeil bien profond, & de n'avoir pas l'imagination assez active pour qu'elle soit réveillée aux plus foibles sensations.

Quelques uns ont cru, que comme dans le sommeil le corps regagnoit les forces perdues pendant le jour, l'ame de même inactive pendant le sommeil réparoit ses pertes. De là ils se sont imaginés, que les songes étoient quelque chose qui sortoit de la regle, & qui étoit due à des causes particulieres. Infatués des augures & des présages, ils ont religieusement écouté ces interprêtes des songes, qui comme autant d'oracles, n'ont trouvé que trop de dupes. D'autres ont cru que les sens étant assoupis, l'esprit étoit plus dégagé de la matiere, plus pro-

pre

pre à pénétrer l'avenir & à démêler la vérité, que l'ame s'exaltoit & lisoit dans l'avenir.

Philon prétendoit que Dieu inspiroit les songes, & Tertullien en accusoit les Démons. On a attribué au Prophete Daniel un ouvrage sur l'interprétation des songes; & il y a bien apparence que les hommes ajouteront toujours foi aux regles de cet art futile, qu'on a appellé *Onirologie*. Les exemples que l'on tire de l'Ecriture sainte ne prouvent pas que cet art soit possible; il n'y a point d'analogie entre le miraculeux & le naturel.

L'interprétation des songes est ordinairement fondée sur deux principes, l'un que l'on peut appeller *induction*, & par lequel on juge que ce qui a suivi plusieurs fois un même songe, doit en être la suite constante: l'autre qu'on peut appeller *analogie*, & par lequel on juge que ce qui ressemble au songe, ou ce qui lui est directement opposé, est précisément ce qu'il annonce. De très habiles gens ont donné à cet égard dans de grands travers: Hippocrate & Galien ont hazardé les plus frivoles conjectures; parmi cette foule d'erreurs on a été jusqu'à croire, comme Cardan, que les songes qui précedent le lever du soleil se rapportent au passé, que ceux qui viennent avec le lever du soleil se rapportent au présent, & enfin que ceux qui viennent après ce tems regardent l'avenir: on a cru même que les songes sont des signes plus certains l'été que l'hyver, le printems que l'automne; que dans le tems des fêtes mobiles les songes ne méritent que peu d'attention, mais qu'ils en méritent beaucoup dans le tems des fêtes fixes. Socrate paroit avoir cru à l'interprétation des songes: on sait qu'aïant entendu en songe un vers d'Homere, qui signifie (*), *dans trois jours vous arriverez dans la fertile Phthie*, il se crut assuré de mourir dans trois jours. Aristote crut sagement devoir rester en suspens, & méprisa les préjugés populaires; il ne crut pas avoir assez de preuves solides pour en rejetter jusqu'au moindre fondement. C'est à la Philosophie moderne qu'on doit sur toutes ces matieres le jour qui y est répandu.

(*) Ἤματί κεν τριτάτῳ Φθίην ἐρίβωλον ἱκοίμην. Iliad. I. 363.

SUR

SUR LA MÉTHODE
DU
CALCUL INTÉGRAL.
PAR M. LAMBERT. (*)

1.

Le Calcul intégral considéré dans toute son étendue est de la Classe des Questions inverses. Les Mathématiques nous en offrent plusieurs especes. Elles different de celles que l'on considere comme directes, en ce que la marche qu'il faut prendre dans leur solution est en quelque façon rétrograde, & que pour rétrograder il n'y a souvent d'autres chemins, que ceux qui sont en même tems directs. C'est ainsi p. ex. que de chaque nombre on peut trouver son quarré, son cube &c. & que de ces dignités on peut revenir au nombre qui les a produites. Mais, comme outre les nombres qui sont des quarrés, ou des cubes, il y en a une infinité d'autres qui n'en sont pas, il est clair qu'il n'y a point de chemin droit qui y conduise, & que celui qu'on veut faire est pour ainsi dire raboteux & sans fin. Il en est de même du Calcul intégral. Toute quantité peut être différentiée. Mais, outre les différentielles qui en naissent, il y en a une infinité d'autres qui ne communiquent point avec leurs intégrales par quelque chemin droit & battu. Cependant, à cet égard, nous restons encore bien plus en arriere qu'à l'égard des puissances des nombres & de leurs racines. Et comme, suivant toute apparence, c'est par le défaut de méthode, il convient de nous y arrêter un moment.

§. 2.

(*) Lu le 15 de Décembre 1768.

§. 2. Il me paroit que, dans la plûpart des découvertes qu'on a faites dans le Calcul intégral, il y avoit un peu de précipitation. Et en effet, il semble qu'il n'y ait pas autrement moyen de parvenir à l'infini, qu'en s'y précipitant. C'est toujours une espece d'abime pour l'esprit humain. Mais ce n'est pas de cette précipitation que je veux parler. Je prends le terme un peu moins au pied de la lettre, parce qu'on se précipite aussi quand on se hâte trop. Or, quoique ce ne soit pas là la coutume des Géometres, dont tous les pas sont prémédités & mesurés, il semble néanmoins qu'ils ayent oublié d'en agir de même, lorsqu'il s'est agi de l'infini. De là vient que les expressions ont été plus ou moins inadéquates & choquantes. De là vient aussi qu'ils n'ont trouvé certaines restrictions qu'après coup. Car en effet, ce ne fut qu'après coup qu'on s'avisa d'ajouter les constantes aux intégrales qu'on avoit trouvées. Ce ne fut qu'après coup qu'on chercha la méthode d'en revenir aux différentielles lorsque l'intégrale ne donnoit point de valeur. Enfin, ce ne fut qu'après coup qu'on reprit les secondes, troisiemes &c. différentielles, lorsque les premieres, secondes &c. disparurent du calcul. Tout cela veut dire, qu'on ne savoit pas bien ce qu'on avoit trouvé, lorsqu'on trouva le Calcul intégral. Car c'étoient là des méprises & des précipitations, qui ne devoient point avoir lieu. On voit aisément qu'il y eût fallu & plus de méthode & plus de patience. Avec tout cela, on est toujours redevable aux grands génies, d'avoir fait les premiers pas. Car, tout précipités qu'ils peuvent avoir été, on les excusera en ce que la conquête de l'infini ne paroit pouvoir se faire que par assaut.

§. 3. Les questions inverses ont des méthodes qui leur sont communes, & qui ensuite se déterminent d'avantage, lorsqu'elles s'appliquent à quelque question plus particuliere. Ces méthodes veulent qu'on se familiarise avant toute chose avec la question directe, qui est toujours plus facile. Or les questions directes, considérées rélativement aux inverses, ne fournissent à celles-ci que des hypotheses. Mais il convient de classifier ces hypotheses, d'en déduire des symptômes & de

de pourſuivre les conſéquences juſqu'à ce qu'on en trouve qui puiſſent être univerſellement converties. Car ce n'eſt qu'alors qu'on trouve le moyen de rétrograder. C'eſt ainſi qu'à l'égard des racines quarrées, on commença à élever un binome à la ſeconde dignité, & par là on vit comment un nombre doit être compoſé pour être nombre quarré, & comment il faut le décompoſer pour en trouver la racine. C'eſt ainſi que, dans la Mécanique, on examina différentes hypotheſes du mouvement accéléré, des forces centrales &c., & les propoſitions convertibles qu'on en déduiſit, comparées aux phénomenes de la Nature, firent trouver les loix de la peſanteur & celles des mouvemens céleſtes.

§. 4. Mais procéda-t-on de la même maniere à l'égard du Calcul intégral? Je dirai que non. On étoit trop impatient de trouver des intégrales; afin d'y parvenir on tâtonna pour trouver des routines, & on ſe précipita quelquefois pour généraliſer des méthodes particulieres, dont on entrevoyoit à peine la poſſibilité. Ce n'eſt qu'un demi-ſiecle après la premiere idée de ce calcul, qu'on trouva incidemment les véritables marques de la ſéparabilité des variables. Mais la façon dont on la découvrit, étoit ſi conforme à la méthode que je viens d'indiquer, qu'on eût pu y parvenir depuis longtems. Car, en différentiant dans l'équation

$$P\,dx = Q\,dy$$

la fonction P ſuivant y, & la fonction Q ſuivant x, de ſorte qu'il ſoit

$$\frac{dP}{dy} = p.$$

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

c'étoit un ſymptôme qu'on trouva, lorſqu'il apparut qu'il étoit généralement

$$p = q,$$

toutes les fois que dans l'équation

$$P\,dx = Q\,dy$$

 les

les variables peuvent être ſéparées. Il eût fallu dès le commencement rechercher ces ſortes de ſymptômes. Mais, au lieu de commencer par bien connoitre les différentielles, on ſe hâta de chercher les intégrales d'une façon quelconque.

§. 5. C'eſt par le défaut de cette méthode qu'on ſe trouve encore preſque tout à fait hors d'état de décider, ſi une différentielle, dont on ne peut pas encore parvenir à trouver l'intégrale, eſt intégrable ou non. De là vient auſſi, que ce n'eſt que peu à peu qu'on s'accoûtuma à regarder une formule comme ſuffiſamment intégrée, lorſqu'on l'avoit réduite à des quantités circulaires ou logarithmiques, ou à des arcs elliptiques; & on s'y accoûtuma, plutôt parce qu'on perdoit toute eſpérance d'aller plus loin, que parce qu'on étoit convaincu par une démonſtration rigide, qu'il falloit en reſter là. Mais n'étoit-ce pas à peu près comme ſi, après avoir trouvé que 4 & 9 ſont les quarrés de 2 & de 3, on reſtoit en doute, ſi les nombres intermédiaires 5, 6, 7, 8 ne pourroient peut-être pas avoir pour racine quelque nombre entier, qui ne fût point encore connu?

§. 6. En conſéquence de la méthode que j'ai rapportée, il eût fallu commencer par claſſifier, non les différentielles, comme on l'a fait, mais les intégrales. Il eût fallu en déduire des ſymptômes; & ce n'eſt que d'après ces ſymptômes, que les différentielles auroient dû être claſſifiées, puiſque c'eſt par là qu'elles euſſent été reconnoiſſables. Enſuite la même méthode veut, qu'en claſſifiant les intégrales, on eſſaye du moins de commencer par les claſſes les plus générales. C'eſt d'abord pour avoir moins de claſſes; & enſuite, ſi on peut réuſſir à en trouver des ſymptômes tels qu'il les faut, leur uſage eſt d'autant plus étendu. Or les claſſes les plus générales qu'on puiſſe faire, c'eſt de diviſer les intégrales en algébriques & en tranſcendantes. Les tranſcendantes pourront enſuite être ſubdiviſées en circulaires, logarithmiques, arcs elliptiques &c. & il en reſtera toujours de plus compliquées.

§. 7. Conſidérons d'abord les intégrales algébriques. Le théoreme de la ſéparation des variables, que je viens de citer, fait que nous

nous pourrons nous borner à une seule variable, de sorte qu'il suffit de considérer une fonction algébrique quelconque de x. Et d'abord, il est clair que sa différentielle, quelle qu'elle soit, est nécessairement intégrable, & qu'il n'y a que ces sortes de différentielles qui le soient. Mais pourra-t-on toujours les reconnoitre? Il est clair qu'il faut d'abord commencer à en chercher les symptômes. Et si elles peuvent se reconnoitre, peut-on trouver la méthode pour les intégrer? C'est ce que ces mêmes symptômes doivent faire voir.

§. 8. Classifions pour cet effet les fonctions algébriques d'une quantité variable. Elles seront

1°. ou *simplement rationelles*, & alors leur différentielle l'est aussi.

2°. ou une *fraction rationelle*, & alors leur différentielle le sera aussi. Son diviseur sera le *quarré* du diviseur de l'intégrale, à moins que par la réduction il n'en ait disparu quelque partie.

3°. ou une *quantité radicale*, & alors leur différentielle sera affectée de la même quantité radicale, multipliée ou divisée par quelque facteur rationel. Car il est en général

$$d\,(x^{m:n}) = \frac{m}{n}\,x^{m:n}\,x^{-1}\,dx.$$

4°. ou plusieurs quantités radicales, additionées ou soustraites, & alors il y aura autant de différentielles séparables, de la même forme.

5°. ou des quantités radicales qui se multiplient ou se divisent, & alors il y aura autant de différentielles séparées qu'il y a de facteurs, & chaque différentielle sera affectée de toutes ces quantités radicales & de facteurs rationels. Car il est

$$d\,(x^{m:n}.X^{\mu:\nu}) = \frac{\mu}{\nu}\,x^{m:n}\,X^{\mu:\nu}.X^{-1}\,dX$$

$$+\frac{m}{n}.X^{\mu:\nu}.x^{m:n}.x^{-1}\,dx.$$

Du reste j'entens que les facteurs soient des facteurs différens.

6°. ou des sommes de ces sortes de quantités, & alors il y aura autant de différentielles séparables, comme N°. 4.

7°. ou une quantité radicale, multipliée par une quantité rationelle, & encore en ce cas la différentielle toute entiere sera affectée de la quantité radicale. Car il est

$$d(P.Q^{m:n}) = Q^{m:n}(dP + \frac{m}{n} P.Q^{-1}dQ).$$

8°. ou des sommes de ces sortes de quantités, comme aussi des précédentes, & encore alors il y aura des différentielles séparables.

9°. ou des fractions de ces sortes de sommes, & encore alors le diviseur de la différentielle sera le quarré de celui de la fraction intégrale &c.

§. 9. Voilà donc l'énumération des différentes fonctions algébriques, avec quelques symptômes de leurs différentielles. Ces symptômes suffisent déjà pour exclure un grand nombre de différentielles, dont les intégrales ne sont point algébriques. Mais, comme je n'ai indiqué ces symptômes que fort briévement, il convient d'éclaircir ce que j'en ai dit, par l'usage qu'on peut en faire. Je rapporterai donc d'abord un théoreme très connu, qui est, *qu'une différentielle, dont l'intégrale est algébrique, étant donnée, on peut y ajoûter ou en soustraire autant d'autres différentielles intégrables que l'on voudra, & la somme ou le résidu sera encore algébriquement intégrable;* & réciproquement, *cette somme ou ce résidu ne le sera pas, dès que la différentielle proposée ne l'est point;* & enfin, *cette différentielle ne le sera point, dès que la somme ou le résidu ne le sera pas.* Ces théoremes sont connus. Il y a longtems qu'on en a fait usage, soit pour simplifier les formules, soit pour les réduire à d'autres, dont la forme étoit ou connue ou plus traitable.

§. 10.

§. 10. Je ne m'arrêterai pas non plus aux fonctions qui sont simplement rationelles, ni à celles où il n'y a que des dignités simples, ou binomiales, ou enfin polynomiales de x, & où tous les termes sont rationels. Mais il convient d'éclaircir ce qui regarde les fractions rationelles. Car ici j'entens qu'elles ne soient pas simplement quelque dignité d'un polynome rationel, puisqu'alors il est très possible que le diviseur de la différentielle ne soit point quarré. Du reste, outre que ces sortes de différentielles sont très connoissables, il est facile de faire en sorte que le diviseur devienne un quarré, puisqu'encore qu'on ne pût pas le résoudre en ses facteurs, pour voir lesquels ne sont point des quarrés, il n'y auroit qu'à multiplier par le dénominateur aussi bien le numérateur que le dénominateur de la fraction différentielle proposée. Voici maintenant le procédé pour trouver l'intégrale toutes les fois qu'elle est algébrique.

§. 11. D'abord, on démontre aisément, que s'il y en a une, elle doit être une fraction rationelle. Car supposons qu'il y entre quelque quantité radicale ou irrationelle, il suit de N°. 3. §. 8. que cette quantité entre aussi dans la différentielle; ce qui seroit contre l'hypothese, puisque nous la supposons rationelle. Donc &c.

§. 12. Soit donc une fraction rationelle

$$dy = \frac{P}{QQ} \cdot dx,$$

où je mets QQ pour le dénominateur, parce qu'il doit être un quarré rationel (§. 10.). Que l'on fasse

$$y = \frac{z}{Q} + \text{const.}$$

on aura

$$dy = \frac{Qdz - zdQ}{QQ},$$

donc il sera

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

équa-

équation, qui doit être rationelle, toutes les fois que la fraction proposée est algébriquement intégrable. Car Pdx, Q & dQ sont rationelles, parce qu'elles sont supposées telles. Si donc il entroit dans la valeur de z quelque quantité radicale, elle entreroit aussi dans dz (§. 8.). Donc il y auroit une fonction de x affectée de quantités radicales, égale à une fonction de x rationelle. Ce qui étant absurde, il s'ensuit &c. On n'aura donc, dans chaque cas particulier, qu'à prendre de la série

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

autant de termes qu'il faut pour ramener l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

aux mêmes exposans, & en faisant $= 0$ les coëfficiens de tous les termes, on définira les coëfficiens A, B, C &c. Observons qu'il y aura toujours plus de termes à faire $= 0$, qu'il n'y a de coëfficiens A, B, C &c. à déterminer. Mais néanmoins ces coëfficiens doivent satisfaire à toutes les conditions, sans quoi la différentielle n'auroit point d'intégrale algébrique. Ensuite, il se peut que quelque coëfficient obtienne une valeur arbitraire, mais qui donnera toujours la constante, qu'il faut ensuite ajoûter, comme il faut l'ajoûter quand même tous les coëfficiens sont déterminés. Ce dernier énoncé est clair de soi-même. Quant au premier, on voit bien qu'il faut dans l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

multiplier une série finie

$$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots \mu x^m,$$

par une série finie

$$dz = + (B + 2Cx + \cdots nNx^{n-1})dx,$$

& encore

$$dQ = \beta x + 2\gamma x + \cdots \mu m x^{m-1})dx,$$

par

$$z = A + Bx + Cx^2 + \&c. \cdots + Nx^n,$$

&

& qu'il n'y a que les coëfficiens A, B, C &c. qui soient à déterminer. Il y en a donc toujours moins, qu'il n'y a de termes à faire $= 0$. Donnons, pour mieux éclaircir cela, quelques exemples.

I. Exemple.

§. 13. Soit proposée la fraction rationelle

$$dy = \frac{4 + 16x + 3xx}{(4 + 3xx)^2} \cdot dx;$$

il s'agit de voir si son intégrale est algébrique, & en ce cas, quelle elle est? Comme ici le diviseur est déjà un quarré, on le posera $= QQ$, ce qui donne

$$Q = 4 + 3xx:$$

on fera donc

$$y = \frac{z}{4 + 3xx} + \text{Const.}$$

ce qui donne

$$dy = \frac{(4 + 3xx)dz - 6zxdx}{(4 + 3xx)^2}.$$

On n'aura donc qu'à comparer les numérateurs, pour avoir l'équation

$$(4 + 16x - 3xx)\, dx = (4 + 3xx)\, dz - 6zxdx,$$

qui doit être rationelle. Or on voit que, pour ramener le second membre de cette équation à la plus grande dimension de x dans le premier membre, il suffira de faire

$$z = A + Bx,$$

ce qui donne

$$dz = Bdx.$$

Ces valeurs étant substituées, & en arrangeant tout suivant les dimensions de x, on obtient, en divisant par dx,

$$\begin{aligned} 0 = &- 4 - 16x + 3xx \\ &+ 4B - 6Ax - 3Bxx. \end{aligned}$$

Or

Or, posant $=$ o chaque terme de cette équation, on voit que le second donne

$$A = -\tfrac{8}{3},$$

le premier

$$B = 1.$$

Et comme cette valeur satisfait encore au troisieme terme, il s'ensuit que la différentielle proposée est algébriquement intégrable, & qu'il est

$$z = -\tfrac{8}{3} + x,$$

& partant

$$y = (x - \tfrac{8}{3}) : (4 + 3xx) + \text{Const.}$$

II. Exemple.

§. 14. Soit proposée la fraction rationelle

$$dy = \frac{15 - 3x^2 - 2x^4}{(5 + 2xx)^3} \cdot dx;$$

il faut voir si elle a une intégrale algébrique, & en ce cas quelle elle est? Comme ici le diviseur est un cube, on pourroit en faire un biquarré. Mais on peut s'en passer, parce que la théorie de la différentiation des puissances nous indique qu'il suffit de faire

$$y = \frac{z}{(5 + 2xx)^2},$$

afin d'avoir

$$dy = \frac{(5 + 2xx)\,dz - 8zx\,dx}{(5 + 2xx)^3}.$$

Et de là, en comparant les numérateurs, on a

$$15 + 9x^2 + 2x^4 = (5 + 2xx)\,dz - 8zx\,dx.$$

Or, pour ramener le second membre de cette équation à la plus haute puissance de z dans le premier membre, on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx.$$

Ces

§. 17. Mais, si on vouloit traiter sur le même pied l'exemple premier, on trouveroit

$$B = 1,$$
$$C = 2 + \tfrac{3}{4}A,$$
$$D = E = F \text{ \&c.} = 0,$$

& partant $y = \frac{1}{4}A + \frac{x + 2xx}{4 + 3xx} + \text{const.}$

Formule finie, & qui revient à celle que nous avons trouvée.

§. 18. Ces exemples suffisent pour faire voir, que les différentielles, dont l'intégrale est une fraction rationelle, n'ont aucune difficulté. On peut toujours & les reconnoitre & les trouver. J'ajoute que, lorsque de semblables différentielles ont des coëfficiens indéterminés, cette même méthode indiquera les conditions de leur intégrabilité. Mais passons aux différentielles qui sont affectées de quantités radicales. Je me bornerai d'abord à considérer celles de la troisieme classe du §. 8, c'est à dire, celles où il n'entre qu'une seule quantité radicale, mais affectée de quantités rationelles d'une façon quelconque, puisque sans cela elle pourroit être traitée comme on traite généralement les puissances.

§. 19. Or j'ai déjà observé, qu'une semblable quantité radicale affecte encore l'intégrale, quoiqu'elle y ait un autre facteur rationel. Soit en général

$$y = P \,.\, Q^{m:n},$$

où P, Q sont des fonctions rationelles de x, & nommément Q une fonction telle, qu'on n'en puisse point extraire la racine n moyennant une formule finie. Nous aurons donc

$$dy = Q^{m:n} \,.\, dP + \frac{m}{n} P \,.\, Q^{m:n} \,.\, Q^{-1} dQ$$
$$= Q^{m:n} \left(\frac{QdP + \frac{m}{n} PdQ}{Q} \right).$$

Posant donc $\quad dy = Q^{m:n-1} \,.\, dp,$

on voit, que la quantité radicale peut être levée quand on augmente l'exposant d'une unité & qu'on fait

$$y = Q^m z.$$

Et comme ensuite il ne reste plus que des quantités rationelles, on procédera de la même façon que j'ai fait voir par rapport aux fractions rationelles. Voici quelques exemples, pour éclaircir cette méthode.

IV. Exemple.

§. 20. Soit proposée la différentielle

$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}};$$

il s'agit de voir si son intégrale est algébrique, & en ce cas quelle elle est? Pour cet effet on voit que l'exposant de la quantité radicale étant $-3:2$, il devient $-1:2$ lorsqu'on l'augmente d'une unité, comme il faut le faire (§. 19.). Posant donc

$$y = \frac{z}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

on aura $\quad dy = \dfrac{dz\,(1 + xx) - zx\,dx}{(1 + xx)^{3:2}}.$

Donc, en comparant les numérateurs, il est

$$dx = (1 + xx)\,dz - zx\,dx;$$

ce qui fait voir qu'il suffit de poser

$$z = A + Bx$$
$$dz = B\,dx,$$

afin d'avoir

$$\begin{array}{rlll} o = & -1 & * & \\ & +B & * & +Bxx \\ & & -Ax & -Bxx, \end{array}$$

ou

ou bien $o = - 1 - Ax$
$+ B,$

ce qui donne $A = o$
$B = 1,$

& partant $z = x,$

$$y = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}} + \text{Conſt.}$$

§. 21. Si dans cet exemple on poſe pour z la ſuite

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

on trouve en procédant de la même maniere

$$z = A + x + \tfrac{1}{2}Ax^2 - \tfrac{1}{8}Ax^4 + \tfrac{1}{16}Ax^6 - \tfrac{5}{128}Ax^8 + \&c.$$

c'eſt à dire $z = x + A\sqrt{(1 + xx)},$

& partant $y = \dfrac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + A = \dfrac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$

V. Exemple.

§. 22. Soit propoſée la différentielle

$$dy = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4 + 2x(1 + xx)^{3:2}}{(1 + xx)^{3:2}} \,.\, dx.$$

Ici on voit d'abord qu'en diviſant, cette formule ſe change en

$$dy = dx \,.\, \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1 + xx)^{3:2}} + 2x\,dx.$$

Or, la ſeconde partie étant intégrable par elle-même, on n'a qu'à examiner ſimplement la premiere (§. 9.). Faiſant donc

$$d\eta = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1 + xx)^{3:2}} \,.\, dx,$$

on

on posera (§. 19.) $$\eta = \frac{z}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

ce qui donne $$d\eta = \frac{(1 + xx)\,dz - zx\,dx}{(1 + xx)^{3:2}}.$$

Et en égalant les numérateurs, on aura

$$(1 - x + 3x^2 + 2x^4)\,dx = (1 + xx)\,dz - zx\,dx,$$

d'où on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx,$$

ce qui donne

$$\begin{array}{rrrrrr} 0 = -1 & + x & - 3x^2 & + * & - 2x^4 \\ & & + Bx^2 & + 2Cx^3 & + 3Dx^4 \\ + B & + 2Cx & + 3Dx^2 & & \\ & - Ax & - Bx^2 & - Cx^3 & - Dx^4, \end{array}$$

& en posant chaque terme $= 0$,

le premier donne $B = 1$
le dernier $D = 1$.

Et ces valeurs conviennent aussi au troisieme terme. Le quatrieme donne $C = 0$,

ce qui dans le second donne $A = 1$,

& partant $z = 1 + x + x^3$

$$\eta = \frac{1 + x + x^3}{\sqrt{(1 + xx)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x\sqrt{(1+xx)},$$

& enfin

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x^2 + x\sqrt{(1 + xx)} + \text{Const.}$$

VI.

VI. Exemple.

§. 23. Soit proposé

$$dy = (3ax^3 + 4x^4) \sqrt{(ax + xx)} \cdot dx.$$

Ici on voit aisément que cette formule revient à

$$dy = (3ax^2 + 4x^3) dx \sqrt{(ax^3 + x^4)},$$

ce qui veut dire à

$$dy = \tfrac{2}{3} d(ax^3 + x^4)^{3:2}$$

$$y = \tfrac{2}{3} (ax + x^4)^{3:2} + \text{Conſt.}$$

Mais retenons-la telle que je l'ai propoſée

$$dy = (3ax^3 + x^4) dx \sqrt{(ax + xx)};$$

& comme l'expoſant du radical, qui eſt $= \frac{1}{2}$, devient $= + \frac{3}{2}$ lorſqu'on l'augmente d'une unité (§. 19.), on fera

$$y = z(ax + xx)^{3:2},$$

ce qui donne

$$dy = dz(ax + xx)^{3:2} + \tfrac{3}{2} z(a + 2x)\sqrt{(ax + xx)}\, dx,$$

ou bien

$$dy = \sqrt{(ax + xx)} \cdot [dz(ax + xx) + \tfrac{3}{2}(a + 2x) z dx].$$

Comme donc l'une & l'autre valeur de dy peut être diviſée par la quantité radicale, on voit qu'il ſera

$$(3ax^3 + x^4) dx = (ax + xx) dz + \tfrac{3}{2}(a + 2x) z dx,$$

& qu'en poſant $z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2) dx,$$

il ſera, en ſubſtituant ces valeurs,

$$\begin{array}{rccccc}
0 = & * & * & * & -3ax^3 & -4x^4 \\
 & + aBx & + 2aCx^2 & + 3aDx^3 & & \\
 & & + Bx^2 & + 2Cx^3 & + 3Dx^4 & \\
+ \tfrac{3}{2}Aa & + \tfrac{3}{2}Bax & + \tfrac{3}{2}Cax^2 & + \tfrac{3}{2}Dax^3 & & \\
 & + 3Ax & + 3Bx^2 & + 3Cx^3 & + 3Dx^4. &
\end{array}$$

 Ega-

Egalant donc chaque terme à zéro, on obtient des trois premiers termes

$$A = B = C = 0,$$

du dernier

$$D = \tfrac{2}{3}.$$

Et comme ces valeurs ſatisfont encore au quatrieme terme, la formule ſe trouve être intégrable, & il eſt

$$z = \tfrac{2}{3}x^3$$

$$y = \tfrac{2}{3}x^3\,(ax + xx)^{3:2} + \text{Conſt.}$$

VII. Exemple.

§. 24. Soit propoſé

$$dy = \frac{a^2 + b^2 + 2x^2}{\surd(a^2 + x)^2 \,.\, \surd(b^2 + x^2)}\,x\,dx.$$

Quoique dans cette formule il y ait deux quantités radicales, il eſt clair néanmoins qu'elles peuvent être conſidérées comme une ſeule; car pour cet effet il n'y auroit qu'à multiplier l'une par l'autre. On voit auſſi que la formule auroit pu être propoſée de la façon ſuivante:

$$dy = \frac{\surd(a^2 + x^2)}{\surd(b^2 + x^2)}\,.\,x\,dx + \frac{\surd(b^2 + x^2)}{\surd(a^2 + x^2)}\,.\,x\,dx;$$

car celle-ci ſe réduit à la précédente, dès qu'on la réduit à un même dénominateur. Or ici les expoſans des radicaux ſont $= -\tfrac{1}{2}$, & en les augmentant d'une unité (§. 19.) ils ſe changent en $+\tfrac{1}{2}$, de ſorte qu'en faiſant

$$y = z\,.\,\surd(a^2 + x^2)\,.\,\surd(b^2 + y^2),$$

& en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$z = 1$$

$$y = \surd(a^2 + x^2)\,.\,\surd(b^2 + x^2).$$

VIII. Exemple.

§. 25. Il en ſera de même de la formule

dy

$$dy = \frac{(a^2 + b^2 + 2x^2)\, x\, dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \cdot (b^2 + x^2)^{3:2}};$$

car encore ici les radicaux se multiplient, & le reste est rationel, de sorte qu'en faisant (§. 19.)

$$y = \frac{z\sqrt{(a^2 + x^2)}}{\sqrt{(b^2 + x^2)}},$$

on trouve $z = 1$.

IX. Exemple.

§. 26. Soit proposé

$$dy = 2acx\,dx + \frac{ae^2 + 2ax^2}{\sqrt{(e^2 + x^2)}} \cdot dx + \frac{cb^2 + 2cx^2}{\sqrt{(b^2 + x^2)}}\, dx$$

$$+ \frac{e^2 + b^2 + 2x^2}{\sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot (b^2 + x^2)} \cdot x\,dx.$$

Ici on voit d'abord que le premier terme est intégrable de soi-même; ainsi on pourra en faire abstraction (§. 9.). Dans le quatrieme terme il y a deux radicaux avec l'exposant $-\frac{1}{2}$, qui se multiplient; il faut donc qu'ils se multiplient encore dans l'intégrale, mais avec l'exposant $+\frac{1}{2}$ (§. 19.). Mais comme une semblable intégrale, telle que seroit

$$\eta = z \cdot \sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)},$$

donne la différentielle

$$d\eta = \frac{(e^2b^2 + e^2x^2 + b^2x^2 + x^4)\, dz + z\,(e^2 + b^2 + 2x^2)\, x\, dx}{\sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)}},$$

on voit qu'elle ne peut être comparée qu'au quatrieme terme. Car encore qu'on voulût réduire le second & le troisieme terme au même dénominateur, ce qui dans cet exemple seroit faisable, le numérateur seroit

$$(ae^2 + 2ax^2)\sqrt{(b^2 + x^2)} + (cb^2 + 2cx^2)\sqrt{(e^2 + x^2)},$$

affecté d'une double irrationalité, & par conséquent incommensurable avec la différentielle $d\eta$. J'en conclus que, si la formule proposée est

 algé-

algébrique, chaque terme doit être séparément intégrable. Aussi, en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$y = acx^2 + ax\sqrt{(e^2 + x^2)} + cx\sqrt{(b^2 + x^2)} + \sqrt{(e^2 + x^2)} \cdot \sqrt{(b^2 + x^2)} + \text{Const.}$$

ou bien

$$y = (ax + \sqrt{(b^2 + x^2)}) \cdot (cx + \sqrt{(e^2 + x^2)}) + \text{Const.}$$

X. Exemple.

§. 27. Soit proposé

$$dy = \frac{(3a + 5xx) \cdot dx}{(a + xx)^{2:3}}.$$

Comme ici l'exposant de la quantité radicale est $- \frac{2}{3}$, en l'augmentant d'une unité il se change en $+ \frac{1}{3}$. Faisant donc

$$y = z\,(a + xx)^{1:3}$$

$$dy = \frac{dz \cdot (a + xx) + \frac{2}{3} zx\,dx}{(a + xx)^{2:3}},$$

on aura, en comparant les numérateurs,

$$(3a + 5xx)\,dx = (a + xx)\,dz + \tfrac{2}{3} zx\,dx,$$

& en faisant

$$z = A + Bx$$

$$dz = B\,dx,$$

on obtiendra

$$\begin{aligned} o = &- 3a \quad \bullet \quad - 5xx \\ &+ Ba \quad \bullet \quad + Bxx \\ &\qquad + \tfrac{2}{3}Ax + \tfrac{2}{3}Bxx. \end{aligned}$$

Faisant donc chaque terme $= o$, il sera

$$A = o.$$

Et le premier terme donne $B = 3$, valeur qui satisfait encore au troisieme. Il sera donc

$$z = 3x$$

$$y = 3x\,(a + xx)^{1:3}$$

§. 28.

§. 28. Ces exemples peuvent suffire pour faire voir, comment il faudra s'y prendre dans une infinité d'autres cas. On voit que cette méthode sert tout à la fois, & à examiner si une différentielle est algébriquement intégrable, & à en trouver l'intégrale. On voit aussi que cette méthode s'étend indifféremment à tous les cas où la différentielle est une ou plusieurs fractions rationelles, & qu'elle y est applicable sans qu'on ait besoin de décomposer les numérateurs en leurs facteurs simples, comme on est plus ou moins obligé de le faire, lorsque l'intégrale n'est point algébrique. Mais, quant aux cas où une différentielle proposée est affectée de quantités irrationelles, on conçoit aisément que ces sortes de quantités peuvent être extrèmement compliquées & prolixes, quoique sans contredit l'intégrale doive pouvoir être trouvée toutes les fois qu'elle est algébrique. Et la différentielle dans tous ces cas sera toujours composée d'une façon qui ne convient qu'aux différentielles algébriquement intégrables. Ajoutons encore qu'il y a fort souvent moyen d'affranchir ces sortes de formules de l'irrationalité des quantités radicales, ou du moins de les rendre beaucoup moins compliquées. Comme c'est à l'Algebre à trouver ces sortes de moyens, on peut les présupposer dans le calcul intégral. Je me bornerai donc ici à quelque exemple.

XI. Exemple.

§. 29. Soit proposé

$$dy = \frac{a\,dx\,\sqrt{(c^2 + x^2)} + bx\,dx}{\sqrt{[(c^2 + x^2)\,(ax + b\sqrt{(c^2 + x^2)})]}}.$$

Comme ici la quantité radicale $\sqrt{(c^2 + x^2)}$ entre dans le radical qui constitue le dénominateur, on pourra commencer à la faire disparoitre, ce qui arrivera en posant

$$x = \frac{v^4 - c^2}{2vv}$$

$$dx = \frac{v^4 + c^2}{v^3}\,.\,dv$$

$$\sqrt{(c^2 + x^2)} = \frac{v^4 + c^2}{2vv}.$$

$$x\,dx = \frac{v^8 - c^4}{2v^5}.\,dx.$$

Ces valeurs étant substituées, & toute réduction faite, on aura

$$dy = \frac{a(v^4 + c^2) + b(v^4 - c^2)}{\sqrt{\left[v^8.\frac{a+b}{2} + c^2v^4.\frac{a-b}{2}\right]}}.\,dv.$$

Voilà donc la formule simplifiée au point, qu'il n'y a plus qu'une seule quantité radicale. Posons donc (§. 19.)

$$y = z\sqrt{\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}.c^2v^4\right]},$$

& il sera

$$dy = \frac{dz.\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}.v^4c^2\right] + 2z(a+b)v^7dv - (a-b)c^2v^3dv.z}{\sqrt{\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}.v^4c^2\right]}}.$$

Donc, en comparant les numérateurs,

$$v^4(a+b)dv + c^2(a-b)dv = dz\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}.v^4c^2\right]$$
$$+ 2z(a+b)v^7dv - z(a-b)c^2v^3dv.$$

Or on voit qu'ici il faut rabaisser les exposans du second membre de cette équation, pour les ramener aux mêmes dimensions que ceux du premier membre, ce qui se fera en posant

$$z = \frac{m}{x^3}$$

$$dz = \frac{-3m\,dx}{x^4}.$$

Car

Car ce seul terme suffit, puisqu'il n'y aura que deux comparaisons à faire. Substituant donc ces valeurs, on aura l'équation

$$0 = - c^2 (a - b) - (a + b) v^4$$
$$+ 3mc^2 \frac{(a - b)}{2} - 3m \frac{(a + b)}{2} v^4$$
$$- mc^2 (a - b) + 2m (a + b) v^4.$$

Or, en faisant chaque terme $= 0$, le premier donne

$$m = 2.$$

Et cette valeur satisfait encore au second terme, & partant l'intégrale est algébrique. Nous aurons donc

$$z = \frac{2}{v^3}$$

$$y = \frac{2}{v^3} \sqrt{\left[\frac{a + b}{2} v^8 - \frac{a - b}{2} v^4 c^2\right]} + \text{Conft.}$$

ou bien

$$y = 2\sqrt{\left[a . \frac{v^4 - c^2}{2vv} + b . \frac{v^4 + c^2}{2vv}\right]} + \text{Conft.}$$

ce qui, en substituant les valeurs répondantes, donne

$$y = 2\sqrt{[ax + b\sqrt{(c^2 + x^2)}]} + \text{Conft.}$$

§. 30. Quant aux différentielles, dont l'intégrale n'est point algébrique, il est clair qu'elles ne se trouvent pas par la simple différentiation. Et à cet égard on ne sauroit en trouver des symptômes, qui non seulement les rendent connoissables, mais qui en indiquent les intégrales. C'est surtout de ce dernier point dont il s'agit ici. Car on vient de voir qu'en les traitant suivant la méthode que je viens de proposer, on reconnoîtra toujours qu'elles sont transcendantes, puisqu'en ce cas les coëfficiens A, B, C &c. de la suite

$$z = A + Bx + Cx^2 + \&c.$$

ne

ne ſatisfont point à toutes les conditions. Or, comme ces ſortes de différentielles peuvent toujours être rapportées à la quadrature ou à la rectification de quelque ligne courbe, c'eſt auſſi de là qu'elles tirent leur origine. Du reſte, on peut en trouver ſans penſer à quelque ligne courbe, ſoit qu'on en compoſe à ſa fantaiſie, ſoit qu'elles ſe préſentent dans quelque recherche analytique ou phyſique. La procédure qu'on a tenue à cet égard, me paroit telle qu'elle doit être. Entre ces différentielles on en a choiſi ſurtout deux eſpeces, qui ſont des plus ſimples, & pour leſquelles on a des tables calculées. On comprend que je parle des fonctions circulaires & logarithmiques. C'eſt à ces deux eſpeces qu'on tâche de réduire toutes celles qui en dépendent. Mais, comme il y en a bien d'autres, il faudroit avoir plus de tables. Or ces ſortes de tables ne ſont pas fort commodes, quand elles doivent être faites à double entrée, comme le feroient p. ex. celles qu'on pourroit en tout cas conſtruire pour les arcs elliptiques, auxquels une infinité de formules différentielles peuvent être réduites. Les tables à ſimple entrée ſuppoſent des formules, qui ne varient que d'une façon proportionelle, lorſqu'on varie les coëfficiens, comme p. ex. la formule

$$a\,dy = dx : \sqrt{(b^4 + x^4)},$$

qui ſe réduit à $c\,dy = dx : \sqrt{(1 + x^4)}$.

Mais ces ſortes de formules ne ſont pas d'un uſage fréquent, puiſque la plus grande partie des quantités radicales dérive de l'uſage du théoreme de Pythagore, & les formules les plus ſimples qui en dérivent, ſont déjà redigées en tables. Celles qui les ſuivent ſont de la forme

$$dy \sqrt{\left(\frac{y^2 + a^2}{y^2 + b^2}\right)},$$

qui, eu égard au changement des ſignes, comprend 16 eſpeces, dont il y en a 7 d'une forme imaginaire, & 4 qui reviennent immédiatement à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole. Et comme on peut regarder y comme une fonction quelconque d'une autre variable, il eſt clair qu'il y a une infinité d'autres formules différentielles qui en dépendent.

§. 31.

§. 31. Comme donc, à l'égard de ces formules, tout ce qu'on peut d'abord faire revient à réduire celles qui sont plus compliquées à celles qui le sont le moins qu'il est possible, il est clair qu'il faudroit avoir une espece de liste de celles qui sont les plus simples, & qui ne dépendent pas les unes des autres. Ensuite, en en dérivant d'autres plus compliquées, il faudroit avoir égard aux symptômes qui s'y présentent, & qui rendent connoissables & la réductibilité & la méthode pour la réduction. Mais, comme c'est là un travail infini, on voit bien qu'on peut se borner du moins à ces formules qui sont d'un usage plus fréquent. Et c'est aussi ce qu'on a fait, du moins en partie, à l'égard des fonctions circulaires, logarithmiques & elliptiques, quoique la façon de procéder n'ait pas toujours été fort méthodique. Dans des cas particuliers, on s'est mis aussi à examiner des intégrales qui promettoient des différentielles, sinon identiques, du moins analogues à celles dont on vouloit avoir l'intégrale.

§. 32. Les différentielles dont les intégrales sont transcendantes, c'est à dire, non algébriques, peuvent être distribuées en quelques classes générales.

1°. Il y en a où la variable elle-même est transcendante, mais qui du reste sont algébriquement intégrables. Telle est p. ex. la formule

$$dy = 2 \log x . d(\log x),$$

dont l'intégrale est

$$y = (\log x)^2 + \text{Const.}$$

Il est clair que ces sortes de différentielles se traitent comme celles qui sont algébriques.

2°. Il y en a qui ne renferment que la quantité transcendante, avec sa différentielle exprimée par la variable à l'egard de laquelle la quantité est transcendante. Car il est clair que ce qu'on nomme transcendant, ne l'est que rélativement à une autre quantité qu'on a en vue dans le calcul qu'on fait. Telles sont p. ex. les différentielles

$$dy = 2 \cdot \log x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dy = \frac{dz\, V(1 + zz)}{a + \int dz\, V(1 + zz)}.$$

Encore ces formules peuvent être traitées comme celles qui sont algébriques. Mais, dans celles de la premiere espèce, on suppose qu'on sache que $dx : x$ est la différentielle de log x, ou qu'on puisse faire log $x = \int dx : x$. On voit qu'il en est de même à l'égard de tous les cas ou la quantité transcendante a un nom particulier.

3°. Il y en a où la différentielle de la quantité transcendante est affectée d'une fonction qu'on considere comme non transcendante; & dans ces cas il arrive souvent que l'intégrale n'est pas non plus transcendante. Telle est p. ex. la formule

$$\text{cos}\,\omega \cdot d\omega,$$

où le cos ω est regardé comme non transcendant. Or on sait que l'intégrale en est

$$\int \text{cos}\,\omega \cdot d\omega = \text{sin}\,\omega + \text{const},$$

& que par conséquent elle n'est pas transcendante.

4°. Il y en a où la quantité transcendante n'entre point elle-même; et ce sont précisément les formules qui, du premier abord, paroissent être algébriques. C'est ainsi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}}$$

est algébrique, tandis que la différentielle

$$dz = \frac{dx}{V(1 + xx)},$$

quoique plus simple, ne l'est pas. Ces sortes de différentielles veu-

veulent être ſubdiviſées. Car il y en a dont l'intégrale eſt une quantité tranſcendante ſimplement telle, comme p. ex.

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{1 + tt}$$

eſt ſimplement un arc de cercle.

5°. Il y en a d'autres où l'intégrale eſt pareillement une quantité tranſcendante mais affectée de quantités non tranſcendantes. Telle eſt p. ex. la formule

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$z = \text{Arc. sin}\, x - \sqrt{(1 - xx)} + \text{conſt.}$$

Obſervons que c'eſt par l'addition ou la ſouſtraction que ces ſortes de quantités doivent ſe trouver dans l'intégrale. Car, ſi elles s'y trouvoient par la multiplication ou la diviſion, la quantité tranſcendante entreroit elle-même dans la différentielle.

6°. Enfin il y en a d'autres dont l'intégrale eſt affectée de quantités tranſcendantes. C'eſt ainſi p. ex. qu'il eſt

$$\int \frac{4\,\mathrm{d}y}{1 - y^4} = \log \frac{1 + y}{1 - y} + 2\,\text{Arc. tang}\, y + \text{conſt.}$$

7°. Outre ces eſpeces, il y a encore une qui peut avoir des cas extrèmement compliqués. C'eſt celle où une ou pluſieurs eſpeces de quantités tranſcendantes, avec leurs différentielles affectées de quantités algébriques, ou exprimées & mêlées de ces ſortes de quantités, compoſent la différentielle. Telle eſt p. ex. la formule

$$\mathrm{d}y = \frac{z\,\mathrm{d}z}{a + \int \mathrm{d}z \,.\, \sqrt{(1 + zz)}}.$$

§. 32. Voilà donc, ou peu s'en faut, l'énumération des principales claſſes des formules différentielles tranſcendantes. Ce que j'ai

 dit

dit à l'égard des deux premieres, me dispense de les examiner plus au long. La troisième classe suppose que la différentielle de la quantité transcendante puisse être exprimée par la quantité non transcendante qui l'affecte; & alors cette classe se réduit à une des suivantes, qui méritent un examen plus particulier.

§. 33. Pour cet effet, j'observe que chaque espece de quantités transcendantes se réduit à une formule, qui lui sert de base & qui peut être considérée comme la plus simple en son espece. Telle est p. ex. la formule

$$dy = \frac{dx}{x},$$

qui est la base de toutes les différentielles logarithmiques. Toutes les autres en dérivent par la voie des substitutions.

§. 34. Supposons donc qu'une espece quelconque de quantités transcendantes ait pour base la différentielle

$$dz = P\,dx,$$

où P est une fonction de x, que je considere ici comme algébrique. Supposons de plus, que dans cette différentielle on substitue à x une fonction algébrique quelconque de z, que je nommerai Q, de sorte qu'il soit

$$x = Q.$$

Faisons encore $$dx = R\,dz.$$

Il est clair que la valeur Q doit être substituée dans P, & que pour dx on posera $R\,dz$. Or, comme Q est supposé être une fonction algébrique de z, il est clair que sa différentielle $R\,dz$ présentera les symptômes que j'ai rapportés ci-dessus (§. 8.). Il est clair aussi, que ces symptômes doivent en emporter d'autres, par la substitution qu'on fait de $Q = x$ dans P, & par la multiplication qui se fait ensuite avec $R\,dz = dx$. Si p. ex. Q est une quantité rationelle, $R\,dz$ le sera aussi; & partant il n'y aura, dans la formule qu'on trouve, d'autre irrationalité que celles dont P pourra être affectée. Mais, si P est rationelle

nelle & Q irrationelle, R le ſera auſſi, & alors il n'arrive qu'en certains cas, que la multiplication dont je viens de parler, faſſe entierement diſparoitre cette irrationalité. Mais je me borne ici à faire au moins entrevoir, qu'il y a moyen de rendre plus connoiſſable la réductibilité des formules tranſcendantes compliquées, à d'autres qui le ſont moins, ou à celles qui leur ſervent de baſe. Du reſte, il eſt bien vrai, que chaque eſpece de quantités tranſcendantes demande des recherches plus particulieres, & que par cette raiſon il faudra ſe contenter de les entreprendre à l'égard de celles qui ont le plus d'uſage. C'eſt ainſi p. ex. que ſi, au lieu de différentier chacune des eſpeces de fonctions algébriques rapportées au §. 8, on prend les différentielles de leurs logarithmes, on trouvera des ſymptômes qui les rendent plus connoiſſables. Le logarithme d'une fraction étant la différence des logarithmes du numérateur & du dénominateur, ſa différentielle peut toujours être ſéparée en deux autres, qui ſont indépendantes l'une de l'autre. De même, le logarithme d'une quantité radicale eſt un multiple du logarithme de la quantité compriſe ſous le radical; & toutes les fois que cette quantité eſt rationelle, la différentielle du logarithme de la quantité radicale le ſera auſſi. Et comme, en général, le logarithme de tout ce qui ſe multiplie ou ſe diviſe, ſe décompoſe, il en eſt de même de ſa différentielle; & il eſt clair que par-là elle ſe ſimplifie conſidérablement. Mais il arrive tout le contraire lorſqu'il s'agit du logarithme de la ſomme de deux ou de pluſieurs quantités. Chacune auroit ſa différentielle ſéparée des autres (§. 8. N°. 4. 6.). Mais, pour avoir celle du logarithme, il faut les diviſer toutes par la quantité dont le logarithme doit être différentié. Car il eſt

$$d \log (P + Q + R + \&c.) = \frac{dP + dQ + dR + \&c.}{P + Q + R + \&c.}.$$

Si donc P, Q, R étoient des fractions ou des racines, leurs différentielles le ſeroient auſſi; & en ce cas il eſt clair, qu'en réduiſant toute la différentielle à une même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un, dont le lo-

garithme sera l'intégrale. Ainsi le moyen de trouver si une différentielle est celle d'un logarithme, n'a d'autres difficultés que celles qui naissent de la recherche de ces facteurs. Car il arrive aussi, que par de simples réductions le principal facteur disparoit. C'est ainsi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

n'a plus dans son dénominateur le facteur $x \pm \sqrt{(1+xx)}$. Pour le lui rendre, il faut la transformer en

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot \frac{x \pm \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

ce qui donne

$$dy = \frac{dx \pm x dx : \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

& partant

$$y = \log(x \pm \sqrt{(1+xx)}) + \text{Const.}$$

Quant aux arcs de cercle, on a

$$\text{Arc tang } (PQ) = \int \frac{PdQ + QdP}{1 + P^2Q^2}$$

$$\text{Arc tang } (P+Q) = \int \frac{dP + dQ}{1 + (P+Q)^2},$$

Si donc P, Q sont des fractions ou des racines, on voit qu'en ramenant la différentielle à un même dénominateur, ce dénominateur sera résoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un de la forme $1 + X^2$, de sorte que X sera la tangente de l'arc qu'on cherche. On trouvera de la même maniere, qu'il est

$$\text{Arc tang } P + \log(Q+R) = \int \frac{dP}{1+PP} + \int \frac{dQ + dR}{Q+R},$$

& que cette différentielle étant réduite à une même dénominateur, ce dénominateur sera résoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y

en

en aura un de la forme $1 + PP$, & un autre de la forme $Q + R +$ &c. qui indiqueront l'intégrale qu'il s'agit de trouver. Cependant il arrive encore dans ces sortes de cas, que les principaux facteurs disparoissent par la réduction. Cela arrive p. ex. dans la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 + x^4)}},$$

qui veut être proposée de la sorte:

$$dy = \frac{dx\ (1 + x^4)^{3:4}}{(1 + x^4) \cdot [\sqrt{(1 + x^4)} + x^2] \cdot [\sqrt{(1 + x^4)} - x^2]}.$$

Mais, comme je ne rapporte tout cela qu'en forme d'exemples, pour éclaircir ce que j'ai dit sur la méthode du Calcul intégral, je passerai maintenant à considérer la cinquieme classe.

§. 35. J'ai rapporté à cette Classe les différentielles dont les intégrales sont partie transcendantes, partie algébriques. C'est ici où les symptômes dont je viens de parler, seroient plus compliqués. Cependant ce que j'ai dit à l'égard des dénominateurs peut y être également appliqué. Mais le grand point est de séparer la partie transcendante d'avec celle qui est algébrique. Il est clair que par *séparer*, je n'entens pas soustraire d'une formule transcendante une algébrique quelconque, mais en soustraire ce qu'il y a d'algébrique, de façon que la partie transcendante, qui reste, soit purement transcendante. J'ai déjà remarqué que, dans l'intégrale, ces quantités se trouvent séparées par les signes $+$ & $-$. (§. 32. N°. 5.) Et par cette raison la séparation peut nécessairement avoir lieu. Or elle est assez facile, toutes les fois que ces parties se trouvent déjà séparées dans la différentielle, & qu'elles sont connoissables d'elles-mêmes. C'est ainsi p. ex. que dans la formule

$$\int \left(dx + \frac{dx}{x}\right) = x + \log x + \text{const.}$$

il

il n'y a plus rien à séparer, tout comme réciproquement dans la formule

$$z = \int(xe^x dx + e^x dx) = xe^x + \text{conft.}$$

on ne fauroit rien féparer, à moins qu'on ne faffe

$$\log(z - \text{conft.}) = x + \log x.$$

§. 36. Il s'agit donc ici des cas où la féparation peut avoir lieu, mais où elle n'eft pas fi facilement connoiffable. Or la méthode employée ci-deffus pour les intégrales algébriques, peut encore ici être employée avec fuccès. C'eft ce que quelque exemple fera voir.

XII. Exemple.

§. 37. Soit propofé

$$dy = \frac{1 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \cdot dx;$$

il s'agit de voir fi cette formule a quelque partie tranfcendante, & quelle elle eft? Pour cet effet pofons (§. 19.)

$$y = z \cdot \sqrt{(1 + xx)}$$

$$dy = \frac{dz\,(1 + xx) + zx\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

& nous aurons

$$1 + 2x + 4xx = dz\,(1 + xx) + zx\,dx,$$

ce qui fait voir qu'il faut faire

$$z = A + Bx$$

$$dz = B\,dx.$$

Et en fubftituant ces valeurs, il en réfulte, toute réduction faite,

$$\begin{aligned} o = &- 1 - 2x - 4xx \\ &+ B + Ax + 2Bxx: \end{aligned}$$

or, en pofant chaque terme $= o$, le fecond terme donne

$$A = 2,$$

ce

ce qui fait voir que dans la différentielle proposée le second terme

$$\frac{2\,x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}$$

est une des parties algébriques. Voyons s'il en est de même des deux autres termes. Or le premier donne

$$B = 1,$$

mais le troisieme donne $B = 2;$

& ces deux valeurs n'étant pas les mêmes, il s'ensuit qu'en effet il y a dans la formule proposée une partie transcendante. On voit encore qu'elle dérive du coëfficient, soit du premier, soit du dernier terme. Car, en changeant ces coëfficiens en sorte qu'ils satisfassent à l'une ou à l'autre valeur de B, que nous venons de trouver, on obtient les deux formules

$$dv = \frac{1 + 2x + 2xx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot dx$$

& $$dw = \frac{2 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot dx,$$

qui sont algébriquement intégrables, en ce qu'il est

pour $B = 1$, $\quad v = (2 + x)\ \sqrt{(1+xx)} + \text{const.}$

pour $B = 2$, $\quad w = (2 + 2x)\ \sqrt{(1+xx)} + \text{const.}$

Mais, comme il est

$$du = dy - \frac{2\,xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

$$dw = dy + \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

il est clair qu'il sera

$$y = (2 + x)\ \sqrt{(1+xx)} + 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{const.}$$

$$\& \quad y = (2+2x)\sqrt{(1+xx)} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$$

Il eſt clair auſſi que, tandis qu'on cherche l'intégrale qui ait la partie tranſcendante la plus ſimple, il faudra s'en tenir à la derniere. Du reſte la différence ne conſiſte qu'en ce que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \quad \text{eſt un ſecteur,}$$

$$\& \; 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} \quad \text{un ſegment}$$

de l'hyperbole équilatérale. On voit donc par cette façon de procéder que, dans la formule propoſée

$$dy = \frac{1 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot dx,$$

le ſecond terme $\frac{2x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}$, eſt tout à fait indépendant des deux autres, & qu'il ne les rend ni plus ni moins tranſcendans. Cela ſuit de ce que le coëfficient A a une valeur décidée. Mais les deux autres termes ſont mêlés de quelque quantité algébrique, de ſorte que, quand on ſépare cette partie, la partie tranſcendante ſe réduit à un ſeul terme. Et c'eſt tout ce qu'on peut faire, à moins qu'on ne ſubſtitue à x quelque fonction d'une autre variable, qui réduiſe la partie tranſcendante à une forme encore plus ſimple, ce qui ne ſauroit ſe faire qu'en la ramenant à une forme rationelle.

XIII. Exemple.

§. 38. Soit propoſé

$$dy = \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1+xx)}};$$

il

il s'agit de ſéparer de cette formule la partie tranſcendante qu'elle pourra avoir. Pour cét effet faiſons

$$\eta = z\sqrt{(1 - xx)},$$

$$d\eta = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

& nous aurons

$$x^6 dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

ce qui fait voir qu'il faut poſer

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4)\,dx.$$

Et comme, au lieu de la formule propoſée, nous pourrons d'abord prendre

$$d\eta = \frac{Q\,dx + x^6\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

où Q eſt une fonction rationelle de x lorſqu'en effet il y a dans la formule propoſée quelque partie tranſcendante, mais qui devient $= 0$ lorſqu'il n'y en a pas, nous aurons l'équation

$$(Q + x^6)\,dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

qui, en ſubſtituant les valeurs de z & de dz, donne

$$\begin{aligned} Q = &+ B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 \\ &- Ax - 2Bx^2 - 3Cx^3 - 4Dx^4 - \\ &5Ex^5 - 6Fx^6 - x^6, \end{aligned}$$

& il s'agit de voir ſi, chaque terme étant poſé $= 0$, les coëfficiens A, B - - - F ſe déterminent en ſorte que Q devienne également $= 0$. Car on voit qu'il y a 7 termes à faire $= 0$, au lieu qu'il n'y a que 6 coëfficiens A, B - - - - F à déterminer, & que par conſéquent la fonction Q doit fournir le ſeptieme, lorſque les ſix ne ſatisfont pas à tou-

toutes les conditions. Or le second, le troisieme & le cinquieme termes donnent les trois équations

$$5E = 0$$
$$4E - 3C = 0$$
$$2C - A = 0.$$

Et comme dans ces trois équations il n'y a que les trois inconnues E, C, A, on voit que leur valeur est déterminée en ce qu'il est

$$E = C = A = 0.$$

Il n'en est pas de même des quatre autres termes, qui fournissent les 4 équations

$$B = 0$$
$$3D - 2B = 0$$
$$5F - 4D = 0$$
$$1 + 6F = 0,$$

où il n'y a que trois inconnues. Or, comme les trois premieres de ces équations donnent $B = D = F = 0$, & que cette valeur de F ne satisfait pas à la quatrieme, il est clair qu'on ne sauroit faire $Q = 0$, mais qu'il faut donner à Q une des quatre valeurs suivantes:

$$Q = \alpha$$
$$Q = \beta x^2$$
$$Q = \gamma x^4$$
$$Q = \delta x^6,$$

ce qui en même tems déterminera la partie transcendante, dont la différentielle dy est affectée. Or, comme il s'agit d'en trouver la plus simple, il est clair qu'il faut retenir la premiere de ces valeurs. De là nous aurons les quatre équations

$$B - \alpha = 0$$
$$3D - 2B = 0$$

5F

$$5F - 4D = 0$$

$$1 + 6F = 0,$$

qui donnent

$$F = -\tfrac{1}{6},\quad D = -\tfrac{5}{24}F,\quad B = -\tfrac{15}{48} = a,$$

& partant

$$z = -(\tfrac{15}{8}x + \tfrac{5}{4}x^3 + x^5)$$

$$\eta = -(\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \frac{x^5}{6})\sqrt{(1 - xx)}.$$

Mais il eſt

$$\eta = y + a\int\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

donc il ſera

$$-y = \tfrac{15}{48}\int\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$+ (\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \tfrac{1}{6}x^5)\sqrt{(1 - xx)} + \text{conſt.}$$

ou bien

$$-y = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{Arc.}\,\text{ſin.}\,x +$$

$$\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}x + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{(1 + xx)} + \text{conſt.}$$

§. 39. Si la différentielle tranſcendante qu'on voudra traiter de cette maniere, eſt en elle-même la plus ſimple, alors il eſt clair qu'il n'y a rien à ſéparer, & en employant cette méthode on trouveroit, ou la formule elle-même, ou une autre plus composée. Enſuite, il convient auſſi d'obſerver que dans cette méthode il ne ſe fait point de ſubſtitution, parce que le réſultat qu'elle donne eſt exprimé par la même variable x, qui entre dans la différentielle dont on veut ſéparer les quantités algébriques & tranſcendantes. Cela fait auſſi, que la partie tranſcendante qu'on trouve, peut quelquefois être partagée en d'autres qui ſont beaucoup plus ſimples, ou du moins d'une origine plus ſimple. Mais, ordinairement, il faut alors employer des ſubſtitutions,

tions, ce qui arrive ſurtout lorſque dans la différentielle propoſée il entre des quantités radicales.

XIV. Exemple.

§. 40. Soit propoſée la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(1 \pm x^n)}}.$$

Cette formule paroît être la plus ſimple en ſon eſpece. Elle ne l'eſt cependant que dans un petit nombre de cas, où elle donne ſimplement un arc de cercle, ou un logarithme, ou enfin, dans le cas de $n = 0$, la quantité rationelle x. Dans tous les autres cas, elle peut-être décompoſée dans ces trois ſortes de quantités, & par là elle n'eſt ni ſimple, ni d'une eſpece tranſcendante particuliere ou primitive. Cela demande des ſubſtitutions. Faiſons pour cet effet

$$x = \frac{1}{z},$$

$$dx = -\frac{dz}{zz},$$

& il ſera

$$-dy = \frac{dz}{zz \,.\, \sqrt[n]{(1 \pm \frac{1}{z^n})}},$$

ou bien

$$-dy = \frac{dz}{z \,.\, \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}},$$

ou enfin

$$-dy = \frac{z^{n-1}\, dz}{z^n \,.\, \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}}.$$

Faiſons encore

$$z^n \pm 1 = v^n$$
$$z^{n-1}\,dz = v^{n-1}\,dv$$
$$z^n = v^n \mp 1,$$

& il sera

$$-\,dy = \frac{v^{n-2}\,dv}{v^n \mp 1},$$

fraction rationelle, qui peut être décomposée en quantités circulaires & logarithmiques, encore lorsque n est un nombre rompu.

§. 41. Voilà à peu près ce que j'avois à dire pour indiquer l'usage de la méthode que je viens d'exposer. Je me suis borné à l'appliquer à des exemples faciles, parce que mon but n'étoit pas de donner une liste de formules intégrales que chacun pourra trouver en employant la méthode elle-même. C'est à cela que les préceptes du Calcul intégral doivent aboutir; & c'est aussi à quoi aboutissent les réflexions générales que j'ai rapportées. Je ne laisserai pas cependant de faire encore mention d'une autre méthode, qui me paroit mériter l'attention des Géometres. Voici à quoi elle revient.

§. 42. Supposons une formule intégrale, p. ex.

$$z = x\,\sqrt{(a^2 + x^2)};$$

il est clair qu'on peut lui donner la forme de deux variables, en faisant p. ex.

$$z = y\,\sqrt{(a^2 + x^2)}$$
$$z = x\,\sqrt{(a^2 + xy)}$$
&c.

Car, en substituant dans ces expressions la valeur $y = x$, il est clair qu'elles seront la même que la formule proposée. Différentions maintenant ces trois formules, & nous aurons

$$dz = \frac{(a^2 + 2x^2)\,dx}{\sqrt{(a^2 + 2x^2)}}$$

dz

$$dz = \frac{(a^2 + x^2)\,dy + yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$dz = \frac{aa\,dx + \frac{1}{2}xy\,dx + \frac{1}{2}xx\,dy}{\sqrt{(a^2 + xy)}}.$$

Il eſt clair que ces formules ſont les mêmes en faiſant $y = x$. Mais il eſt clair auſſi que les deux dernieres auroient pu être dérivées de la premiere, indépendamment de l'intégrale. Or je dis qu'en faiſant ces ſortes de ſubſtitutions d'une certaine façon, on peut rendre l'intégration plus facile. C'eſt ainſi p. ex. qu'en ne regardant, dans la premiere partie de la ſeconde formule, que l'y variable, ſon intégrale eſt

$$y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt. } X.$$

Et cette intégrale étant différentiée en ne regardant que l'x variable, donne

$$\frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + dX,$$

c'eſt à dire, en faiſant $dX = 0$, la ſeconde partie de la même formule. Il eſt donc clair qu'il eſt

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

ou bien à cauſe de $y = x$,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

§. 43. Dans cette façon de procéder il n'eſt pas néceſſaire de poſer préciſément $x = y$; on pourra faire x égal à une fonction quelconque de y. C'eſt ainſi p. ex. qu'en faiſant

$$x^2 = y,$$

la formule différentielle

$$dz = \frac{(a^2 + 2xx)\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

peut

peut être changée en

$$dz = \frac{(a^2 + y)\,dx + \frac{1}{2}x\,dy}{\sqrt{(a^2 + y)}},$$

dont l'intégrale se trouve, comme du premier coup d'œil,

$$z = x\sqrt{(a^2 + y)} + \text{const.}$$

ou, en remettant la valeur de y,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{const.}$$

§. 44. Mais j'ai dit que ces sortes de substitutions veulent être faites *d'une certaine façon*. Ce n'est pas qu'elles ne soient faisables suivant toutes les combinaisons possibles. Mais la grande condition est de les faire en sorte que la formule à deux variables qui en résulte, soit une différentielle complette. Cela n'est gueres, ou point du tout faisable, toutes les fois que la formule n'a point d'intégrale algébrique. Mais, quand elle en a une, on peut le faire en une infinité de manieres, de sorte qu'alors il ne s'agit que de trouver une substitution telle, qu'elle rende non seulement la différentielle à deux variables complette, mais la simplifie encore pour ce qui regarde l'intégration.

§. 45. Or on sait qu'une différentielle à deux variables, comme p. ex. celle du §. 42.

$$dz = dx\sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

est complette, lorsqu'en différentiant le facteur de dx suivant y, & le facteur de dy suivant x, on obtient le même résultat

$$\frac{dx \,.\, dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}, \quad \frac{dy\,dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

de sorte que par ce moyen on peut toujours reconnoitre, si, par la substitution qu'on a faite, on parvient à une différentielle complette ou non. Il est clair aussi que pour y réussir, on peut poser au lieu de x,

 une

une fonction de y, & même de y & x, dont les coëfficiens & les exposans soient indéterminés, & qui se déterminent ensuite par cette seconde différentiation. Mais il faut nécessairement laisser du moins un x, sans substitution, parce que sans cela on n'auroit ni plus ni moins que la même formule, & qui seroit encore plus compliquée.

§. 46. Cette méthode peut encore être envisagée d'une autre façon. Car, en considérant p. ex. la formule

$$dz = \frac{(a^2 + 2xx)\, dx}{\sqrt{(aa + xx)}},$$

comme l'élément de l'espace d'une ligne courbe, on peut considérer celles qui s'en déduisent par l'introduction de y, comme autant de différens élémens d'un solide. C'est ainsi p. ex. que dans la formule transformée (§. 45.)

$$dz = dx \sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

le facteur ou multiplicateur de la premiere partie exprime l'aire de la section du solide qui se fait le long de la droite y. Le produit $dx \sqrt{(a^2 + y)}$ donne donc l'élément du solide le long de cette droite. De la même maniere, l'autre partie

$$\frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

donne l'élément du solide le long de la droite x, parce que l'aire de la section, qui se fait le long de cette droite, y est multipliée par l'épaisseur infiniment petite dy. Enfin, si la différentielle est complette, on aura (§. 45.)

$$ddz = \frac{dy \,.\, dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

l'élément de ces deux élémens, c'est à dire, un parallélipipede dont la base est $= dx \,.\, dy$ & la hauteur $= 1 : 2\sqrt{(a^2 + y)}$. Mais, si la

si la différentielle n'est pas complette, alors au lieu de cuber un même solide, on en cube deux, qui n'ont point l'élément ddz commun, puisque la hauteur du parallélipipede est différente. Et il est clair qu'alors il faudroit retrancher ou ajouter la différence de la hauteur des deux parallélipipedes.

§. 46. Supposons p. ex. qu'en faisant $x = y$, on change la formule

$$dz = \frac{(aa + 2xx)\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dans la suivante

$$dz = \frac{(a^2 + xx)\,dy + yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

La premiere partie différentiée suivant x, donne le parallélipipede

$$ddz = \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

& la seconde partie différentiée suivant y, donne le parallélepipede

$$ddz' = \frac{2y\,dy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Or ces deux parallélipipedes n'étant pas le même, cela fait voir que la différentielle transformée n'est point complette. Intégrons néanmoins ddz suivant y, & ddz' suivant x, & nous aurons les parties qu'il faut ajouter à la differentielle dz pour la rendre complette. Il sera donc

$$d\zeta = dy\sqrt{(a^2 + x^2)} + \frac{yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$+ \frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

 ce

ce qui donne

$$z = y\sqrt{(aa + xx)} + yy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + \text{conft.}$$

Or la partie que nous avons ajoutée à dz eft

$$\frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Et comme nous avons le choix d'y placer y au lieu de x, nous le changerons en

$$\frac{yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dont l'intégrale eft

$$yy\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

c'eft à dire, celle qu'il faut retrancher de z pour avoir

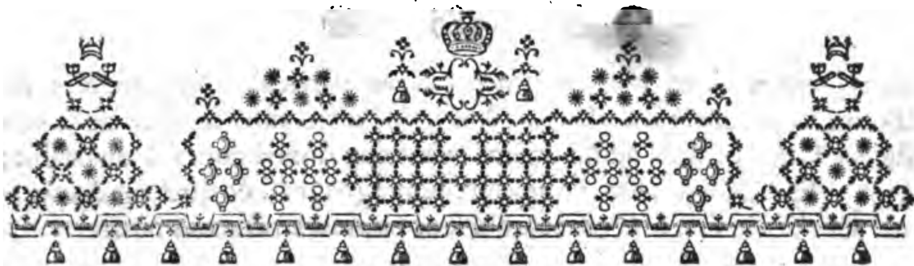
$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conft.} = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conft.}$$



Mé-

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES-LETTRES.

CLASSE
DE BELLES-LETTRES.



DISSERTATION (*) SUR LA NAISSANCE DE CLOVIS I.

PAR M. DE FRANCHEVILLE.

On a cru jusqu'à présent que le grand Clovis, premier Roi Chrétien de France, étoit né d'une alliance adultérine, contractée par Childeric son pere, avec Basine femme d'un Roi de Turinge qu'elle avoit quitté par débauche. C'est peut-être ce qui a engagé le P. Daniel à ne commencer son Histoire de France qu'à Clovis, pour n'avoir point occasion de parler de sa naissance. En quoi il a été depuis imité par Monsieur le Président Hénault, dans son Abrégé si connu & si estimé. Je ne puis que les louer l'un & l'autre de leur circonspection. Cependant il auroit mieux valu que, par une suite de leur prédilection pour ce premier Roi, ils eûssent tous deux essayé de le laver de cette tache: Et ne l'ayant point fait, ni personne autre que je connoisse, j'oserai l'entreprendre, autant pour l'honneur de la Couronne de France que par amour pour la vérité.

Il faut convenir d'abord que j'ai contre moi un des plus forts préjugés, qui est celui des témoignages réunis d'une foule d'Historiens

(*) Lû à l'Académie, dans l'Assemblée publique du 25 Janvier 1762.

riens, tant anciens que modernes, & en particulier de Grégoire de Tours, le premier d'eux tous. Mais, s'ils n'ont tous été que les échos de celui-ci, & qu'il ait lui-même avant eux donné cours à une fable; à quoi se réduisent leurs nombreux témoignages, & quel fonds peut-on faire sur le sien? C'est ce qu'il faut premiérement examiner.

Le Fait ou le Roman dont il s'agit, se trouve dans Grégoire de Tours, au Livre second, Chapitre XII. en ces termes: *Childericus verò cum esset nimia in luxuria dissolutus, & regnaret super Francorum gentem, cœpit filias eorum stuprosè detrahere. Illique ob hoc indignantes de Regno eum ejiciunt. Comperto autem quod eum etiam interficere vellent, Thoringiam petiit, relinquens ibi hominem sibi charum, qui virorum furentium animos verbis lenibus mollire possit. Dans etiam signum quando redire possit in patriam. Id est, diviserunt simul unum aureum, & unam quidem partem secum detulit Childericus, aliam verò amicus ejus retinuit, dicens: „Quando hanc partem tibi misero, partesque conjunctæ unum „effecerint solidum, tunc tu securo animo in patriam repedabis.“ Abiens ergo in Thoringiam, apud Regem Bisinum (alias Basinum) uxoremque ejus Basinam latuit. Denique Franci hoc ejecto, Egidium sibi - - - Magistrum militum à Republica missum - - - unanimiter Regem adsciscunt. Qui cum octavo anno super eos regnaret, amicus ille fidelis, pacatis occultè Francis, nuncios ad Childericum cum parte illa divisi solidi quam retinuerat, mittit. Ille verò certa cognoscens indicia, quod à Francis desideraretur, ipsis etiam rogantibus, à Thoringia regressus, in Regnum suum est restitutus. His ergo regnantibus simul Basina illa, quam supra memoravimus, relicto viro suo, ad Childericum venit. Qui cum sollicitè interrogaret, qua de causa de tanta regione venisset, respondisse fertur: „Novi, inquit, utilitatem tuam, quod sis valdè strenuus, „ideoque veni ut habitem tecum. Nam noveris, si in transmarinis par„tibus aliquem cognovissem utiliorem te, expetiissem utique cohabitatio„nem ejus.“ At ille gaudens, eam sibi in conjugio copulavit. Quæ concipiens, peperit filium, vocavitque nomen ejus Chlodovæum. Hic fuit magnus & pugnator egregius.* Je traduirai ce passage en François pour

pour ceux qui n'entendent pas le Latin. „Or comme Childeric étoit „excessivement débauché à l'égard du sexe, régnant sur la Nation des „François, il se mit à enlever leurs filles pour jouir d'elles. Eux, indignés „de cela, le dépouillent de sa Royauté. Et lui, informé qu'ils vou„loient aussi le tuer, s'en alla dans la Thuringe, laissant là un homme „qu'il chérissoit, pour pouvoir appaiser par de douces paroles les es„prits irrités, & convenant avec lui d'un signe pour lui faire savoir „quand il seroit tems qu'il revînt dans le pays. A cet effet, ils parta„gerent ensemble une piece d'or, dont Childeric emporta la moitié & „son ami retint l'autre, disant: *Quand je vous aurai envoyé cette moitié „& que les deux rapprochées feront la piece entiere, alors vous pourrez „revenir en toute sûreté.* S'en allant donc en Thuringe, il se tint caché „auprès du Roi Bisin ou Basin, & auprès de sa femme Basine. Enfin „les François, après l'avoir chassé, se donnent unanimement pour Roi „Egidius, ou Gilles, qui avoit été envoyé par la République en qua„lité de Maître de la Milice. Comme il régnoit depuis huit ans sur „eux, le fidele ami, ayant appaisé secrétement les François, envoye „des Exprès à Childeric, avec la moitié du soû rompu qu'il avoit re„tenue. Or lui, ayant par-là un indice certain qu'il étoit desiré des „François, & ces Exprès d'ailleurs y joignant leurs prieres, il re„vint de la Thuringe, & fut rétabli dans sa Royauté. Eux donc ré„gnant ensemble, cette Basine dont nous avons parlé plus haut, ayant „quitté son mari, vint trouver Childeric; & comme il s'enquéroit „d'elle pour quel sujet elle étoit venue vers lui d'un pays si éloigné, on „dit qu'elle fit cette réponse: *Je connois ton utilité & ta grande bra„voure. C'est à cause de cela que je suis venue pour demeurer avec toi. Car „sache que si j'eusse connu quelqu'un plus utile que toi, fût-il au delà des „mers, j'aurois également desiré d'aller vivre avec lui.* Là-dessus, ra„vi de joie, il la prit en mariage; & elle, concevant, mit au monde un „fils qu'elle nomma Clovis: celui-ci fut un grand & fameux guer„rier.“

Cette Histoire vraie ou fausse, une fois reçue par Grégoire de Tours, n'a pas manqué de passer sans examen dans toutes les Chro-

niques des fiécles fuivans, & dans la plupart avec de nouvelles circonftances.

Celle qui a pour titre: *Gefta Regum Francorum* (*), nomme le fidele ami Viomade. Elle dit qu'il employa des artifices pour rendre Egidius odieux & engager les François à le chaffer. Puis venant à Childeric lors de fon départ de la Thuringe, elle ajoute: *Nam dum fuit in Toringia, cum Bafina Regina uxore Bifini* (alias *Bafini*) *Regis ipfe Childericus Rex commixtus fuit.* „Car, pendant qu'il fut dans la „Thuringe, ce même Roi Childeric eut commerce avec la Reine Bafine, „femme du Roi Bifin, autrement Bafin.“ Et même le texte de cette Chronique tiré du Mfc. de l'Eglife de Cambrai, porte: *adulterium commifit*, „il commit adultere.“

Le Moine Roricon, qui a fuivi l'Auteur de la Chronique précédente, lui eft entiérement conforme, fi ce n'eft qu'il a trouvé, que „Bafine avoit quitté fouvent le lit de fon mari pour jouir de la com„pagnie de Childeric“: *Sæpius relicto viri thoro, confortium noftri Regis eft experta.* Et il avoue „qu'elle avoit mis bas la pudeur de fon „fexe, parce qu'elle étoit luxurieufe à l'excès“: *Poftpofito pudore muliebri, ut erat nimis luxuriofa.*

Mais, cent ans après, vint Fredegaire le Scholaftique, qui fit voir que fes prédéceffeurs n'avoient fait qu'effleurer la matiere, & qu'ils avoient furtout oublié les circonftances les plus curieufes. Selon lui, „Wiomade étoit de tous les François le plus fidele à Childeric, qui l'a„voit fauvé par la fuite lorfque les Huns l'emmenoient prifonnier avec „fa mere“: *Wiomadus Francus fideliffimus cæteris Childerico,* (**) *qui eum, cùm à Chunis cum matre captivus duceretur, fugaciter liberaverat.* „Ce foû d'or qu'ils avoient partagé, ne venoit point de la bourfe de „l'un

(*) Au I. Volume des Hiftoriens de France d'André du Chefne, page 690.

(**) *Qui eum;* ces deux mots, fi je ne me trompe, ont rapport le premier à Childeric, & le fecond à Wiomade. Mais le P. Daniel a pris l'un pour l'autre, ayant écrit que c'étoit Childeric qui avoit été délivré par Wiomade, étant emmené en captivité avec fa mere. Il a augmenté par là le ridicule du paffage.

„l'un ni de l'autre; c'étoit une trouvaille que Wiomade avoit faite“: *Hic inventum unum aureum cum Childerico dividens.* „Wiomade, de„venu Viceroi des François sous Gilles, lui fait imposer sur eux un tri„but d'un soû d'or par tête & ils le payent. Il fait porter ensuite par „Gilles le tribut à trois soûs, & ils s'y soumettent encore, trouvant „que cela n'étoit pas si dur que ce qu'ils souffroient sous Childeric. „Wiomade retourne à Gilles, lui fait accroire que les François se ré„voltent, & lui conseille d'en faire égorger plusieurs pour abaisser l'or„gueil des autres. Il en mene lui-même à Gilles cent des principaux „qu'il avoit choisis, & Gilles suivant son conseil les fait tuer. Alors „Wiomade va parler secrétement aux François, & les excite à rappeller „Childeric. De là il retourne à Gilles & lui persuade d'envoyer une „ambassade à l'Empereur Maurice.“ Et notez bien que cet Empereur Maurice, dont le nom se trouve répété jusqu'à quatre fois dans ce récit, n'a commencé à régner qu'en l'année 582, cent-dix-huit ans après la déposition de Childeric & environ 107 ans depuis la mort de Gilles. „Le sujet ou le prétexte de cette ambassade à Maurice, étoit de lui de„mander cinquante mille soûs pour les employer à gagner les Nations „voisines. Mais la vérité étoit que Childeric se trouvant à Constan„tinople auprès de l'Empereur Maurice, Wiomade voulut profiter de „cette ambassade pour informer Childeric de la disposition des François. „Dans cette vue il dit à Gilles, qu'il avoit reçu quelques soûs pour ses „services, qu'il avoit peu d'argent, qu'il souhaitoit de faire partir avec „les Ambassadeurs un petit garçon qui iroit trafiquer cet argent à Con„stantinople“: *Aliquantulos solidos tuæ instantiæ locum accipiens militavi, parum servus tuus argentum habeo. Volebam cum tuis legatis puerum dirigere, ut melius Constantinopoli mihi argentum mercaret.* „Alors ayant reçu de Gilles cinq-cent soûs d'or en présent pour les „employer à ce trafic, il envoya le petit garçon, avec la moitié du „soû d'or: mais à la place de l'argent qu'il devoit trafiquer, il lui don„na un sachet plein de pieces de plomb“: *Tunc acceptis ab Egidio quingentis in munere aureis, quos ad hoc opus emendum transmitteret, misit puerum creditarium sibi cum media parte aurei quem cum Childe-*

 rico

rico diviserat. Saccellum plenum plumbeis, quod puer pro solidis secum portaret. „Avant que les Ambassadeurs parussent devant l'Empereur, „le petit garçon qui avoit pris les devans, suivant ses instructions, étoit „allé avertir Childeric, que Gilles, au lieu d'envoyer de l'argent au „Trésor public, en demandoit à l'Empereur. Childeric aussitôt va le „dire à Maurice, & Maurice entrant dans une grande colere, fait met- „tre les Ambassadeurs en prison. La circonstance ne pouvoit être „plus favorable pour Childeric; il dit à l'Empereur": *Jube me servum tuum ire in Gallias. Ego furorem indignationis tuæ super Egidio ulciscar.* „Maurice le prend au mot, lui fait de grands présens, & le „renvoye par mer dans les Gaules": *Evectu navali revertitur in Gallias.* „Wiomade, averti de sa venue par le petit garçon, va le join- „dre au Château de Bar, & il est reçu par les Barrois." D'où l'on peut conclurre que c'étoit alors la route pour entrer en France, en venant de Constantinople par mer. Mais ce n'est pas le tout, ni même le meilleur du Conte. Basine de Thuringe, qui s'étoit sans doute fort ennuyée pendant le séjour de Childeric à Constantinople, „l'étant „venu trouver en toute diligence, *cursu veloci;* la premiere nuit de „leurs nôces, étant couchés ensemble, elle lui dit: Leve-toi sans fai- „re de bruit, & tu diras à ta servante ce que tu auras vu devant le Pa- „lais": *Surge secretius, & quod videris ante aulas Palatii, dices ancillæ tuæ.* "S'étant levé aussitôt, il vit trois bêtes ressemblantes au „Lion, à la Licorne & au Léopard, qui se promenoient": *Cumque surrexisset, vidit similitudinem bestiarum Leonis, Unicornis & Leobardi, deambulantium.* "De retour, il dit à sa femme ce qu'il avoit vû. „La femme lui dit: Monseigneur, va derechef, & rapporte à ta ser- „vante ce que tu auras vû": *Reversusque dixit mulieri quæ viderat. Dixit ad eum mulier: Domine mi, vade denuo, & quod videris narra ancillæ tuæ.* „Et comme il fut allé dehors, il vit deux bêtes se pro- „mener, ressemblantes à l'Ours & au Loup": *Ille vero cum foris abiisset, vidit bestias similitudine Ursi & Lupi deambulantes.* „Racontant „cette seconde vision à sa femme, elle le renvoye pour la troisiéme „fois": *Narrans & hæc mulieri, compellit eum tertiò ut iret, & quod vide-*

viderat nuntiaret. „Il vit cette fois-ci de moindres animaux, ressemblans au Chien & à d'autres petites bêtes qui se tirailloient les uns les „autres & se rouloient.“ *Cumque tertiò exiſſet, vidit beſtias minores ſimilitudine Canis, & minorum beſtiarum ab invicem detrahentium & volutantium.* Après qu'il eut rapporté tout cela à Baſine, ils paſſerent „chaſtement le reſte de la nuit“: *Cumque Baſinæ hæc univerſa narraſſet, abſtinebant ſe caſtè uſque in craſtinum.* „Au ſortir du lit, Baſine „donna à Childeric l'interprétation de tout ce qu'il avoit vû“: *Surgentes de ſtratu, dixit Baſina ad Childericum: Quæ viſibiliter interpretationem habent.* „Il nous naîtra un fils qui aura la force du Lion: ſes „fils auront la force du Léopard & de la Licorne; & ceux qui naîtront „d'eux auront la force & la vîteſſe des Ours & des Loups. Quant „à ceux que tu as vûs en dernier lieu, ce ſeront les Colonnes de ce „Royaume; parce qu'ils régneront à la façon des Chiens, & que leur „force ſera ſemblable à celle des petits animaux. Mais la pluralité de „ceux-ci qui ſe rouloient en ſe tiraillant, ſignifie que les Peuples ſeront ruïnés les uns par les autres, n'ayant plus la crainte des Prin„ces“: *Naſcetur nobis filius fortitudine Leonis ſignum & inſtar tenens. Filii quoque ejus Leobardi & Unicornis fortitudine ſignum tenent. Deinde generantur ex illis, qui Urſis & Lupis fortitudine & velocitate eorum ſimilabunt. Et tertiò quæ vidiſti ad diſceſſum, Columnæ Regni ejus erunt: quia regnabunt ad inſtar Canum, & minoribus beſtiis eorum conſimilis erit fortitudo. Pluritas autem minorum beſtiarum, quæ ab invicem detrahentes volutabant, populos ſine timore Principum ab invicem vaſtandos ſignificat.*

Voilà le Conte revêtu à peu près de toutes ſes circonſtances; & je doute que l'imbécillité humaine ait jamais produit un chef-d'œuvre plus complet de ridicule & d'abſurdité.

Pour anéantir tout d'un coup des fables ſi groſſieres, il ne me ſeroit pas difficile de faire voir, par l'autorité d'un ancien Hiſtorien des Francs, combien ils avoient en horreur l'adultere, par l'exemple d'un de leurs Rois nommé Baſan, qui fit punir de mort ſon propre fils Se-

 dan,

dan, convaincu de ce crime, 274 ans avant l'Ere Chrétienne. Cette preuve acquerroit même, si l'on vouloit, un nouveau degré de considération par l'heureux rapport qui se trouve entre le nom de Bassan & celui de Basin. Mais peut-être croiroit-on que je n'aurois recours à cette preuve, que pour réfuter une fable par une fable.

Le P. Daniel a fait, à la tête de son Histoire de France, une Dissertation pour prouver que la déposition de Childeric est une fausseté. „Il avoue d'abord qu'il n'a presque contre ce fait que des conjectures „& des argumens négatifs. Cependant il les croit capables de faire „sur l'esprit de ses Lecteurs le même effet qu'ils ont fait sur le sien. Il „prétend que l'élection d'un Général Romain par des François, est „une chose aussi bizarre que l'auroit paru la conduite des Turcs, si „après avoir déposé Mahomet IV. ils eussent élu pour Sultan le Prince „Charles de Lorraine qui leur faisoit la guerre en Hongrie. Il dit ensuite que le Comte Gilles n'a pu déférer au choix des François sans „se rendre suspect au Patrice Ricimer, qui n'auroit pas manqué de le „faire assassiner. Il soutient après cela que l'histoire de l'Empire n'a „parlé de lui en aucune occasion comme d'un Roi, mais simplement „comme d'un Comte ou d'un Général de l'armée Romaine dans les „Gaules. Et pour derniere preuve, il fait voir par le témoignage d'I„dace que le Comte Gilles mourut en 463, la troisiéme année de l'Em„pereur Sévere, cinq ans après que Childeric eut succédé au Royau„me des François par la mort de Mérovée arrivée en 458; & que dans „cet intervalle il est impossible de trouver les huit années de régne „qu'on donne à ce prétendu Roi."

Mais ce raisonnement du P. Daniel me paroît plus spécieux que juste.

Premiérement, le choix d'un Gaulois tel qu'étoit le Comte Gilles, Chef des Armées Romaines, mis par les François à leur tête, n'a rien de plus singulier, que celui d'un Anglois comme Richard & d'un Espagnol tel qu'Alphonse, élus tous deux Empereurs d'Allemagne au

milieu

milieu du XIII Siecle. Il n'a rien même de plus bizarre que celui de plusieurs Allemands, comme Mérobaude, Baudon, Arbogaste, tous trois Francs ou François de nation, & Ricimer lui-même, que les Romains avoient mis, vers le tems de Gilles, à la tête de leur Sénat & de leur Milice. L'élection du Prince Charles de Lorraine eût sans doute été bizarre. Jamais Turc ne s'étoit trouvé à la tête d'une Armée & d'une République Chrétienne, ni jamais Chrétien à la tête d'un Etat & d'une Milice Turque. Mais il n'en étoit pas de même des François avec les Romains, ausquels ils se joignoient en toute occasion pour la défense de l'Empire. Voici quelques exemples qui en pourront donner la preuve. La premiere fois que le nom des Francs ou des François paroît dans l'Histoire, c'est à l'occasion d'un Traité que le César Galien, sous l'Empire de Valérien son pere, fit avec eux en l'année 254, pour les opposer aux autres Germains qui voudroient passer le Rhin (*Zosime Liv. I.*). L'an 358, „les Saxons envoyerent les Quades, qui étoient de leur Nation, pour se loger dans les terres des Romains. Les François Saliens, qui habitoient sur leurs frontieres, leur „boucherent le passage pour rendre service à l'Empire. Peu après, Julien allant combattre les Quades, fit auparavant jurer à son Armée, „qu'elle ne feroit aucun mal aux François Saliens, & leur laisseroit la „liberté de se retirer sur les terres de l'Empire; ce que ces François „ne manquerent pas de faire avec leur Roi, & alors Julien les prit à „son service (*Zosime Liv. III.*). L'an 375, „Valentinien donna le commandement de son Armée à Mérobaude (*le même Liv. IV.*). L'an 378, „les Germains ayant passé le Rhin, Gratien envoya à leur rencontre ses Légions secondées de Mérobaude, Roi des Francs, qui étoit „dans les Gaules: le combat se donna, il y resta 35 mille Germains, & „en reconnoissance de ce grand service, Gratien conféra à Mérobaude la dignité de Comte de ses Domestiques ou de Maître du Palais (*Socrate*). L'an 380, „Gratien, sachant que Théodose en Orient avoit „les Scythes sur les bras, lui envoya une armée sous la conduite de „Baudon & d'Arbogaste, deux Chefs de François, à l'arrivée desquels „les Scythes quitterent la Macédoine & la Thessalie (*Zosime Liv. IV.*).

L'an

L'an 388, „le même Arbogaste amena à Théodose un Corps considé-„rable de François: arrivé au bord du Save où l'Armée de Théodose „étoit arrêtée, il le passa le premier à la nage avec sa troupe, & tailla „en pieces l'Armée de Maxime, qui étoit postée sur l'autre bord. Ar-„bogaste fut ensuite détaché pour aller arrêter dans les Gaules le fils de „Maxime, & il le fit mourir (*le même & Marcellin*). L'an 393, „les „François, après quelque brouillerie, renouvellerent avec l'Empire leurs „anciens Traités d'alliance (*Sigonius*). L'an 395, „ils les renouvelle-„rent encore avec Stilicon (*Zosime & Prosper*). L'an 410, „ils rem-„plirent les devoirs de cette alliance en arrêtant les Vandales qui vou-„loient passer le Rhin: ils en tuerent près de vingt mille, & les au-„roient entiérement détruits, si Godigisile leur Roi n'avoit été secou-„ru par Respendial Roi des Alains (*Frigéride dans Grégoire de Tours, & Zosime*). La même année, „Constantin donna le commandement „de ses Troupes à Edobeck, Chef de François, qui avec un gros corps „de sa Nation étoit au service de cet Empereur (*les mêmes*). L'an 411, „Constantin pour se maintenir dans les Gaules appella à son secours les „François; mais le Roi ou le Chef de ces François fut pris & son Ar-„mée taillée en pieces par celle d'Honorius (*Sozomene, Prosper & Marcellin*). Enfin l'an 451, „Mérovée pere de Childeric joignit de „même son Armée Françoise à celle de Valentinien, dont Aëtius avoit „le commandement général, & il lui rendit de signalés services con-„tre Attila qui pilloit & ravageoit les Gaules (*Grégoire de Tours, Jor-„nandès & Sigebert*).“ Tant d'exemples ne sont-ils pas plus que suffi-sans, pour montrer que le P. Daniel s'est trompé, en mettant les Turcs & les Chrétiens en parallele avec les Romains & les Francs ou François du tems de Childeric, qui pouvoient, sans lui & même avec lui, se ranger sous les étendarts d'un Général Romain, tout aussi bien qu'ils l'avoient fait en tant d'autres occasions.

Secondement, si le Comte Gilles n'a pu probablement accepter la Royauté des François; si nul Historien de l'Empire ne lui a donné le titre de Roi; tant mieux, c'est une preuve qu'il ne l'a point été, & j'en

j'en demeure d'accord avec lui. Mais il ne s'ensuit point de là, ni que Childeric n'ait pu être déposé, ni que pendant sa déposition les François n'ayent pu, à l'instigation de Wiomade, se joindre à l'Armée Romaine commandée par le Comte Gilles. Au contraire, en supposant avec tous ceux qui ont parlé de la déposition de Childeric, qu'il eût remis ses intérêts à ce Wiomade, homme fidele, accrédité, artificieux; n'étoit-il pas de sa politique, de mettre tout en usage pour empêcher les François de remplacer le Roi détrôné, par un Prince de leur Nation, qui lui auroit fermé le retour au Trône, ou dont l'élection du moins n'auroit pu manquer de causer une guerre civile, pour peu que Childeric eût essayé de recouvrer son Royaume? Quel plus grand service donc pouvoit-il lui rendre, que d'engager les François à prendre unanimement, comme ils firent, la résolution de se donner au Comte Gilles, non comme sujets, car je suis déja convenu qu'il ne fut pas leur Roi, mais comme stipendiaires & alliés. Auquel cas il n'aura pas eu droit d'imposer sur eux les tributs qui furent cause du rappel de Childeric. Mais aussi n'est-il parlé de ces tributs que dans les Chroniques postérieures à Grégoire de Tours, qui dit simplement „que la huitiéme année le fidele ami, ayant appaisé secrétement les „François, envoya des Exprès à Childeric pour le faire revenir.“ Et au reste, quand bien même Grégoire de Tours en auroit parlé, ce ne seroit ni la seule ni la plus grande erreur qu'il eût faite dans le récit de cet événement, où la vérité se trouve enveloppée d'une nuée de circonstances palpablement fausses & romanesques.

Troisiémement, l'impossibilité que le P. Daniel prétend y avoir à trouver, entre la premiere année du régne de Childeric & celle de la mort du Comte Gilles, un espace suffisant pour les huit années que dura la déposition du premier; cette impossibilité, dis-je, ne me paroît pas non plus assez fondée, pour en pouvoir tirer une preuve convaincante, contre la réalité de cette déposition. Il cite Idace pour prouver que le Comte Gilles mourut en 463, & Idace le condamne. C'étoit un Auteur contemporain, qui écrivant dans l'Espagne où il

 étoit

étoit Evêque, rapporte les dates de sa Chronique aux Olympiades & à l'Ere Espagnole, qui sont antérieures à nôtre Ere Chrétienne vulgaire, savoir celles-là de 776 ans, & celle-ci de 38. Pour partir d'abord d'un point fixe, je prends une Eclipse de Soleil qu'Idace dit être arrivée le 9 des Calendes de Janvier, c'est à dire le 24 Décembre, de la 24ᵉ année de l'Empereur Théodose le Jeune, à compter de la mort d'Honorius. Cette Eclipse calculée astronomiquement par Calvisius, se trouve être arrivée à Salamanque en Espagne un jour plutôt, s'il n'y a point d'erreur dans l'Ouvrage Chronologique de Calvisius, c'est à dire le 23 Décembre, férie troisiéme qui étoit le Mécredi, de l'an - - - - - - - 447

A quoi, pour descendre à la mort de Gilles, il faut ajouter avec Idace, savoir:

Le reste du régne de Théodose, qui est, d'années	7
Le régne entier de Marcien, de	3
Et du régne de Majorien jusqu'à l'année de la mort de Gilles	7
Le tout donne l'Epoque de sa mort, qui est l'an	464

Cette Epoque différe déja d'une année de celle du P. Daniel. Mais, quelque juste qu'en soit la démonstration dans son principe, qui peut répondre qu'elle ne soit pas fausse dans ses conséquences? Est-on sûr qu'Idace n'ait point accourci de quelques années les trois régnes qui ont été portés en compte? C'est ce qu'il faut examiner.

Suivant le même Idace, une année avant la mort de Gilles, on comptoit l'an de l'Ere Espagnole

	506
Ajoutons pour l'année de sa mort	1
	507
Retranchons de cette somme pour les années antérieures à l'Ere Chrétienne	38
Il restera l'an	469

Qui

qui fera l'Epoque de la mort de Gilles; ce qui differe beaucoup de l'autre.

Et pour faire voir que c'eſt cette ſeconde date qui eſt la plus juſte, ou du moins la plus conforme à l'intention d'Idace, faiſons une troiſiéme opération par les Olympiades.

Suivant encore le même Idace, la 4ᵉ année de l'Olympiade CCCXI, étoit l'année qui précéda la mort de Gilles. Ces 311 Olympiades complettes étant multipliées par 4, donnent d'années 1244

Ajoutons pour la premiere année de l'Olympiade ſuivante, qui fut celle de ſa mort - - - - 1

1245

Retranchons de cette ſomme pour les années antérieures à l'Ere Chrétienne - - - - - 776

Il reſtera l'an - - - - - 469

qui eſt une Epoque pareille à la précédente. Ainſi voilà ſix ans de plus que le P. Daniel n'en a trouvé dans Idace; & ces ſix ans ajoutés aux cinq ans qu'il avoit trouvés, ne font-ils pas un eſpace de tems beaucoup plus long qu'il ne faut pour les huit ans qu'on donne de durée à la dépoſition de Childeric? On voit donc par-là que, de quelque côté qu'on regarde ſon ſyſteme, on ne le trouve fondé ni en preuves ni en vraiſemblance.

Mais il y a encore quelque choſe de plus à dire ſur Idace. Cet Auteur qui étoit en Eſpagne, n'auroit-il pas, ſur quelque faux rapport, avancé la mort de Gilles? Peut-on croire qu'il ait été toujours aſſez exactement informé de ce qui ſe paſſoit dans les Gaules, pour que ce qu'il en dit ſoit d'une vérité inconteſtable? „Egidius, dit-il, „meurt, les uns diſent ſurpris par des embûches, les autres par du poi„ſon": *Aegidius moritur, alii dicunt inſidiis, alii veneno deceptus.* Ce récit a bien l'air d'avoir été copié d'après un faux bruit répandu en Eſpagne dans le tems qu'Idace l'écrivoit, & il n'en a point été déſabuſé, parce qu'il n'aura plus entendu parler d'Egidius dans les quatre années

nées suivantes, les dernieres de sa Chronique. Ce fut vers ce tems-là qu'Aetius fils du Patrice, (nommé quatre fois Agetius dans Fredegaire) faisoit quelque bruit, aussi bien qu'Eodicius fils de l'Empereur Avitus. Le nom de l'un ou de l'autre approchant de celui d'Egidius, aura pu induire Idace en erreur. Quoi qu'il en soit, il y a preuve qu'en 472, & même (si l'on veut s'en rapporter à la Chronologie de Sigebert) en 475, six années après la prétendue mort d'Egidius ou du Comte Gilles, Childeric le mit en fuite devant Cologne, prit cette ville, & ensuite celle de Treves; d'où il faut inférer qu'il n'est mort que depuis cette année-là; & cela est d'autant plus vrai, que son fils Siagrius, qui succéda à ses emplois dans les Gaules, ne commence à figurer dans l'Histoire qu'en l'année 482. Or si Childeric succéda à Mérovée l'an 458, comme le P. Daniel en convient, & que le Comte Gilles ne soit mort que plus de 17 ans après, peut-il rester le moindre lieu de croire que la mort du Comte Gilles ait dû empêcher le cours des huit années qu'on donne à la déposition de Childeric. Donc l'impossibilité supposée par ce Jésuite est une pure illusion, & conséquemment il y a moins de difficulté à convenir de cette déposition, qu'à vouloir la nier comme il a fait.

Mais autre chose est d'en convenir, & autre chose d'adopter toutes les impertinences & les absurdités dont les Chroniques ont chargé cet événement. Peut-être même n'y auroit-il gueres moins de ridicule à les réfuter sérieusement, qu'il y en a eu à les adopter. Cependant comme il n'y a si mauvais Livres, dit Pline le Jeune, qui n'ayent quelque chose de bon; de même en matiere de faits & de récits, on peut dire avec autant de vérité, qu'il n'y en a point de si fabuleux où il ne se trouve quelque chose de vrai. On peut convenir avec Grégoire de Tours, le seul dont le témoignage mérite d'être réfuté, parce que tous les autres suivans n'ont fait que le copier & l'amplifier; on peut convenir avec lui, que Childeric fut déposé pendant huit ans; qu'il se retira dans la Thuringe; que les François ayant à leur tête Wiomade, se joignirent à l'Armée Romaine commandée

par

par le Comte Gilles; mais que ce ne fut point de leur part à titre de Sujets, ni de la part de celui-ci à titre de Roi, comme le prouve le silence des Historiens de l'Empire; & que dans toutes les autres circonstances du récit il peut y avoir beaucoup de fables jointes à un peu de vérité: c'est ce que je vai tâcher de démêler. Grégoire de Tours écrivoit un siécle après Childeric, & dans un tems où la simplicité étoit égale à l'ignorance, comme on le voit en mille endroits de son Histoire. C'en étoit assez pour lui donner lieu d'adopter des fables qu'on avoit inventées, soit depuis la mort de Childeric, soit du vivant même de ce Roi. D'ailleurs Childeric étoit un Païen dont on croyoit ne pouvoir dire trop de mal, car ces Fables furent inventées dans les Gaules dont les Peuples étoient Chrétiens. On ne sauroit douter néanmoins que Grégoire de Tours n'ait écrit & vécu sous le régne des petits-fils de Clovis. Est-il à penser qu'un homme de qualité & de bon sens ait osé déshonorer ces Princes, non seulement dans la personne de Childeric & de Basine, en les faisant passer pour des gens sans probité, sans mœurs, infideles l'un à son ami, l'autre à son époux, en un mot pour d'infames adulteres; mais ce qui est moins croyable, & plus flétrissant encore pour eux, dans la personne de Clovis même leur grand-pere, sur qui rejaillissoit l'opprobre de cet adultere, dès-là qu'il en avoit été le fruit? Je croirois donc, pour l'honneur de Grégoire, que ce Chapitre XII. de son second Livre, qui est employé tout entier à ce qui regarde les désordres de Childeric, sa déposition, sa retraite en Thuringe, son rappel, la venue de Basine & le reste; que ce Chapitre, dis-je, n'est pas tel qu'il est sorti des mains de l'Auteur, & qu'on l'aura interpolé dans tout ce qu'on y trouve de révoltant; à moins que le laissant sur le compte de Grégoire, on ne veuille l'imputer à sa crédulité, à son mauvais goût & à l'imbécillité de son siécle. Je ne m'arrêterai qu'à ce qu'il dit de ce Roi de Thuringe & de sa femme, chez qui Childeric se retira; parce que cette seule circonstance suffira, comme je l'espere, pour me conduire à la découverte de la vérité. Ce Roi, dit-on, s'appelloit *Bisin* ou *Basin*: car ces noms reviennent visiblement au même; aussi le dernier est-il substitué à l'autre dans divers

Manuscrits & chez tous nos Historiens modernes : ce Roi donc s'appelloit *Basin*, & l'on donne en même tems à sa femme le nom de *Basine*. Voilà peut-être la circonstance du monde la plus étrange. Où a-t-on vu jamais dans aucun tems, dans aucun pays, qu'une femme ait pris pour nom propre celui de son mari ? Faramond eut pour femmes vraies ou supposées, Imbergide & Argotte, Clodion eut Babine, Mérovée eut Verica, Childeric lui-même eut Basine ; & il en a été constamment de même partout ailleurs. Qui ne voit donc que cette Basine, entant que femme du Roi de Thuringe, est un faux personnage ? Cependant je ne saurois me persuader que ce nom de Basine ait été chimérique, puisqu'il fut celui d'une femme qui vint trouver Childeric, qui fut son épouse & la mere de Clovis, enfin qui vécut & mourut en France. Mais, si cette femme ne pouvoit pas être celle de Basin, par la raison qu'elle avoit le même nom que lui, n'est-il pas évident qu'elle n'étoit autre que la propre fille de Basin, appellée Basine parce qu'elle portoit le nom de son pere ? En effet, que Childeric retiré chez ce Roi y ait vu Basine sa fille, qu'il ait pris du goût pour elle, qu'il l'ait demandée en mariage, & que cette Princesse ne soit venue le joindre qu'après qu'il fut rétabli dans son Royaume ; tout cela est dans l'ordre, & il n'y a rien là que de très-vraisemblable. Mais il est aussi très-apparent que, comme le Royaume de Childeric ne s'étendoit pas encore fort avant dans les Gaules, il étoit facile d'y inventer des Fables, soit sur son compte, soit sur celui de Basine ; de les y répandre & de les faire croire, parce qu'on étoit très-peu à portée de les vérifier. Et d'un autre côté, Basine arrivant au moment peut-être qu'on ne s'y attendoit point, venant trouver un Roi qu'on accusoit de galanterie, en un mot portant le même nom que Basin Roi de Thuringe, a pu elle-même par-là donner lieu au Peuple, à ce Peuple partout sot & méchant, de la prendre pour la femme de ce Roi, de la regarder comme une avanturiere qui avoit quitté son mari, & de faire là-dessus tous les mauvais Contes que les Chroniqueurs ont ensuite répétés de siécle en siécle.

Ayant

Ayant tiré du milieu de tant de Fables cette lueur de vérité, je vai la faire paroître dans tout son jour. On croit sur le témoignage de Sigebert, que Childeric revint de Thuringe en l'année 469. Mézerai dit en 468, & je veux bien y souscrire encore. Mais Clovis étoit né deux ans auparavant, en 466. La preuve en est facile à donner. Grégoire de Tours, à la fin de son second Livre, dit que Clovis agé de 45 ans mourut 112 ans après St. Martin Evêque de Tours. La Chronique de Prosper d'Aquitaine rapporte la mort de St. Martin à la cinquiéme année de l'Empire d'Arcadius & d'Honorius, à compter de la mort du grand Théodose leur pere; & ajoute que la 8e année, c'est à dire trois ans après St. Martin, il y eut une Eclipse de Soleil: *Solis facta defectio.* La Chronique d'Idace confirme cette Eclipse sous la même année des deux Empereurs: *Solis facta defectio tertio Idus Novembris, feria secunda:* ce qui revient à un Mardi 11 de Novembre. Reste à trouver l'année. Calvisius, quoique très-exact dans son Ouvrage Chronologique à calculer & marquer les Eclipses annoncées par les Historiens, ne fait point mention de celle-ci. Il observe seulement que l'année 401 de notre Ere vulgaire étoit la septiéme d'Arcadius & d'Honorius: ainsi la 8e qui fut celle de l'Eclipse, doit avoir été l'an 402. En effet, M. Euler le fils notre très-digne Confrere, ayant pris la peine de la calculer, a trouvé qu'elle arriva cette année-là à Bordeaux en France le 11e Novembre; son commencement à $6^h, 34', 51''$ du matin; sa fin à $8^h, 45', 59''$; sa grandeur 10 doigts 32 minutes.

Trois ans donc avant cette Epoque mourut St. Martin, ce qui fut l'an	399
A quoi ajoutant les années écoulées ensuite jusqu'à la mort de Clovis, qui sont	112
Le tout ensemble fait	511

qui est l'année de la mort de Clovis, & c'est aussi de quoi conviennent tous les Historiens.

Or

Or retranchant de cette somme les années que Clovis avoit lorsqu'il mourut, il restera 466 qui est l'année de la Naissance de Clovis, ainsi que je l'avois avancé plus haut.

Fondé sur cette preuve incontestable, je prétends que Clovis étant né l'an 466, & n'ayant pû naître ailleurs qu'en Thuringe, où Childeric son pere résidoit, & d'où il ne sortit pour remonter sur le Trône, que plusieurs années après cette Naissance, comme on l'a vû plus haut; Par conséquent Clovis n'est point né en France d'une Basine avanturiere, qui y vint, à ce qu'on dit, trouver Childeric depuis son rétablissement, comme tous les Historiens l'ont faussement & ridiculement dit. Mais Clovis étant né dans la Thuringe, est-il croyable que sa mere ait été la femme de Basin vivant encore avec son mari? N'est-il pas évident? Car de deux choses l'une: ou Basin ignoroit le prétendu commerce qu'il y avoit entre sa femme & Childeric, ou il le savoit. Au premier cas Clovis n'auroit point passé pour le fils de Childeric, mais pour celui de Basin; ou bien il falloit que ce mari [illegible], mais [illegible] le prétendu commerce, pour donner lieu à Childeric de reconnoître Clovis pour son fils. Mais y a-t-il la moindre vraisemblance à cela? N'est-il pas plus probable au contraire, que Basin irrité de l'ingratitude de Childeric, indigné de sa perfidie, outré de l'infidélité de sa femme, sensible enfin à son honneur comme tout homme d'honneur peut l'être à un tel outrage, se seroit porté aux plus grandes violences & contre elle & contre lui? Le moins qui en pouvoit arriver à Childeric, étoit d'être obligé de sortir de la Thuringe; & l'on voit au contraire qu'il reste encore tranquillement plusieurs années après la naissance de Clovis. N'est-ce pas une preuve manifeste que la mere de Clovis ne fut point la femme de Basin? D'ailleurs cette mere de Clovis, comme j'ai déja dit, avoit le nom de Basine sous lequel elle fut ensuite connue en France; & cela ne convient point encore à la femme de Basin, qui ayant un nom différent de celui de son mari au-

roit

roit été connue en France sous ce nom différent, & n'y auroit point eu celui de Basine. Il est donc évident par toutes ces raisons, que Basine, qui fut mere de Clovis à la Cour de Thuringe, n'étoit autre que la fille du Roi Basin, que Childeric n'avoit pas seulement demandée en mariage, comme je l'ai d'abord supposé, mais qu'il avoit épousée en ce pays-là: je dis épousée; car il étoit aussi libre de le faire alors qu'on avoue qu'il le fut depuis, lorsqu'elle vint, dit-on, se trouver en France pour se donner à lui, & qu'il l'épousa. Et la preuve de leur mariage réel à la Cour de Thuringe, est ce même séjour qu'elle & lui continuerent d'y faire paisiblement après la naissance de Clovis; puisqu'il est à croire pour l'honneur du Roi & de la Reine de Thuringe, que si Childeric avoit eu assez d'ingratitude & de brutalité pour débaucher leur fille, c'eût été encore pour lui le cas d'être obligé de quitter la Cour & les Etats du Roi Basin, ni plus ni moins que s'il eût eu commerce avec sa femme. Il ne faut donc pas s'étonner si Grégoire de Tours & les autres anciennes Chroniques disent que Childeric étoit non seulement chez le Roi, mais aussi chez la Reine de Thuringe; termes indécens à l'égard d'un Prince réfugié, mais très-convenables dès-là que ce Prince étoit leur gendre. Il ne faut pas s'étonner non plus si Childeric passa si tranquillement les huit années de son séjour en Thuringe, puisqu'il vivoit auprès de son beau-pere, de sa belle-mere & de son épouse, avec qui il ne pouvoit pas manquer de se plaire & d'oublier ses chagrins. Enfin, il n'est pas étonnant aussi que Basine mariée à Childeric ait eu un enfant de lui dans la maison de Basin, Roi de Thuringe, son pere. Et c'est-là ce qui fait voir que dans les traditions les plus fabuleuses il y a toujours quelque chose de vrai; puisqu'on avoit raison de dire, que Basine qui vint joindre Childeric en France, étoit la même que celle avec laquelle il avoit eu commerce en Thuringe. Mais cela montre en même tems qu'on avoit tort de la prendre pour la femme du Roi Basin, puisque portant le nom de Basine elle ne pouvoit être que sa fille.

Pendant tout le reste du régne de Childeric, on ne voit point dans l'Histoire qu'il ait eu rien à démêler avec Basin. Est-il à penser que

que celui-ci, après l'odieux procédé de Childeric, ne lui eût pas fait la guerre? Les Rois en font pour des intérêts plus legers. Qu'auroient dit les François eux-mêmes en le voyant trahir si lâchement son ami, son hôte, son bienfaiteur? Ne l'auroient-ils pas abandonné à tous les périls d'une guerre si justement méritée? Eux que ses prétendues galanteries avoient irrités au point de le détrôner, & de vouloir le tuer, quel mépris n'auroient-ils pas eu pour lui? Quel éclat n'auroient-ils pas fait pour empêcher son mariage avec une femme perdue d'honneur? Mais tout cela n'arriva point, parce que Childeric fut le gendre du Roi & de la Reine de Thuringe, & qu'il ne fut ni l'amant ni le mari de cette Reine. Il ne pouvoit donc régner entre Basin & lui qu'une parfaite intelligence, qui n'est pas toujours à la vérité le fruit de l'alliance de deux familles; mais du moins le silence de l'Histoire fait présumer qu'elle subsista aussi longtems que Childeric & Basin vécurent.

Il n'en fut pas de même de Clovis. L'an 491, il porta la guerre dans la Thuringe, en subjugua une partie, & se la rendit tributaire. Nul Historien ancien ni moderne n'a deviné quels pouvoient être ses droits sur ce pays-là. S'il n'en eût eu d'autres que ceux que lui auroit apportés sa mere, femme de Basin, fugitive & adultere; je doute fort qu'il eût été dans la peine de les faire valoir. Mais il étoit petit-fils de Basin; & soit qu'en cette qualité il se regardât comme son héritier au défaut d'enfans mâles; soit que ces enfans mâles ses cohéritiers ne lui eussent pas voulu faire part de la succession de son grand-pere; il est probable qu'il fit cette guerre pour soutenir ses justes droits dans l'un ou dans l'autre cas. Ainsi, loin qu'il reste la moindre tache sur la naissance de Clovis, toutes ces circonstances se réunissent, toutes s'accordent à prouver sa légitimité.

Mais venons à quelque chose de plus décisif. J'avois achevé depuis longtems ce Mémoire, lorsque par une rencontre aussi heureuse qu'imprévue, j'ai trouvé dans une Chronique qui passe pour avoir été écrite un peu avant le milieu du XIIe siécle, la preuve ou la confirmation

mation d'une vérité que je n'avois pû établir que par des raisons, mais raisons que je croyois suffisantes. Cette Chronique est celle de St. Maixant, ou de Maillezais en Poitou, ayant pour titre: *S^ti Maxentii in Pictonibus Chronicon quod vulgo dicitur Malleacense.* Elle finit à l'an 1134, & rapporte ce qui suit:

Meroveo autem Rege Francorum defuncto, Childericus filius ejus solio sublimatur regio. Initio regni sui odibilis extitit Francis. Expulsus ab eis diu exulatus est apud Bissinum, Thoringorum Regem; unde reversus restitutusque in regno consilio Guinomadi Ducis. Bissina filia Bissini Regis abjecta eo a Childerico in matrimonium assumpta est, ex qua habuit filium nomine Clodoveum, qui sicut ætate, ita et morum crescebat probitate. Interea Childericus Rex cum per viginti quatuor annorum curricula Francorum strenue gubernasset regnum, ex hac vita discessit. Huic hæreditario jure successit Clodoveus virtutibus bellicis strenuus, &c. C'est à dire pour ceux qui n'entendent pas le Latin:

„Mérovée Roi de France étant mort, Childeric son fils est élevé sur le Trône Royal. Au commencement de son régne, il se rendit odieux aux François. Rejetté par eux, il fut longtems en exil chez Bissin Roi de Thuringe, d'où il revint, & fut rétabli dans le Royaume par le conseil du Duc Guinomade. *Bissine, fille du Roi Bissin fut prise en mariage par Childeric qui étoit là relegué.* Il eut d'elle un fils nommé Clovis, qui croissoit de jour en jour en bonnes mœurs comme en âge. Cependant le Roi Childeric, après avoir gouverné dignement le Royaume des François durant le cours de 24 ans, sortit de cette vie. Clovis qui possédoit les vertus guerrieres, lui succéda de droit héréditaire, &c.

Ce récit est trop clair pour avoir besoin d'explication. Mais je ne saurois me dispenser à cette occasion de faire quelques remarques.

Premiérement, *sur l'autorité de la Chronique, qui me fournit ce Passage.* Quoiqu'elle finisse à l'an 1134, & qu'elle paroisse avoir

 été

été écrite six ans après en 1140, si l'on fait attention à la maniere intéressante dont l'Auteur parle de l'enfance de Clovis, *qui et aetate in dies sic etiam morum crescebat probitate*, on croira sans peine qu'il écrivoit en ce tems-là, ou peu après sous son régne. Auquel cas sa Chronique aura pu être continuée par des Ecrivains plus modernes, comme cela est arrivé à l'égard de quantité d'autres Chroniques, même de celles qui ne sont pas anonymes; & c'est par cette raison qu'on a souvent tant de peine à fixer le tems où les Auteurs de ces Chroniques ont vêcu, lorsqu'ils n'y ont mis aucun fait qui ait rapport à eux ou auquel ils ayent eu part. Et cela est d'autant plus vraisemblable à l'égard de celle dont il s'agit, qu'ayant deux titres différens, celui de Maillezais & celui de St. Maixant, ils ne lui ont sans doute été donnés, que parce qu'elle fut commencée dans l'un de ces deux endroits & continuée dans l'autre. Ainsi je croirois pouvoir inférer de là que le passage en question mérite toute créance, comme venant d'un Auteur instruit qui, n'ayant point copié les fables de Grégoire de Tours, doit avoir été plus ancien que lui, & probablement contemporain de Clovis, comme le fait juger l'exactitude & la verité de son récit par rapport à Childeric & à Bissine. En effet, examinant de plus près cette Chronique, je reconnois qu'elle est une collection de plusieurs Chroniques ou Histoires faites par différens auteurs. Le premier, dont l'ouvrage finit à la mort de Pépin le Bref l'an 768, n'indique les faits que par les années des régnes, quoique l'Ere Chrétienne fût pour lors inventée, car elle l'a été dès l'an 527. Le second s'est servi de cette Ere dans sa continuation depuis l'an 769 jusqu'en 1099, & a marqué les années en chiffres Romains. Le troisiéme, qui va depuis l'an 1100 jusqu'en 1134, les a écrites non en chiffres, mais tout au long. Après quoi viennent quelques additions dans lesquelles on trouve les années 1251, 1270, 1294, 1307, 1317, 1320. De là il résulte que la premiere partie, où se trouve le passage que j'ai cité, est tout au moins d'un Ecrivain du milieu du VIII[e] siècle. Mais il y a toute apparence qu'il avoit tiré ce passage d'un auteur plus ancien, qui nous manque comme bien d'autres, & qui, comme je l'ai déja dit, pouvoit avoir été con-

tant le même nom que son pere: & c'est ce que la Chronique marque aussi précisément: *Bissina filia Bissini Regis.*

Je jugeois d'ailleurs, par le tems qu'avoit duré l'exil de Childeric & par celui de la naissance de Clovis calculé sur les années de sa vie, que celui-ci ayant dû naître dans la Thuringe, son pere y avoit épousé Basine, *épouse*, disois-je, *véritablement pendant cet exil & avant son retour en France.* Et cette derniere circonstance est encore rapportée dans la Chronique, de maniere à ne laisser aucun lieu d'en douter: *abjecto eo à Childerico in matrimonium assumpta est.*

Enfin cette Chronique ne laisseroit rien à desirer s'il y étoit dit que Clovis est né dans la Thuringe, ce qui devient néanmoins une suite naturelle & une circonstance plausible, dès-là que Childeric, pendant son exil, s'y maria avec Basine. Mais voici un Auteur qui me fournira ce témoignage. C'est un ancien Historien des Francs, aussi fabuleux, si l'on veut, que Grégoire de Tours & les autres dont j'ai fait voir les mensonges ridicules & absurdes au sujet de Childeric & de Basine; mais malgré ces fables aussi croyable qu'eux dans des choses qui ne sont point contraires à la vraisemblance, & qui deviennent même indubitables lorsqu'elles s'accordent avec les principes que j'ai établis. L'historien dont je veux parler, est un nommé Hunibald à qui des Critiques trop prévenus n'ont pas rendu assez de justice, comme je le ferai voir ailleurs. Malheureusement nous ne connoissons ses Ouvrages que par l'Abrégé que l'Abbé Tritheme assure en avoir fait, & que Marquard Freher a fait imprimer au premier Volume des Oeuvres de cet Abbé page 63, sous le titre: *De origine gentis Francorum compendium Joannis Trittenhemii abbatis, ex duodecim ultimis Hunibaldi Libris, quorum sex primos Wasthaldus conscripsit, ab introitu Sicambrorum ad partes Rheni in Germaniam.* Or l'on trouve dans cet Abrégé à la page 86, ce Passage remarquable, non par les faussetés qu'il rapporte comme tous les autres Historiens, mais par une circonstance qui leur a échappé à tous. Il y est dit en parlant de Clovis: „Sa mere „fut Basine, femme légitime de Basin Roi des Thuringiens; il nâquit dans „l'adul-

„l'adultere. Car Hilderic Roi des François fuyant en Thuringe & de„meurant pendant huit ans chez le Roi Basin son parent consanguin, eut „des privautés secretes avec sa femme Basine, qui en conçut & mit au „monde un fils savoir le susdit Clovis, la seconde année de sa fuite, (c'est „à dire de celle de Childeric) qui fut l'an de J. C. 469, dans la septié„me Indiction des Romains. Ensuite, la 8e année de sa fuite, il re„tourna dans la Gaule; *Basine le suivant avec son fils*, le vint trou„ver l'an 476, *l'enfant ayant déja sept ans.* Le Roi Hilderic vê„cut encore 8 ans, & mourut." Voici les propres termes du Texte: *Nomen matris eius Basina, uxor legitima Basini Regis Thoringorum, ipse in adulterio natus. Hildericus enim rex Francorum, in Thuringiam fugiens & apud Basinum regem consanguineum suum hospitatus annis octo cum uxore ejus Basina secretos habuit concubinatus, quæ ab eo concepit, & peperit filium prædictum Clodoveum, anno fugæ ejus secundo qui fuit Dominicæ nativitatis CCCCLXIX. Indictione Romanorum septima. Postea vero anno fugæ suæ octavo in Galliam reversus est, quem Basina cum filio secuta, ad eum venit, anno Domini CCCCLXXVI cum puero jam septenni; super vixit Hildericus rex annis octo, & mortuus est.*

Je ne répéterai point ce que j'ai dit assez au long dans ma Dissertation pour réfuter ce qu'il y a de fabuleux dans ce récit. Mais j'ajoute, que plus il est absurde que Basine femme de Basin Roi de Thuringe vivant publiquement avec lui & dans sa maison, y ait accouché, que dis-je? y ait élevé pendant sept ans un fils qu'elle avoit eu de Childeric; plus cette absurdité même prouve que cette Basine étoit non la femme, mais la fille de Basin, que Childeric avoit épousée pendant son exil en ce pays-là, comme le dit la Chronique rapportée plus haut.

Il me reste à tirer du Passage ci-dessus les époques qui y sont marquées pour les joindre à celles qui m'ont servi dans ma Dissertation à réfuter le P. Daniel. Leur justesse fera connoître l'exactitude de l'Historien, & donnera lieu de soupçonner, non sans beaucoup d'apparence, que les fables qu'on trouve dans son Histoire, soit par rapport

[illegible] Childeric & à Basine, soit sur d'autres sujets, comme je le montrerai dans un autre Mémoire, y ont été ajoutées par quelque misérable interpolateur.

Il y a dans ce Passage, comme dans tout l'Abrégé d'Hunibald, deux ordres chronologiques qu'il ne faut pas confondre. L'un indique les faits par les années des régnes, & c'est celui de l'Historien qu'il devoit suivre dans un tems où l'Ere Chrétienne n'étoit point encore en usage. L'autre ajoute aux faits les années de cette Ere prise à la naissance de J. C. & c'est celui de l'Abbé Tritheme l'abbréviateur, qui dans sa supputation s'est trompé de trois ans depuis la mort de Mérovée qu'il fixe à l'an 461, au lieu de 458, jusqu'à celle de Clovis, qu'il rapporte à l'an 514, au lieu de 511, comme on le voit dans la Table suivante.

Années de J. C. suivant Trithême.		Années de J. C. suivant le calcul exact.
461	Mérovée meurt la 10e année de son régne, & Childeric lui succéde.	458
467	Childeric est déposé la 6e année de son régne	464
469	Clovis naît en Thuringe la 2e année de l'exil de son pere	466
475	Childeric retourne en France la 8e année de sa déposition	472
475	La même année Childeric met en fuite le Comte Gilles devant Cologne, ce qui fait voir que le Comte ne mourut point en 465, comme le prétend le P. Daniel, non plus qu'en 464 & 469, suivant Idace.	472
476	Basine vient de Thuringe en France avec son fils Clovis âgé de 7 ans.	473
477	Childeric rend la Suabe tributaire	474
478	Childeric bat Odoacar ou Odoacer, reprend sur lui la ville d'Angers, & tue le Comte Paul.	475
484	Childeric meurt la 9e année de son rétablissement, & Clovis lui succéde âgé de 15 ans.	481
485	Clovis met en fuite Siagrius fils du Comte Gilles, reprend sur lui Soissons, ensuite Reims & autres villes.	482

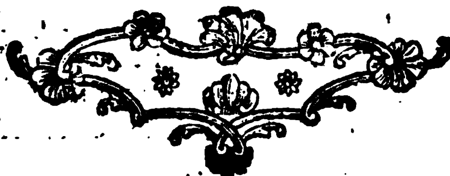
Années de J. C. suivant Tritheme.		Années de J. C. suivant le calcul exact.
494	Clovis porte la guerre en Thuringe & la rend tributaire la 10e année de son régne.	491
495	Clovis défait Alaric devant Poitiers, & prend cette ville la 11e année de son régne.	492
499	Clovis gagne une bataille (à Tolbiac) contre les Allemans de la Suabe.	496
499	La même année il se fait Chrétien	496
501	Clovis fait la guerre à Gondebald Roi de Bourgogne	498
514	Clovis meurt âgé de 45 ans, la 30e année de son régne, ce qui est conforme au calcul que j'ai tiré de la 112e année après la mort de St. Martin dans ma Dissertation.	511

J'ai parlé dans cette Table de la guerre que Clovis porta en Thuringe l'an 491, & je trouve dans l'Abrégé de Tritheme, page 85, que la cause de cette guerre fut, que Basine jadis femme de Basin, allant en France pour s'abandonner à Childeric, avoit emporté avec elle divers joyaux d'or, d'argent & de perles, que le fils du Roi Basin redemanda & ne put obtenir, surquoi il déclara la guerre à Clovis: *Causa belli fuit, quod Basina quondam uxor Basini vadens in Galliam ad Hildericum, ut paulo prius dictum est, plura clenodia* (*) *in auro, argento & margaritis, secum abstulerat, quæ repetens regis Basini filius, cum non impetrasset, bellum Clodoveo denunciavit.* Après avoir fait passer Basine femme de Basin pour une prostituée, il ne manquoit plus que d'en faire une voleuse, reproche pourtant qui ne lui a été fait par aucun des Ecrivains qui ont le moins ménagé cette Reine plus de 300 ans après Clovis, & qu'à plus forte raison n'auroit point écrit Hunibald vivant sous son régne; ce qui prouve que son Histoire a été interpolée avant Tritheme, ou que celui-ci en l'abrégeant a compilé d'autres Auteurs dont il a cousu les récits à ceux d'Hunibald. Mais, dès que Basine ne fut point la femme & fut la fille de Basin,

(*) *Cleinodia appellantur, quasi Kleinnot, quia exiguæ necessitatis & parvi usus sunt.* Petri Lambecii *Comm. de Biblioth. Cæs.* Lib. 2. c. 5. p. 180.

fin, mariée à Childeric dans la Thuringe, il est inutile de s'amuser à réfuter une accusation si frivole, & d'autant plus mal imaginée, que ce ne fut point le fils de Basin qui vint attaquer Clovis, mais que ce fut Clovis au contraire qui alla en Thuringe, non sans doute pour y reporter le prétendu vol de sa mere, mais pour revendiquer la part qui lui revenoit de la succession de son grand-pere. En effet il ne conquit pas toute la Thuringe: il se contenta d'une partie. Mais c'est cette partie même qui, jointe à la facilité avec laquelle il la soumit, prouve qu'il y avoit des droits incontestables.

Ainsi, persistant dans mes conclusions précédentes, je demande à tout esprit raisonnable & impartial, si ce que des Historiens, mal instruits & dépourvus de jugement, ont dit de Basine, de Childeric, & de la naissance de Clovis, a été autre chose qu'un tissu grossier de fables & de calomnies, qui, après être sorties d'une source aussi impure qu'est la méchanceté d'une vile populace, se sont accréditées par le malheureux penchant qu'ont tous les hommes à saisir le mensonge avec avidité, & à croire le mal plutôt que le bien.



ELOGE
DE MR. HUMBERT. (*)

ABRAHAM HUMBERT, Major des Armées de S. M. Membre de l'Académie Royale des Sciences, & du Conseil François, nâquit à Berlin en Avril, 1689. Sa famille originaire de Lorraine s'étoit réfugiée à Metz pour cause de Religion. La même cause l'en fit sortir à la révocation de l'Edit de Nantes; & elle vint s'établir à Berlin, où elle n'étoit arrivée que depuis fort peu de tems, lorsque notre Académicien vint au monde.

Il montra de bonne heure des dispositions qui engagerent à le destiner tout à la fois aux études & aux armes. Il s'appliqua en particulier aux Mathématiques, & eut l'avantage de trouver un fort bon guide en la personne de Mr. *Philippe Naudé* le pere.

En 1708, il alla en Flandres, & entra dans une Compagnie de Cadets au service de Hollande. Il fit en cette qualité une campagne, dans un tems où elles étoient fort instructives. Mais, avant que de prendre des engagemens militaires plus étroits, il se crut obligé de revenir encore à Berlin, pour achever de se perfectionner dans les Sciences qu'exige le métier de la Guerre.

Il se détermina ensuite pour le service de Saxe, & y fut reçu en 1711, en qualité d'Enseigne dans le Régiment de Dragons de Weissenfels. Les Troupes Saxonnes servirent en Poméranie, & il y eut diverses actions auxquelles Mr. *Humbert* se trouva, & paya de sa personne. Il pensa être arrêté dès l'entrée de sa carriere à Gadebusch, le 20 Décembre de la même année, où il eut un cheval tué sous lui, fut fait

(*) Lu dans l'Assemblée publique du 28 Janvier 1762.

fait prisonnier, & conduit à Wismar. Cet accident lui fut plus avantageux que nuisible. Le tems de sa détention devint pour lui un tems d'étude & d'application; il traça entr'autres choses avec beaucoup d'exactitude une Carte de l'Ile d'Usedom, pour la présenter à son Général, le Prince de Weissenfels, qui lui en sut fort bon gré. Après qu'il eut été échangé, il suivit son Régiment en Pologne & en Lithuanie, & se trouva encore à la Bataille de Sendomir.

Après sept ans de service, Mr. *Humbert* devenu Lieutenant, demanda son congé, pour venir consacrer ce qu'il avoit acquis d'expérience & de capacité, au Souverain dont les Etats étoient devenus l'asyle de sa famille & sa patrie. Il trouva aussi-tôt de l'emploi, & fut aggrégé au Corps des Ingénieurs en qualité de Capitaine, en 1719. Cet état lui convenoit parfaitement; il se trouvoit dans son élément, rien n'étant plus de son goût que la fortification avec toutes ses dépendances. Son talent dans ce genre ayant été reconnu lui valut la commission honorable de diriger d'abord les travaux de Memmel, & ensuite ceux de Stettin, où il eut ordre de se rendre en 1731.

Ce nouveau séjour fait une nouvelle époque dans sa vie. Mr. *Humbert* n'avoit travaillé jusqu'alors qu'à s'instruire; il se crut en état d'instruire le public, & de joindre à la qualité de bon Officier celle d'Auteur utile. Les liaisons d'amitié qu'il contracta avec feu Mr. *de Mauclerc*, Prédicateur de la Cour à Stettin, le mirent sur cette voie. Ce Savant travailloit alors à la Bibliotheque Germanique, & il invita Mr. *Humbert* à fournir des morceaux propres à entrer dans ce Journal. Comme celui-ci avoit plus manié l'épée, ou le compas, que la plume, ses premiers essais étoient un peu informes, & surtout d'un stile si négligé, qu'ils n'auroient peut-être pas été de mise, sans les revisions de Mr. *de Mauclerc*. Mais Mr. *Humbert* avoit trop de bon sens pour n'être pas reconnoissant de cet office; & plusieurs années après, il pensoit encore de même, comme j'en ai fait l'expérience, m'étant trouvé avec lui dans des rélations semblables après la mort de Mr. *de Mauclerc*. Les Pieces, presque toutes en forme de Lettres, qu'il a don-

nées dans la Bibliotheque Germanique, dans le Journal de Berlin que j'entrepris en 1740, par ordre de S. M. & dans d'autres Ecrits périodiques qui lui ont succédé, roulent principalement sur la Géographie, que Mr. *Humbert* n'aimoit pas moins que la Fortification, si tant est même qu'elle ne fût pas l'objet de sa prédilection. Il avoit fait de fort belles collections dans ce genre, & pouvoit passer pour bon connoisseur en fait de Cartes.

Ces petits Ecrits furent une espece d'apprentissage qui le disposerent à composer de plus grands Ouvrages, des Traités en forme. Il en donna un sur les Sieges en 1747, pour servir de supplément à l'attaque & à la défense des places de Mr. le Maréchal *de Vauban*. Ce qui l'engagea sans doute à ce travail, ce fut la Traduction qu'il venoit d'exécuter du grand Ouvrage de *Vauban*. Elle fut imprimée en 1744, en 2 Volumes in 4. à l'usage de l'Armée Prussienne. En 1750, il fit un Livre sur le Nivellement; en 1751, il écrivit sur l'origine & le progrès de la Gravure par les Estampes, & en 1755, il publia le premier Tome de son Art du Génie; ouvrage que la décadence de ses forces ne lui a pas permis de pousser plus loin. Revenons aux détails de sa vie.

En 1737, il devint Major, & fut placé à Custrin, où il demeura jusqu'à la mort du Roi défunt. Quinze jours après cette mort, le nouveau Monarque l'appella à Berlin, & l'honora d'une distinction bien flatteuse, en le chargeant d'enseigner les Mathématiques aux deux plus jeunes des Princes ses freres. La bienveillance dont LL. AA. RR. l'ont honoré jusqu'à sa fin prouve qu'ils avoient été contens de ses instructions.

Le Conseil François qui fut formé, ou plûtôt renouvellé bientôt après, crut ne pouvoir se passer des lumieres de Mr. *Humbert*, principalement dans ce qui concernoit les Arts & les Mêtiers; & il eut une place dans ce Corps. L'Académie fit la même acquisition dès son Renouvellement.

Les

Les années se sont écoulées depuis ce tems-là sans apporter d'autre changement à la situation de Mr. *Humbert*, que celle qui est un effet de la vieillesse. Il a vêcu au milieu de nous, s'occupant de ses objets favoris, tant que ses forces le lui ont permis. Depuis quelques années, les traces d'un appésantissement, causé autant par sa complexion que par son âge, étoient fort sensibles. Il a pourtant fréquenté nos Assemblées presque jusqu'à sa fin. Une maladie de quelques jours pendant laquelle il a conservé toute sa présence d'esprit, & a témoigné toutes les dispositions convenables à son état, l'a conduit au terme de sa carriere, le 12 de Janvier, 1761.

On a vu par tout ce que nous avons dit que Mr. *Humbert* étoit studieux & laborieux. Il joignoit à ces qualités celles qui pouvoient le faire estimer & aimer dans la société. Il étoit obligeant & officieux. Ses talens & ses services sembloient devoir le conduire plus loin du côté de la fortune; mais les circonstances font souvent naître des obstacles qui mettent la prudence humaine en défaut, ou qui demanderoient un degré de prudence qu'on n'acquiert pas avec le sçavoir.

Mr. *Humbert* avoit épousé, en 1709, *Amélie Jeanne Baltzer*, dont le pere, Prédicateur de la Cour à Mittau en Courlande, & appellé ensuite à Memmel, étoit d'une famille patricienne de Brême. Cette Dame a survêcu à son Epoux, dont elle avoit eu trois enfans, un fils mort à Custrin à l'âge de 6 ans, un autre qui est actuellement Capitaine de Grenadiers dans le Régiment de S. A. R. Monseigneur le Prince de Prusse, & une fille aussi vivante.

ELO-

ELOGE
DE MR. JACOBI. (*)

Un grand Poëte a dit qu'il ne falloit point mesurer au nombre des années la trame des Héros. Cela est vrai de celle de tous les hommes; il y en a qui vivent peu en fournissant une longue carriere, & d'autres qui vivent beaucoup en finissant la leur presque dès l'entrée. On voit des génies actifs qui se développent de bonne heure, & qui mettent tous les momens à profit. Tel étoit l'estimable Académicien dont nous allons vous entretenir. N'ayant pu recouvrer plutôt les matériaux nécessaires pour son Eloge, nous compenserons ce retardement par des détails dont le principal but sera de fournir un modele aux jeunes Officiers, & de leur montrer quelles sont les voies par où l'on parvient à l'estime & à la considération; avantages plus précieux que les honneurs supremes, sur lesquels la naissance & d'autres causes fortuites ont toujours quelque influence, au lieu qu'un vrai mérite ne sauroit jamais être contesté à celui qui le possede.

FRÉDERIC PAUL JACOBI, Lieutenant d'Artillerie, & Membre de l'Académie Royale des Sciences, nâquit le 8. Mai 1724. à Tucheband, Village de la Nouvelle Marche, dont son pere *Adam Fréderic Jacobi* desservoit alors l'Eglise en qualité d'Adjoint du grand-pere, après la mort duquel il eut cette cure & celle de Fridersdorf. Ce pere, qui survit actuellement à son fils, avoit épousé *Sophie Madelaine Meyer*, fille unique de feu Mr. *Jean Ludolf Meyer*, Licentié en Droit, Avocat

(*) Lu dans l'Assemblée publique du 3 Juin, 1762.

Avocat à Hanover, Assesseur de la Justice à Hildesheim, & Conseiller de Régence du Comte de la Lippe-Bückenbourg.

Notre Académicien fut le premier fruit de ce mariage; & au bout d'un an, il eut un frere cadet nommé *Auguste Jean*. Le grand-pere qui étoit un homme éclairé, s'occupoit à instruire ses deux petits fils, qu'on destinoit à l'état ecclésiastique. Il leur enseigna les principes des Langues Greque & Latine, l'Histoire & la Géographie, & y joignit les premieres notions de la Théologie: le pere de son côté secondoit ces soins, & initia ses fils dans la langue Hébraïque. Que de semblables éducations sont précieuses! Qu'il est beau de voir deux générations s'associer pour en former une troisieme! C'est le moyen de démentir le mot d'Horace, & de produire des petits-fils qui valent mieux encore que leurs peres & leurs ayeux.

Peu s'en falut que l'ainé des jeunes Jacobi ne fût moissonné dès sa plus tendre fleur. Deux chûtes extrémement dangereuses le conduisirent aux portes du trépas. Attribuerai-je sa guérison à l'Esculape qui le traita? Ce fut le Berger du Village.

Après que ces éleves eurent fait tous les progrès auxquels pouvoient les conduire leurs études domestiques, on les envoya au College de Custrin, dirigé alors par le Recteur *Helmereichs*. Ce Recteur poussa l'ainé dans la connoissance de l'Hébreu, parce que sa vocation pour la Théologie paroissoit décidée; & bientôt le Texte original de l'ancien Testament lui fut aussi familier que sa langue maternelle. Je soupçonne cependant que le jeune Jacobi avoit déjà d'autres vues; & nous ne tarderons pas à en appercevoir des indices.

Ce fut à l'Université qu'ils se manifesterent. Il se rendit à celle de Francfort, à l'âge de 17 ans: & quoiqu'il s'y présentât d'abord sur le pied d'Etudiant en Théologie, & qu'en cette qualité il assistât aux

 leçons

leçons des Professeurs de cette Faculté, il prit un goût plus marqué à celles de Philosophie de Mr. *Baumgarten*, l'un des hommes du monde le plus propre à captiver l'esprit & le cœur de ceux qui l'écoutent (*), & il montra beaucoup d'application pour celles de Mathématique de Mrs. *Polack* & *Curtz*. L'Officier, l'Ingénieur, étoit encore caché sous l'écorce du Théologien; il n'osoit se montrer, si je puis ainsi dire, mais il se formoit en secret avec le succès que ne manquent gueres d'avoir les entreprises fondées sur un penchant naturel, surtout lorsqu'il est combattu.

Mr. *Jacobi* le pere rappella son fils pour l'examiner; il n'y eut que le Théologien qui se montra, & l'on en fut très satisfait. Le pere fit même prêcher le fils, & lui trouva de très heureuses dispositions pour la Chaire. C'est une chose singuliere que des hommes qui se sont ensuite frayés des routes très différentes, & qui ont acquis la plus grande célébrité, ayent commencé par la prédication. Tels *Boerhaave* & *Wolff*. Peut-être auroient-ils été encore meilleurs prédicateurs à la fin de leur carriere qu'à l'entrée, si l'essence de la prédication consiste à proposer des vérités importantes, & à les mettre dans le plus grand jour dont elles soient susceptibles.

Comme les études théologiques du jeune *Jacobi* demandoient cependant encore qu'il reçût quelques leçons plus immédiatement rélatives à cette destination, les Professeurs de Halle parurent propres à les fournir, & un seul pouvoit tenir lieu de tous; c'étoit le célebre Mr. *Baumgarten* l'ainé, l'un des plus profonds Théologiens, & des Savans les plus consommés en tout genre d'érudition, qui ayent jamais occupé une Chaire académique. Mr. *Jacobi*, en continuant ses études, montoit de tems en tems en Chaire; & ayant eu occasion de paroître dans celle d'Hildesheim, il y fut si goûté que les Magistrats de cette Ville souhaiterent de l'attacher à quelcune de leurs Eglises, lui offrant mê-

(*) Ce célebre Professeur vivoit encore lorsque cet Eloge a été lu.

même une place de Surintendant qui vint alors à vaquer. C'étoit le moment de se déterminer; & ce fut celui où le germe militaire, cultivé jusqu'alors en secret, se développa avec une rapidité, avec une véhémence, proportionnées à l'effort employé pour le cacher. Le spectacle d'un fils désobéissant qui s'offre ici, n'a, j'ose le dire, rien qui puisse révolter: ou plutôt ce n'est point une vraie désobéissance; puisqu'avant nos parens il existe une premiere Mere dont l'autorité est la plus forte, dont les loix sont les plus sacrées, c'est la Nature. Autant qu'il seroit injuste & absurde de vouloir provoquer à ses droits pour légitimer des écarts manifestes, autant ces droits peuvent-ils être reclamés par quiconque se porte vers un but pour lequel il est né, se déclare pour un genre vers lequel une force irrésistible l'entraine. Aussi des parens sensés, après les premiers momens de la surprise, après les premiers effets d'une répugnance fondée sur quelque prévention, ne manquent gueres de se désister de leurs oppositions, & reconnoissent bientôt avec attendrissement que leurs enfans étoient plus sages qu'eux, qu'ils connoissoient mieux leurs véritables intérêts. Après ces observations parfaitement fondées, si je ne me trompe, je ne ferai pas difficulté de dire que Mr. *Jacobi* laissa sans réponse plusieurs lettres, par lesquelles son pere le pressoit de la maniere la plus forte d'accepter des offres aussi avantageuses que l'étoient celles du Magistrat de Hildesheim. Pendant que le fils gardoit ce silence, le grand-pere vint à mourir; & la notification de cette mort obligea Mr. *Jacobi* à répondre, & à s'expliquer sur les lettres précédentes. N'osant pourtant manifester son véritable desir, il demanda la permission de passer encore un an à l'Université, pour s'attacher au Droit. Il l'obtint, mais les Mathématiques continuerent à faire son objet capital. Désespérant alors de pouvoir entrer au service, il avoit en vue quelque place de Professeur.

Le tems accordé étant écoulé, Mr. *Jacobi* fut rappellé par son pere au mois de Février 1746; & les premieres conférences entr'eux

ayant découvert au pere que le fils n'étoit, ni Théologien, ni Jurisconsulte, il fut assez mécontent de voir tant d'années perdues: au moins lui paroissoient-elles l'être. Le jeune homme ne pouvant demeurer longtems dans cet état de gêne & de disgrace, fit effort sur la timidité filiale, & déclara au bout de quatre semaines qu'il vouloit aller à Berlin pour s'engager dans les Canonniers. Qu'on s'imagine les allarmes d'un pere voué au service des Autels, les angoisses d'une tendre mere! La permission d'aller à Berlin fut accordée, mais non celle de devenir Canonnier. Il y avoit une place de Précepteur à remplir; un Ami la lui avoit ménagée, & le jeune *Jacobi* fut envoyé dans la Capitale à condition d'entrer aussitôt dans ce poste. L'événement n'est pas difficile à deviner. La premiere chose que *Jacobi* fit en arrivant à Berlin fut d'aller se présenter au Colonel *de Meerkatz*, qui le reçut dans sa Compagnie, & qui, en considération de ses études, le fit d'abord Bas-Officier. Ici donc s'ouvre une nouvelle scene: ici nous allons voir comment Mr. *Jacobi* fit humainement tout ce qu'on peut faire pour justifier une résolution telle que la sienne, & pour laisser même un nom, que nous nous faisons un véritable plaisir de transmettre à la postérité.

Depuis le 20. Mai 1745, où Minerve avoit remis ce nourrisson entre les mains de Mars, Mr. *Jacobi* ne négligea aucune des occasions propres à prouver qu'il étoit bon à tout, & qu'on pouvoit se confier à lui pour les divers genres de fonctions d'un Militaire qui réunit les connoissances & l'application, la fidélité & le courage. Son Colonel, juge compétent, s'apperçut bientôt de ce qu'il valoit, & l'attacha à sa personne, le menant partout où il étoit lui-même commandé, c'est à dire, d'abord à Magdebourg, ensuite au Camp qui fut formé près de Halle, de là à la prise de Leipsig, & enfin à la mémorable Bataille de Kesselsdorf, où, au sein de la victoire, le nouveau Militaire eut le désagrément de perdre tout son équipage. Philosophe depuis longtems, il ne

il ne regretta que les Elémens de Mathématique de *Wolff* & *Horace*. Aussi étoit-ce en tout sens ce qu'il possédoit de plus précieux.

Mr. *Jacobi* a écrit une rélation assez étendue de cette bataille, la premiere à laquelle il avoit assisté. Peut-être feroit-elle plaisir aux gens du métier, mais nous ne saurions lui accorder place ici. Il n'y a qu'un trait de ce narré, dont il faut faire honneur à la noblesse de ses sentimens. En représentant les désordres du pillage, il montre la plus forte horreur pour ce métier, protestant qu'il eût été incapable de s'approprier la moindre bagatelle aux dépens des plus riches tout comme à ceux des plus pauvres. Peut-être même aura-t-on peine à le croire; ou trouvera-t-on un rigorisme outré dans ce qu'il ajoûte, qu'il aimoit mieux jeûner des jours entiers que de fonder sa cuisine sur le droit du plus fort.

En 1764, au mois de Fevrier, Mr. *Jacobi* entra comme Bas-Officier dans la Compagnie de Bombardiers du Capitaine *de Holtzmann*.

Le loisir que lui donna la paix qui venoit d'être conclue fut consacré à se pousser dans l'étude des Mathématiques. Il y avoit un Lieutenant *Ottleben* qui les enseignoit. *Jacobi* fut envoyé à ses leçons, avec d'autres Bas-Officiers en 1747; mais cet Officier s'apperçut bientôt que son disciple en savoit plus que lui, & rendant volontiers justice à sa capacité, il lui confia le soin d'instruire une Classe entiere: de sorte que Mr. *Jacobi* passa tout d'un coup de l'état d'Ecolier au grade de Professeur. Par là ses deux penchans favoris furent tout à la fois remplis; car nous avons vû que son goût avoit, pour ainsi dire, flotté entre le métier des armes & les charges Académiques. Heureux l'homme qui ne forme que des desirs aussi purs! plus heureux celui qui les voit accomplis!

La Physique moderne a une liaison étroite avec les Mathématiques. Mr. *Jacobi* tourna ses regards vers elle; elle remplit d'abord ses heures de récréation; bientôt il fut frappé de ses charmes, convaincu de son utilité, & joignit la qualité de bon Physicien à celle d'habile Géometre. Tant de succès le firent connoitre & estimer de plus en plus; cela est naturel: & ce qui l'est encore plus, elles lui attirerent des envieux, insectes qui peuvent piquer des plantes saines & vigoureuses, mais qui ne sauroient les détruire.

Au mois de Juillet 1749, Mr. *Jacobi* eut l'avantage de se faire connoitre à feu Mr. le Maréchal *de Schmettau*, Grand-Maître de l'Artillerie. Les expériences que le Corps d'Artillerie faisoit sur le jet des bombes s'exécuterent en présence du Maréchal, qui avoit invité Mrs. *Euler* & *Kies* à y assister. Mr. *Jacobi* donna des preuves de sa capacité & de sa dextérité, qui lui firent beaucoup d'honneur, & le mirent en liaison avec ces Savans. Il sentoit bien le prix de cette liaison, & en tira depuis tous les avantages qu'il s'en étoit promis.

Vers la fin de la même année, le Colonel *de Holtzmann* lui confia l'instruction des Bas-Officiers du Bataillon qu'il commandoit, & le fit Artificier.

Ce n'est pas une simple généralité que ce que j'ai dit des envieux de Mr. *Jacobi*. Je trouverois ici le lieu de parler de leurs manœuvres, & de diverses cabales qui se firent dans le Corps de l'Artillerie; mais mon pinceau se refuse à ces noirceurs. Je dirai seulement que Mr. *Jacobi* fut entierement détruit dans l'esprit du Colonel *de Holtzmann*, qui l'avoit jusqu'alors protégé. Cela ne le découragea cependant point; il sentoit que le droit & la raison étoient de son côté, & il soutint une vive dispute contre ce Colonel au sujet des Canons à chambres cylindriques, dont Mr. *Jacobi* revendiquoit l'invention. Une preuve de la bonté de sa cause, c'est que le Grand-

Maî-

Maître & le Général *de Beauvrye* redoublerent d'estime & de confiance pour lui.

Selon les apparences, ce fut la mort du premier qui l'empêcha de faire la fortune de Mr. *Jacobi;* il perdit aussi dans un court espace de tems le second, mais il les recouvra l'un & l'autre avec usure par l'amitié intime de Mr. *de Dieskau*, alors Major, & que ses longs services aussi bien que son rare mérite rendent aujourd'hui l'un des plus anciens & des plus respectables Chefs de l'Artillerie. (*) Ce fut par ses conseils que Mr. *Jacobi* composa deux Traités sur les matieres les plus intéressantes de son mêtier; le premier sur la cause des jets à faux, & les moyens d'en diminuer le nombre, le second sur la maniere d'arranger les canons, soit au dehors, soit au dedans d'une forteresse. Ces deux Ecrits furent commencés & achevés en 1751. Mr. *de Dieskau* avoit dessein de les montrer au Roi, & de procurer à leur Auteur un avancement dont il étoit si digne. L'occasion que le Major cherchoit se trouva, même avant que ces Traités fussent finis, dans un entretien à table, où Mr. *de Dieskau* ayant dit que *Jacobi* étoit très capable d'enseigner les Mathématiques, S. M. ordonna au Général *Linger* de l'examiner: & cet examen ayant été suivi du rapport le plus favorable, le Roi fit expédier aussitôt la Patente de Lieutenant pour Mr. *Jacobi*, lui ordonnant de commencer sans délai ses leçons de Mathématique. Mr. *de Dieskau* couronna ce service signalé par un trait de générosité digne de lui: il fit présent au nouveau Lieutenant de tout son équipage. C'est ainsi qu'après avoir été Bas-Officier pendant six ans & huit mois, Mr. *Jacobi* obtint un grade, qui, tout distant qu'il est des premiers rangs, le combloit d'une joie plus vive que celle qu'on éprouve au faîte des honneurs.

Le Professorat & la Lieutenance demeurerent donc unis; mais la Lieutenance rendit le Professorat une fonction réglée, une charge proprement dite. Pour s'en acquitter d'autant mieux, Mr. *Jacobi* com-

(*) Lieutenant-Général, & Chevalier de l'Aigle noir.

composa lui-même un Cours de Mathématique, dans lequel il comprit toutes les matieres dont la connoissance est utile à un Membre du Corps de l'Artillerie. Il donnoit outre cela des leçons particulieres de Physique à plusieurs Officiers du même Corps, & il y suivoit le Cours de Mr. *de Segner*.

Il étoit naturel qu'un homme aussi habile, aussi appliqué à tous ses devoirs, aussi attentif à faire des progrès & à seconder ceux des autres, attirât l'attention d'une Compagnie fondée pour le progrès de toutes les Sciences. L'Académie également persuadée que Mr. *Jacobi* lui seroit utile, & qu'elle seroit utile à Mr. *Jacobi*, le mit au nombre de ses Membres au commencement du mois d'Octobre 1752. Nous l'avons vû assidu à nos Assemblées, autant que ses autres devoirs le lui permettoient. Il y portoit cette attention qui sert à l'accroissement du savoir, & cette modestie qui en est le caractere le moins douteux. Il n'auroit pas manqué d'enrichir nos Mémoires de ses travaux; & il y a, parmi les matériaux des volumes que nous préparons pour l'impression, un écrit important de sa façon sur les jets à ricochet. Laborieux & inventif, il étoit toujours occupé de quelqu'idée nouvelle, ou qu'il conduisoit à quelque nouveau degré de perfection. Il avoit trouvé une façon particuliere de lever le plan des Ouvrages d'une forteresse par le moyen d'un miroir; & il a composé un Mémoire fort étendu sur ce sujet. Etoit-ce par une espece de pressentiment qu'il mettoit si bien à profit un tems dont la durée devoit être si courte? Suivons-le dans le reste de sa carriere; nous le verrons arriver par les travaux, & à travers les dangers, à ce lit d'honneur qui lui étoit réservé.

En 1753, il assista au Camp qui fut formé près de Spandau; & l'année suivante, aux expériences sur le Globe de compression qui se firent à Potsdam. Le 19 d'Août de cette même année fut incontestablement un des plus beaux jours de sa vie. Le Roi l'avoit fait venir [illegible] à Pots-

à Potsdam pour y manœuvrer avec quelques mortiers. Le Major *de Dieskau* & le Capitaine *Wentzell* aſſiſterent à ces manœuvres, dans leſquelles le Lieutenant *Jacobi* fit voir une dextérité ſi conſommée, que S. M. lui dit ces mots dont on peut croire qu'il n'a jamais perdu le ſouvenir: *Je ſuis extraordinairement content de vous. Vous avez fait ce qu'on pouvoit faire de mieux. Vous avez ſurpaſſé mon attente.* Ces paroles ſeules ſuffiſent pour faire l'Eloge de Mr. *Jacobi;* elles valent incomparablement mieux que tous les Eloges académiques.

La Guerre ayant recommencé, Mr. *Jacobi* ſervit comme il avoit toujours fait; ſe trouvant partout où ſon devoir l'appelloit, & ne mettant d'autres bornes à ſon devoir que celles de ſon zele. Il fut fait priſonnier dans une action dont j'ignore le lieu & la date, & conduit à Cremm, avec d'autres compagnons de la même diſgrace. Il en charma les ennuis en leur donnant des leçons. N'étoit-il pas en droit de dire: *Je porte tout avec moi?*

Ayant été échangé, il revint à ſon poſte, & ſe trouva aux batailles de Reichemberg & de Prague, dont il a donné un récit détaillé & inſtructif dans une lettre datée du 27. Mai 1757. Cette Lettre, auſſi bien qu'une autre à Mr. le Profeſſeur *Pohlack*, où il fait une hiſtoire abrégée de ſes études & de ſa vie, juſqu'au 21. Décembre 1754, jour auquel il l'écrivoit, mériteroient de voir le jour. Ce ſont les ſources dans leſquelles j'ai puiſé cet Eloge.

On eſt ſurpris en voyant les dangers ſans nombre auxquels Mr. *Jacobi* fut expoſé dans ces batailles, & ſurtout à celle de Prague. La mort voloit autour de lui; mais ſon heure n'étoit pas venue, quoiqu'elle ne fut pas bien éloignée. C'étoit devant Olmütz qu'il devoit donner à la Patrie le dernier témoignage de ſon dévouement. Chargé de la direction de pluſieurs batteries, il en pouſſoit le ſervice avec une ardeur infatigable; il écrivit de ce Siege une Lettre à ſon pere, où il

il marquoit qu'il espéroit la reddition d'Olmütz dans l'espace de dix jours. Un boulet de canon parti de la place l'empêcha d'être témoin de l'événement. On lui fit remarquer qu'une batterie des ennemis étoit pointée de façon à porter sur lui: il sourioit encore de l'avis, lorsqu'il fut terrassé. La nouvelle de sa mort parvint à son pere avant sa derniere Lettre. Le jour de cette mort n'est pas connu: on sait seulement que ses funérailles se firent avec celles de deux autres braves Officiers du même Corps, Mrs. *de Beausobre* & *Golzhorn*.

Tel fut Mr. *Jacobi* avant que d'avoir fini son cinquieme lustre; quel n'auroit-il pas été, s'il avoit autant vêcu que le Chevalier *Folard*?



l'efpace

d'être

ie des en

ore de

fon pere

onnu:

autres

nquiet

que le